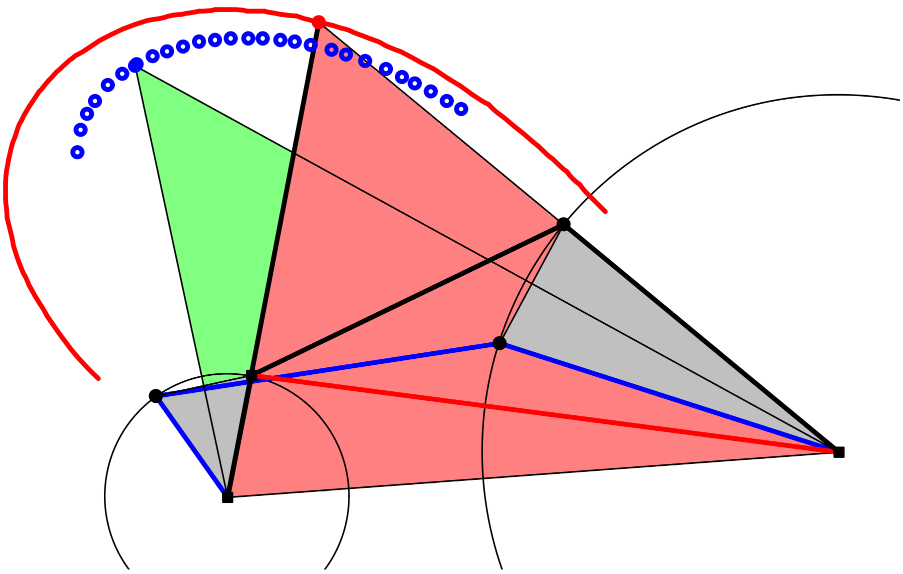
Workshop

Kinematik
mit Dynamischer Geometrie-Software
(speziell Euklid Dynageo)

Strobl
6.11.2003



Wolfgang Rath
Institut für Geometrie
TU Wien

http://www.geometrie.tuwien.ac.at/rath

HINWEISE ZU DEN UNTERLAGEN

Die vorliegenden Unterlagen sind weder ein geschlossener Kurzkurs in Kinematik noch eine Kurzeinführung in Euklid Dynageo. Sie sollen das Bearbeiten von einzelnen Fragestellungen erleichtern und Hinweise zur Umsetzung in Euklid Dynageo bieten.

HINWEISE ZU EUKLID-DYNAGEO (Version 2.5)

In den letzten Versionen gab es unter anderem folgende Neuerungen und Verbesserungen:

- Wird beim Klicken auf eine Ikone eines Werkzeuges die Umschalttaste gedrückt, so ***bleibt dieses Werkzeug ausgewählt***, bis die rechte Maustaste gedrückt wird oder ein anderes Werkzeug gewählt wird.
- ***Zoomen***: Durch Drücken von STRG-g ("größer") bzw. STRG-k ("kleiner") ist Zoomen möglich.
- ***Verschieben***: Bei sichtbarem Koordinatensystem kann der Ursprung mit der Maus gefaßt und durch Verschieben dieses Punktes die ganze Zeichnung verschoben werden.
- Bei ***Text und Beschriftung*** (Objektnamen) ist nun auch die Eingabe von fetter und kursiver Schrift, Unterstreichung sowie oberen und unteren Indizes möglich.
- Es sind nun auch automatische ***Animationen*** möglich.

DEFINITION EINES GELENKVIERECKS

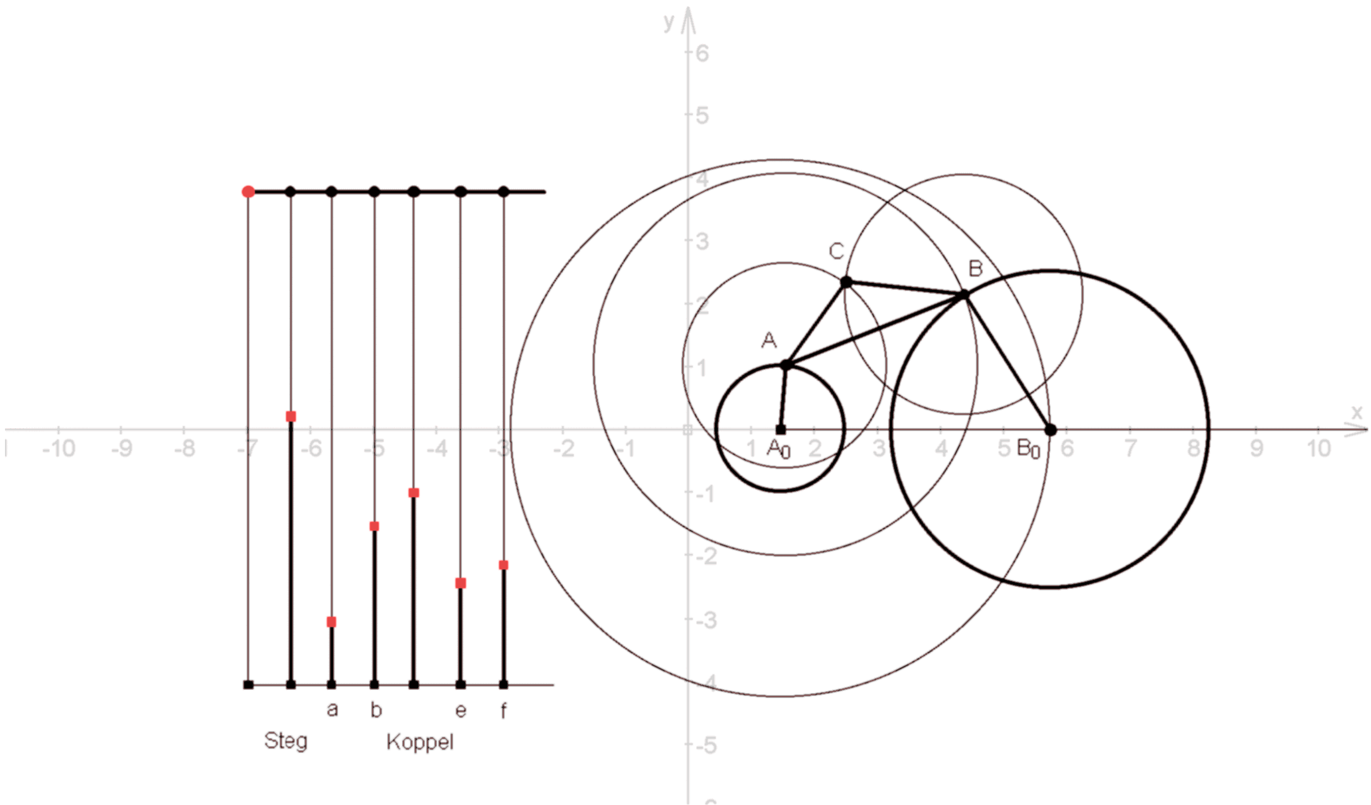
Unter einem Gelenkviereck versteht man ein Getriebe, bei dem zwei Punkte A und B auf Kreisen um zwei feste Punkte A_0 bzw. B_0 wandern.

Damit die Maße des Getriebes nachträglich übersichtlich geändert werden können, legen wir die Abmessungen zuerst in einer Hilfsfigur fest:
Wir konstruieren (parallele) Hilfsstrecken mit den Längen
$a = \overline{A_0A}$ (1. Arm), $b = \overline{B_0B}$ (2. Arm), $c = \overline{AB}$ (Koppel), $d = \overline{A_0B_0}$ (Steg)

Danach bestimmen wir das Gelenkviereck. Wir konstruieren der Reihe nach

- den Punkt A_0
- eine Parallele h zur waagrechten Achse des Koordinatensystems durch A_0
- einen Kreis k_0 mit festem Radius d um A_0
- B_0 als Schnittpunkt von h und k_0
- einen Kreis k_A mit festem Radius a um A_0
- einen Kreis k_B mit festem Radius b um B_0
- mit dem Werkzeug ***Punkt auf Linie*** einen Punkt A auf k_A
- einen Kreis k_3 mit festem Radius c um A
- B als Schnittpunkt von k_B und k_3

Ein Punkt C des Gangsystems wird mittels zweier Hilfskreise durch die in der Hilfsfigur festgelegten Längen $e = \overline{AC}$ und $f = \overline{AC}$ festgelegt.



Damit können alle Maße des Gelenkvierecks in der Hilfsfigur geändert werden. Die Lage des Getriebes kann durch Bewegen des Punktes A_0 geändert werden. Der Antrieb erfolgt durch Bewegen von A auf dem Kreis k_A.

POLKURVEN

1. Momentanpol
Ein System Ó (Gangsystem), das sich gegenüber dem System Ó$_0$ (Rastsystem) bewegt, verhält sich in jedem Augenblick hinsichtlich der Bahntangenten und Geschwindigkeitsvektoren

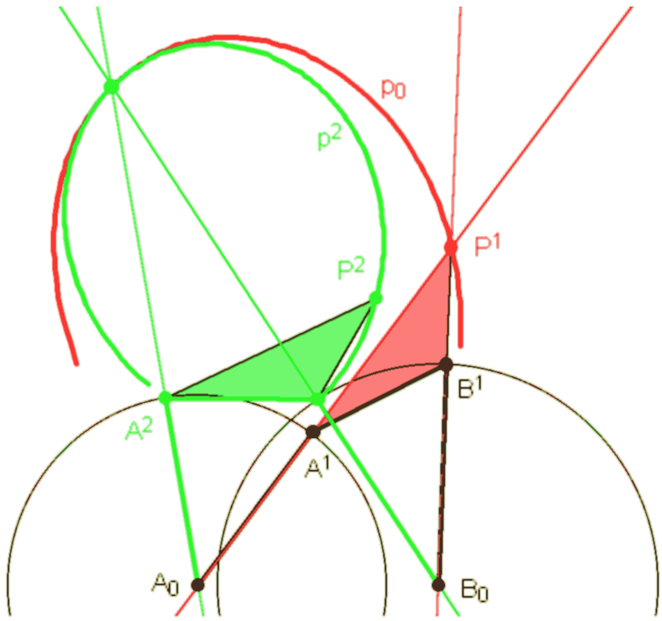
- wie eine ***Drehung*** um einen festen Punkt (Momentanpol) oder
- wie eine ***Schiebung*** mit konstanter Geschwindigkeit.

Alle Bahnnormalen gehen durch den ***Momentanpol*** (im Fall einer Momentanschiebung ist das ein Fernpunkt). Der Momentanpol kann als ***Schnitt zweier Bahnnormalen*** konstruiert werden.

Bei der Bewegung des Gelenkvierecks A_0ABB_0 ist der Momentanpol P Schnittpunkt der beiden Bahnnormalen A_0A und BB_0.

2. Rastpolkurve
Während des Bewegungsablaufs durchläuft der Punkt P im Rastsystem die Rastpolkurve p_0.

- Mit dem Werkzeug ***Ortslinie aufzeichnen*** erzeugen die Rastpolkurve, indem wir den Punkt P^1 auswählen und A^1 um A_0 bewegen.
- Im Menü ***Form u. Farbe*** stellen wir die *Linienfarbe* rot und *Linienstil* durchgezogen dick ein und ändern mit dem Werkzeug *Darstellung* die Farbe des Momentanpols und der Rastpolkurve auf rot.



3. Gangpolkurve
Markieren wir zu jedem Zeitpunkt die Lage des Momentanpols im Gangsystem, so entsteht die Gangpolkurve.

3.1 Erzeugen des Gangsystems.
Wir repräsentieren das Gangsystem durch eine (grüne) Kopie $A_0A^2B^2B_0$ des schwarzen Gelenkvierecks $A_0A^1B^1B_0$.

3.2 Übertragen des Momentanpols
Wir konstruieren das zum Dreieck $A^1P^1B^1$ kongruente Dreieck $A^2P^2B^2$.

- Mit dem Werkzeug ***Winkel messen*** (Menü ***Messen und Rechnen***) messen wir die Winkel $B^1A^1P^1$ und $A^1B^1P^1$.
- Mit dem Werkzeug ***Gerade in bestimmtem Winke***l (Menü ***Konstruieren***) konstruieren wir durch A^2 die Hilfsgerade g, sodass das Winkelmaß $B^1A^1P^1$ gleich dem Winkelmaß $B^2A^2P^2$ ist. Dazu übernehmen wir durch Anklicken der Maßzahl das Winkelmaß $B^1A^1P^1$ in das Dialogfeld und klicken dann der Reihe nach die Punkte B^2 und A^2 an.
- Analog verfahren wir für den zweiten Winkel ABP.
- P^2 ist nun der Schnittpunkt der beiden Hilfsgeraden.

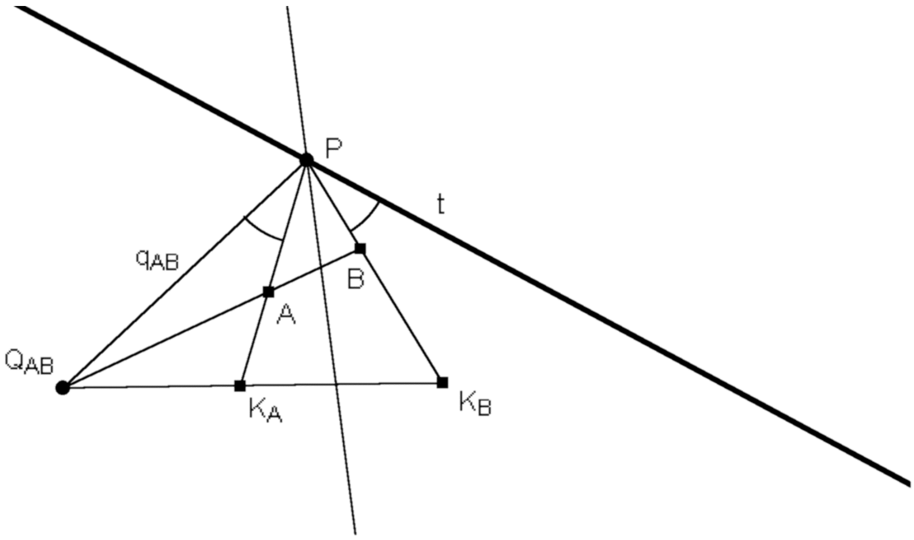
3.3 Zeichnen der Gangpolkurve
Wird nun A um A_0 bewegt, so durchläuft P^2 die Gangpolkurve p'^2.

- Mit dem Werkzeug ***Ortslinie aufzeichnen*** erzeugen wir die Gangpolkurve, indem wir den Punkt P^2 auswählen und A^1 um A_0 bewegen.

3. Abrollen der Polkurven - Animation
Während des Bewegungsablaufes rollen die Polkurven aufeinander ab, ohne zu gleiten. Dies illustrieren wir mit einer Animation.

KRÜMMUNG - KONSTRUKTION VON BOBILLIER

Kennt man in einer Lage des Gangsystems zu zwei Punkten A bzw. B die Krümmungsmitten ihrer Bahnkurven K_A bzw. K_B so ist die Tangente t an die Rastpolkurve im zugehörigen Momentanpol P durch folgende **Konstruktion von Bobillier** bestimmt:



Konstruktion der Poltangente t aus zwei Krümmungsmitten K_A und K_B:

- Der Momentanpol P ist der Schnittpunkt der Polstrahlen AK_A und BK_B
- Der Hilfspunkt Q_{AB} ist der Schnittpunkt der Geraden AB und K_AK_B
- Die Hilfsgerade q_{AB} ist die Verbindungsgerade von Q_{AB} und P.

Nun ergibt sich die Tangente t an die Polkurve durch eine der beiden folgenden Aussagen:

- Das Winkelmaß von einem Polstrahl PK_A zur Hilfsgeraden q_{AB} ist gleich dem Winkelmaß vom anderen Polstrahl PK_B zur Poltangente t, wobei die Orientierung der beiden Winkel entgegensetzt ist.

- t entsteht aus AK_A durch Spiegelung an einer Winkelsymmetralen s_{AB} der beiden Polstrahlen AK_A und BK_B.

Bei Verwendung der zweiten Formulierung ergibt sich automatisch die richtige Orientierung der Winkel. Bei Konstruktion mit Euklid scheint auch die zweite Variante die raschere zu sein:

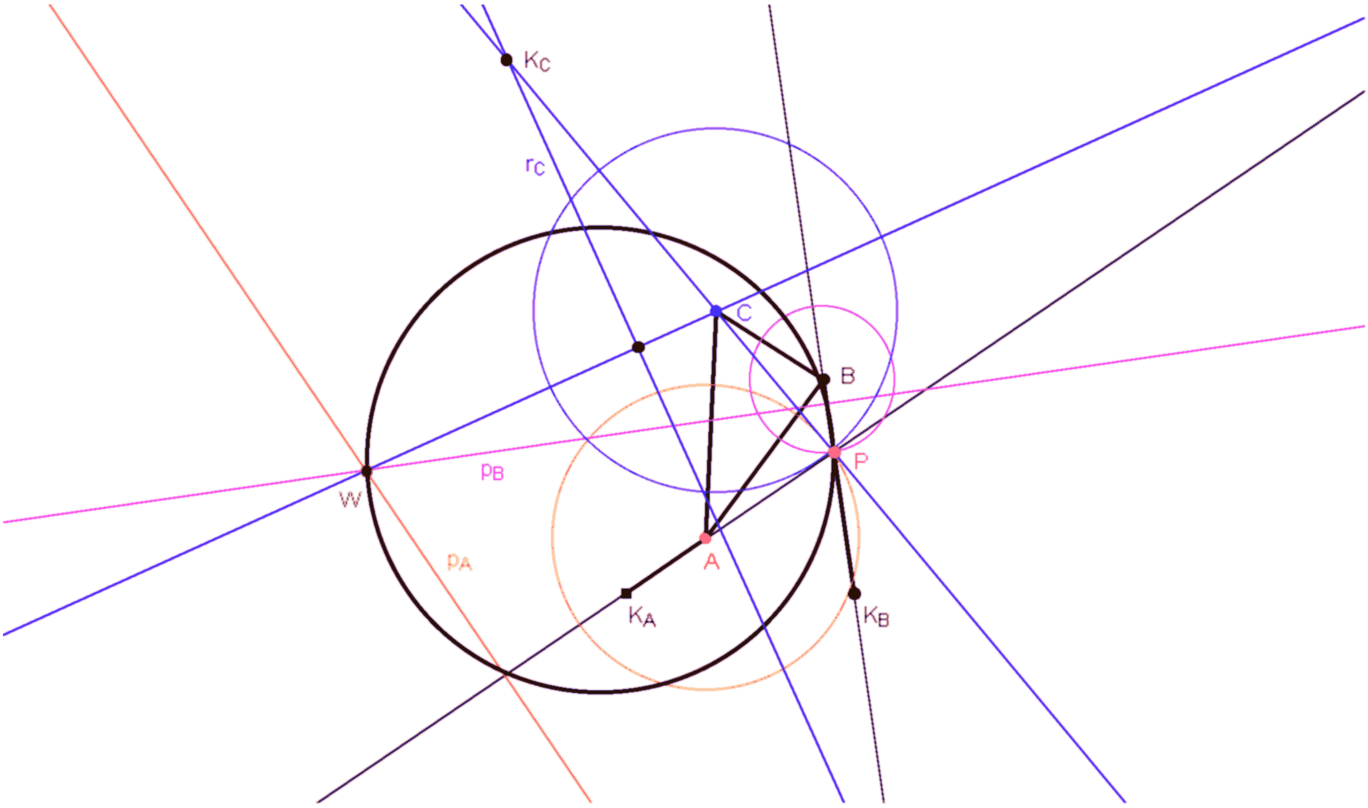
- Mit dem Werkzeug ***Winkelhalbierende*** (Menü ***Konstruktion***) konstruiert man zuerst eine Winkelsymmetrale s_{AB}.
- Mit dem Werkzeug ***Spiegelung*** (Menü ***Abbildungen***) spiegelt man q_{AB} oder Q_{AB} an s_{AB}

Konstruktion der Krümmungsmitte K_C aus der Poltangente t und einer bekannten Krümmungsmitte K_B:

Soll nun zu einem Punkt C des Gangsystems der Krümmungsmittelpunkt K_C konstruiert werden, so liest man obige ***Hilfsfigur umgekehrt***: Aus der Poltangente und den Punkten B und K_B konstruiert man der Reihe nach die Hilfsgerade , q_{BC}, den Hilfspunkt Q_{BC} und dann die Krümmungsmitte K_C.

WENDEKREIS - KRÜMMUNGSKONSTRUKTION NACH BEREIS

Wendekreis:



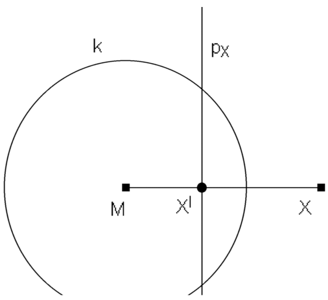
Die Menge aller Punkte im Gangsystem, die einen Wendepunkt ihrer Bahn durchlaufen, liegen auf dem Wendekreis. Dieser berührt die Polkurve im zugehörigen Momentanpol P. Der P gegenüberliegende Punkt auf dem Wendekreis heißt Wendepol. Der Krümmungsmittelpunkt jedes vom Momentanpol verschiedenen Punktes auf dem Wendekreis ist ein Fernpunkt.

Für einen Zwanglauf gilt folgende **Krümmungskonstruktion:**

- Die Polare p_A von K_A bezüglich des Kreises um A durch den Momentanpol P geht durch den Wendepol W. Damit läßt sich der Wendepol (und der Wendekreis über dem Durchmesser PW konstruieren, wenn zu zwei Punkten des Gangsystems die Krümmungsmitten bekannt sind.

- Die Krümmungsmitte K_C eines Punktes C liegt auf der Polaren r_C des Wendepols W Momentanpol bezüglich des Kreises um C durch den Momentanpol P.

(Kurz: Der Wendepol W und der Krümmungsmittelpunkt K_C sind konjugiert bezüglich des Kreises um C durch den Momentanpol P.)



Mit Euklid läßt sich die Polare eines Punktes X bezüglich des Kreises k am einfachsten so konstruieren:

- Durch Inversion (Werkzeug ***Inversion,*** Menü ***Abbildungen***) von X an k entsteht X^I.
- Die Polare p_X geht durch X^I und steht auf MX Normal.

Wird die Konstruktion öfter benötigt, empfiehlt sich die Definition eines Makros.

SCHEITELKUBIK

Die Menge aller Punkte des Gangsystems, die momentan einen Scheitel ihrer Bahn durchlaufen liegen auf einer Kurve 3.Ordnung. Diese ist

- im allgemeinen eine irreduzible Kubik

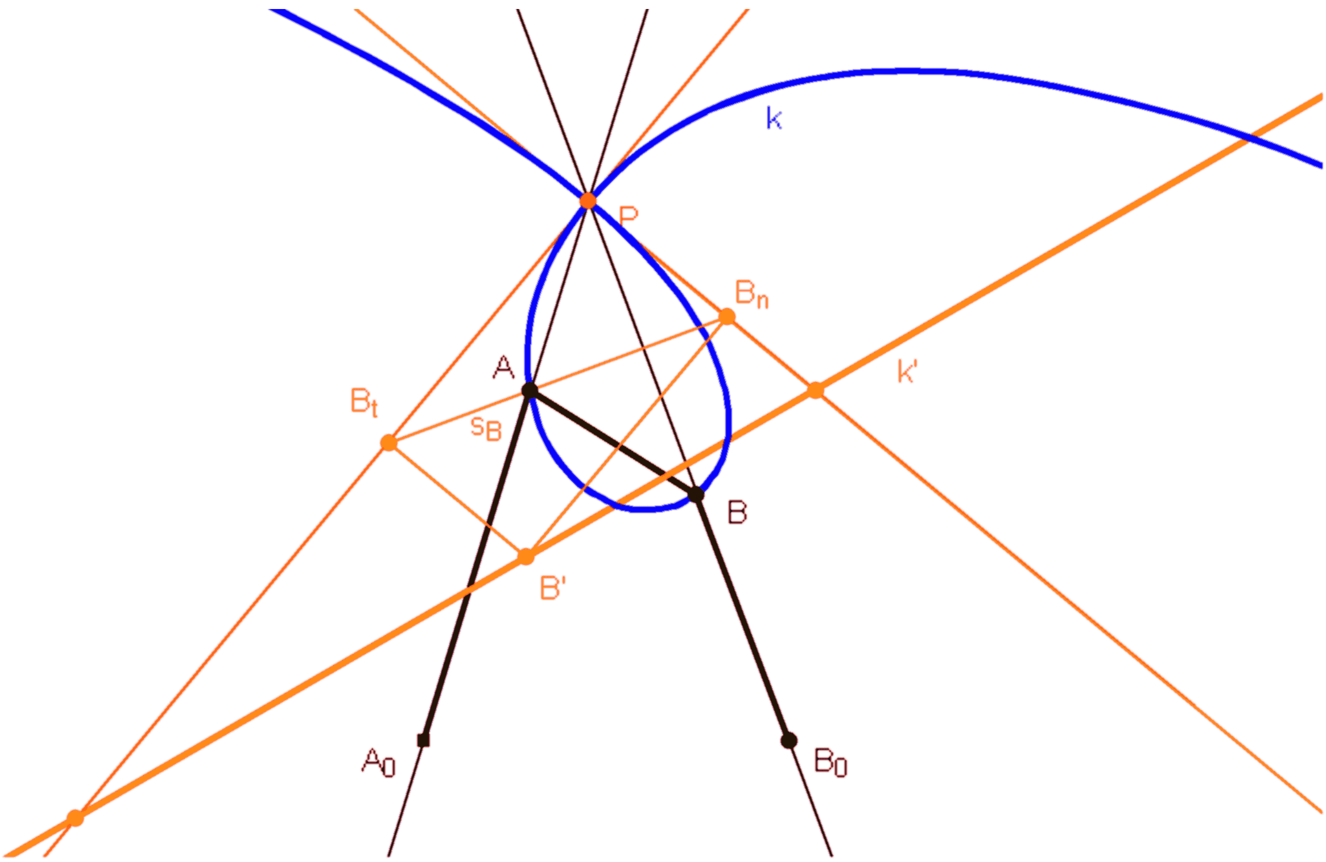
kann aber bei speziellen Lagen bzw. Getrieben zerfallen in

- Poltangente und Kreis der die Polnormale im Pol berührt
- Polnormale und Kreis der die Poltangente im Pol berührt
- Polnormale, Poltangente und Ferngerade.

Zur Konstruktion der Scheitelkubik k definieren wir eine Abbildung *ó* $: X \mapsto X'$, welche die Scheitelkubik k auf eine Gerade k' abbildet, folgendermaßen:

- A sei ein Punkt der Scheitelkubik
- s_A ist die Streckensymmetrale der Strecke PA
- A_t ist der Schnittpunkt von s_A mit der Poltangente t
- A_n ist der Schnittpunkt von s_A mit der Polnormalen n
- A' ist bestimmt als vierte Ecke des Rechtecks $A_t P A_n A'$

Damit ist k' und somit auch die Scheitelkubik bestimmt, wenn man zwei Punkte des Gangsystems kennt, die zum betrachteten Zeitpunkt einen Scheitel ihrer Bahn durchlaufen. Da bei einem Gelenkviereck die Endpunkte der beiden Arme stets einen Scheitel ihrer (Kreis-)Bahn durchlaufen, kann die Scheitelkubik in diesem Fall immer bestimmt werden.



TROCHOIDENBEWEGUNG - RADLINIEN

Rotiert ein Stab M_0M mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w_1 um den festen Punkt M_0 und der Stab MA mit konstanter Winkelgeschwindigkeit w_2 um M, so beschreibt A eine Radlinie (Trochoide). Die Winkelgeschwindigkeiten werden beide gegen das feste System gemessen und die Orientierung durch das Vorzeichen festgelegt.

Der Stab MA vollführt eine Trochoidenbewegung. Die Polkurven dieser Bewegung sind Kreise. Dabei sind er Radius r_0 des Rastpolkreises und der Radius r des Gangpolkreise durch folgende Beziehungen festgelegt:

$$r_0 + r = \overline{M_0M}\,,\; r_0 : r = w_2 - w_1 : -w_1 \mathrm{t}$$

Dabei ist stets $r_0 > 0$ und r mit Vorzeichen versehen. Bei $r > 0$ liegen die Polkreise auf derselben Seite, bei $r < 0$ auf verschiedenen Seiten der Berührtangente der beiden Kreise.

Im folgenden Betrachten wir nur den Fall $r > 0$. In diesem Fall gilt:

$$r_0 = \left|\frac{w_2 - w_1}{w_2}\right| \overline{M_0M}$$

Um die Angabeparameter übersichtlich ändern zu können und einen geeigneten Antrieb vorzusehen können wir etwa so vorgehen.

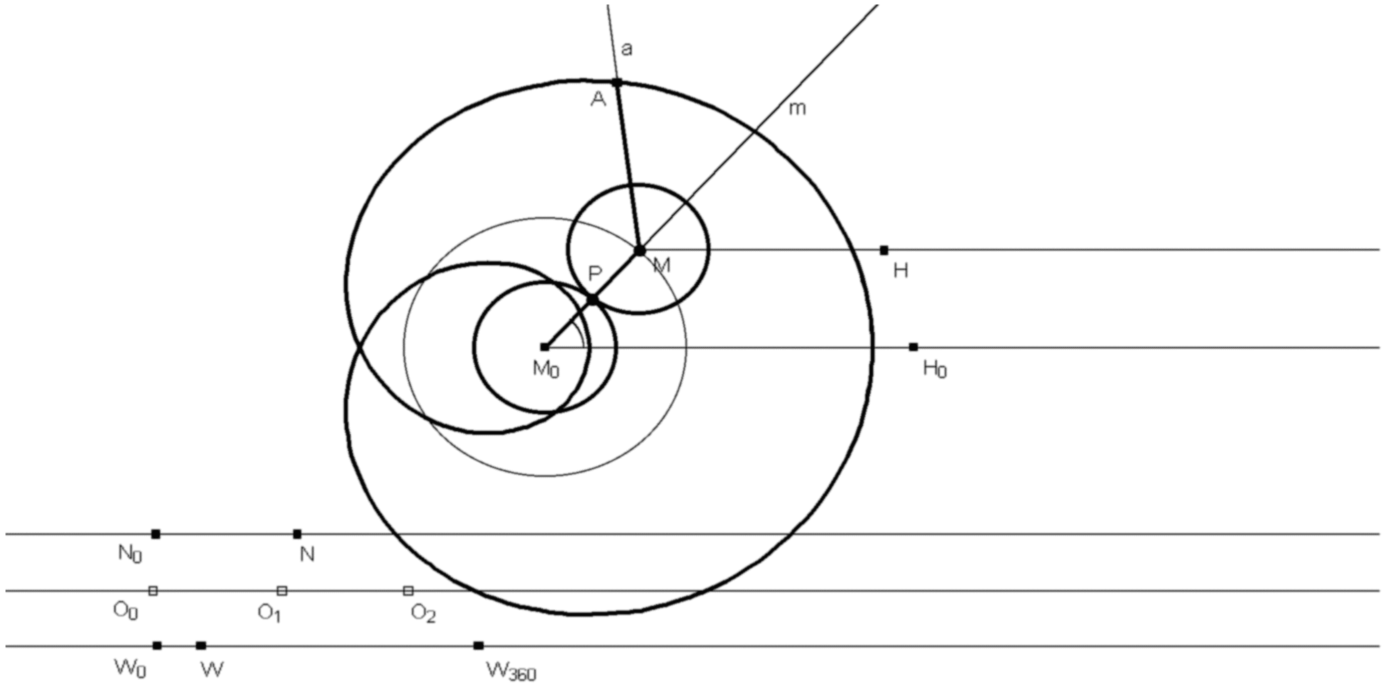
Wir konstruieren folgende Hilfsfigur:

- Eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt N_0 und auf der Geraden den Punkt N ($\overline{N_0N}$ gibt die Länge von $\overline{M_0M}$ an)
- Eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt W_0 und auf der Geraden die Punkte W_{360} und W (W zwischen W_0 und W_{360}) (W gibt dann den Winkel der Antriebskurbel M_0M gegen die positive x-Achse an)
- Eine Parallele zur x-Achse durch den Punkt O_0 und auf der Geraden die Punkte O_2 und O_1 (O_1 zwischen O_0 und O_2) ($\overline{O_0O_1} = w_1$ und $\overline{O_0O_2} = w_2$ geben die Winkelgeschwindigkeiten an)

Daraus bestimmen wir nun das Getriebe für die Trochoidenbewegung:

- Parallele zur x-Achse durch einen Punkt M_0 und darauf einen Punkt H_0 (rechts von M_0)
- Gerade m in bestimmtem Winkel (Winkelgröße $=(x(W)-x(W_0))/(x(W_{360})-x(W_0))*360$, Punkt auf dem ersten Schenkel = H_0, Scheitel = M_0)
- Kreis k_M mit festem Radius (Radius = $d(N_0;N)$) um M_0
- M ist Schnittpunkt von k_M und m
- Parallele zur x-Achse durch M und darauf einen Punkt H (rechts von M)
- Gerade a in bestimmtem Winkel (Winkelgröße $=(x(W)-x(W_0))/(x(W_{360})-x(W_0))*360$, Punkt auf dem ersten Schenkel = H, Scheitel $= M$)
- Punkt A auf a

Bei Änderung von W durchläuft nun A eine Radlinie. Ist das Verhältnis $w_1 : w_2$ rational, so ist sie geschlossen. Sind die Werte w_1, w_2 teilerfremd schließt sich die Radlinie erst nach $|w_2|$ Umläufen der Antriebskurbel M_0M. W muss daher auch in Positionen außerhalb der Strecke W_0W_{360} bewegt werden.



Der Rastpolkreis ist ein Kreis um M_0 mit dem Radius oben angegeben Radius r_0
(Termobjekt abs $((x(O_2)-x(O_0))-(x(O_1)-x(O_0))/\text{abs}(x(O_2)-x(O_0))*\text{d}(M_0;M))$

Innerhalb eines Termobjektes können folgende Ausdrücke verwendet werden:

- "**x(P)**" und "**y(P)**" liefern die x- bzw. die y-Koordinate des Punktes P
- "**d(Obj1; Obj2)**" liefert den Abstand der Objekte Obj1 und Obj2.
- "**w(P1; P2; P3)**" liefert das Gradmaß des Winkels, der durch die drei Punkte P1, P2 und P3 festgelegt ist.

Weitere Möglichkeiten sind in der Hilfe von Euklid nachzulesen.