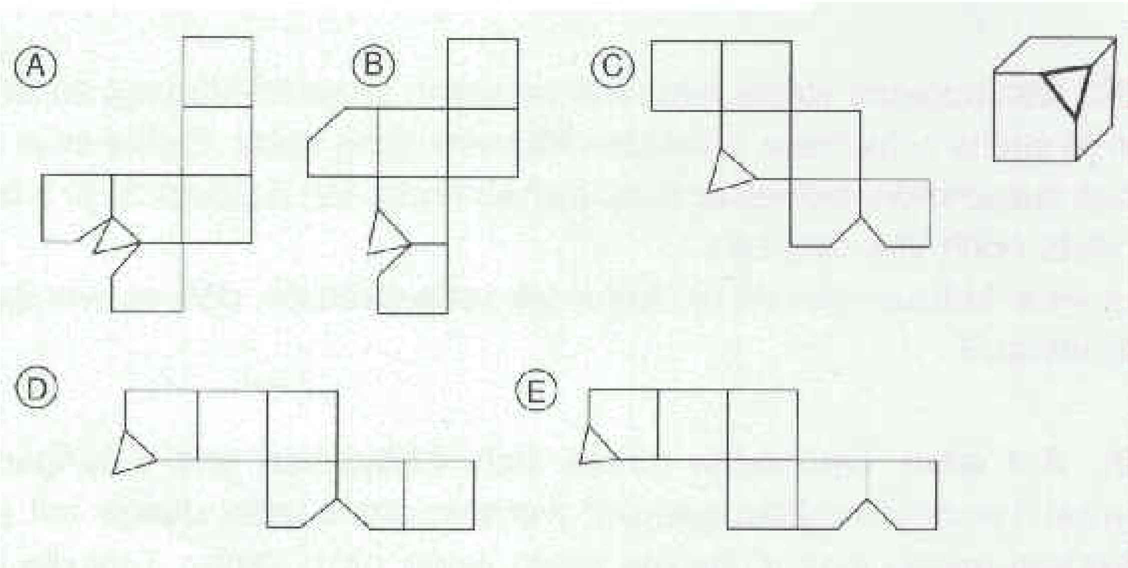
www.mathetreff.nrw.de /
www.mathe-treff.de /
www.mathetreff.org /
www.mathetreff.info

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.1

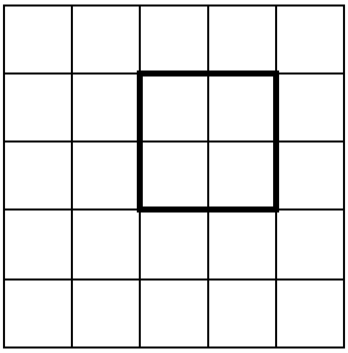
Von dem untenstehenden Würfel ist eine kleine Ecke abgeschnitten.
Welches der Netze gehört zu diesem verstümmelten?



Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.2

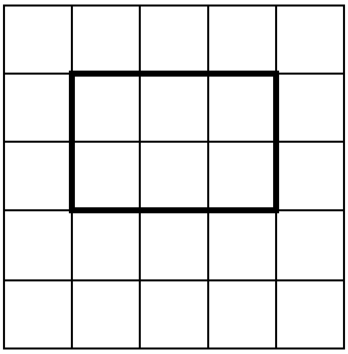
Wie viele Quadrate sind in der Figur enthalten?
(Ein Quadrat ist schon eingezeichnet)



Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.3

Wie viele Rechtecke sind in der Figur enthalten?
(Ein Rechteck ist schon eingezeichnet)



Rätselhafte Geometrie

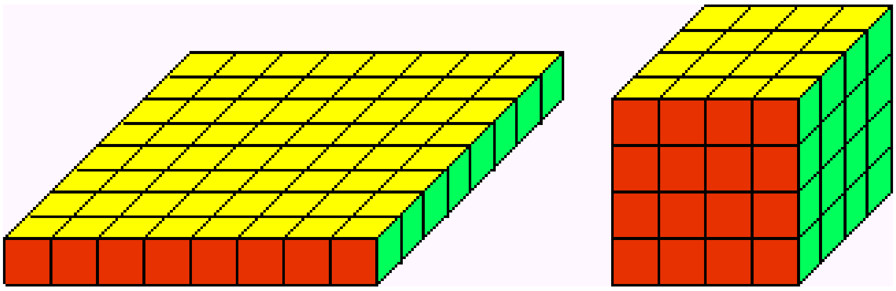
Blatt VII.4

Fred kann aus allen seinen Bausteinen einen Würfel legen. Wenn er alle seine Steine in einer Schicht hinlegt, erhält er ein Quadrat.

Wie viele Bausteine hat er?

Zu Weihnachten bekommt er weitere Bausteine geschenkt, so dass er jetzt mehr als 100 Stück hat. Auch jetzt gelingt es ihm wieder, sowohl ein Quadrat als auch einen Würfel zu legen.

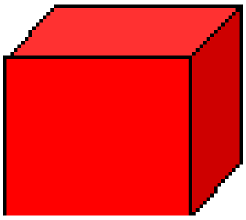
Wie viele Bausteine hat er mindestens?



Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.5

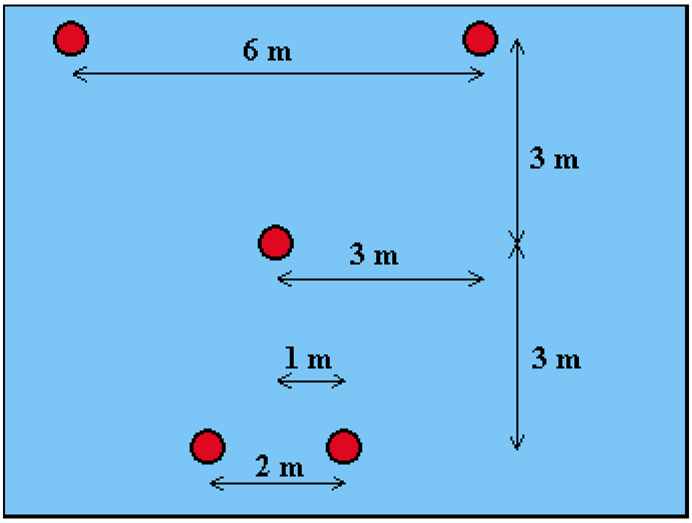
Ein rot gestrichener Holzwürfel von 2 (3, 4, 5, 7) dm Kantenlänge wird in dm-Würfel zersägt.
Wie viele Quadratflächen müssen neu gestrichen werden, wenn auch die neuen Würfel wieder rot sein sollen?



Kannst du Regelmäßigkeiten erkennen?

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.6



Im Wohnzimmer von Professor Wurzel stehen 5 Kerzen so verteilt, wie in der Abbildung dargestellt. Der Professor möchte sie alle anzünden. Da er nicht nur ein Sonderling, sondern auch noch sehr sparsam ist, will er möglichst mit einem Streichholz auskommen und sucht deshalb den kürzesten Weg, auf dem er alle Kerzen erreichen kann. Zwischen den Kerzen stehen keine Einrichtungsgegenstände wie Stühle oder Tische herum. Die hat Professor Wurzel vorher beiseite geräumt.

Kannst Du bei der Suche nach dem kürzesten Weg helfen?

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.7

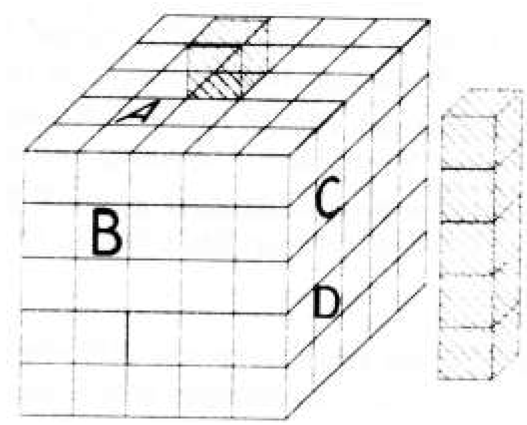
Stell dir vor, du hast von deiner Großmutter eine Wiese geerbt, die genau halbkreisförmig ist. Außerdem hast du eine Kuh (ein Schaf, egal was, Hauptsache, das Tier grast), drei Pflöcke, einen Ring, eine Schere und ein langes Seil geerbt.
Das Tier soll (natürlich!) die Wiese abgrasen. Die ganze Wiese und nichts als die Wiese. Und natürlich kannst du nicht die ganze Zeit aufpassen, dass es nicht aufs Nachbargrundstück geht.
Kannst du die Pflöcke so einschlagen und dein Tier so anleinen, dass es genau die halbkreisförmige Wiese, nicht mehr und nicht weniger, abgrasen kann.

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.8

Weihnachtsbäckerei

Eine bekannte Konditorei stellt zur Weihnachtszeit Weihnachtswürfel mit 5 cm Kantenlänge aus Dominosteinen her. Die Dominosteine sind genau 1 cm^3 große Würfelchen. Die Weihnachtswürfel werden nach Zusammenkleben der Dominosteine nochmals von außen mit einer Schicht aus Schokolade überzogen.



a. Aus Versehen wird an jeder Ecke eines Weihnachtswürfels ein 1cm^3 großer Dominostein vergessen. Um den Verkaufspreis kalkulieren zu können, möchte die Geschäftsleitung der Konditorei wissen, ob und um wie viel sich der Schokoladenüberzug außen und der Dominosteininhalt dieses Weihnachtswürfels von dem Originalwürfel unterscheidet.

b. Auf einen Weihnachtswürfel aus Dominosteinen werden 1 cm^3 große Dominosteine aufgeklebt.

1. Es wird ein Dominostein aufgeklebt. Wie viel mehr Schokoladenüberzug wird außen für einen solchen Würfel mit aufgeklebten Dominostein benötigt, d.h. um wie viel cm^2 vergrößert sich dadurch die Oberfläche?

2. Auf eine Seitenfläche des Weihnachtswürfels werden 4 Dominosteine so aufgeklebt, dass jeder Dominostein genau auf einem Feld liegt. Es gibt dafür verschiedene Möglichkeiten. Um wie viel cm^2 ist die Oberfläche des entstehenden Körpers jeweils größer als die des ursprünglichen Würfels?

Gib alle Möglichkeiten an.

c. Eine Maschine kann aus dem Weihnachtswürfel quadratische Säulen herausstanzen. An den Feldern A, B, C und D werden entsprechende Säulen herausgestanzt. Wie viel Dominosteine werden dabei insgesamt aus dem Würfel entfernt. Gib dein Ergebnis in cm^3 an.

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.9

Merkwürdige Würfelnetze

Auf den Seiten des Würfels (Bild 1) stehen die Zahlen 1 bis 6, so wie es den Würfelnetzen (Bild 2 und Bild 3) zu entnehmen ist.

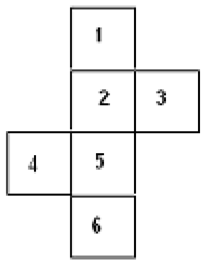


Bild 2

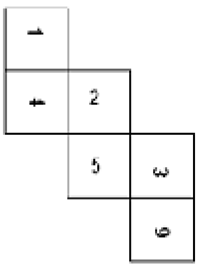


Bild 3

a. Die Zahlen, von denen eine bereits vorgegeben ist, sind so in die Felder der übrigen Würfelnetze einzutragen, dass es sich stets um ein Netz des Würfels aus Bild 1 handelt.

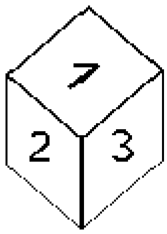
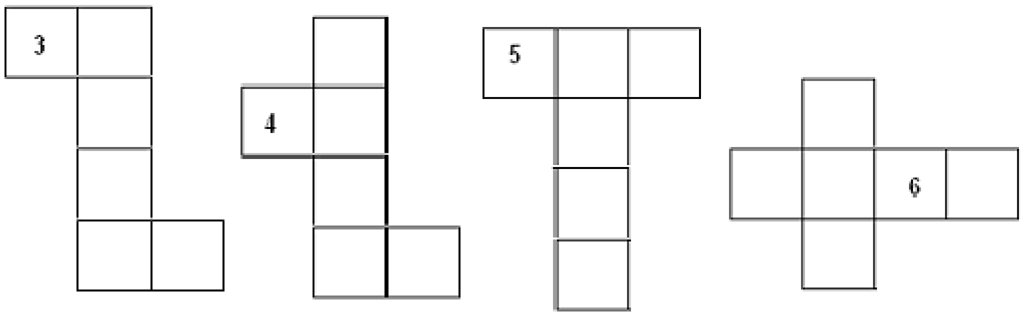


Bild 1

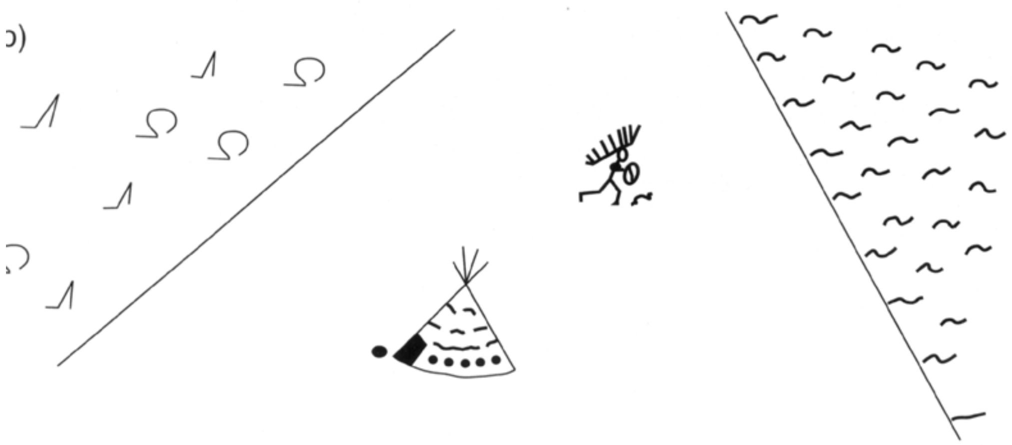


b. Bei Aufgabe a) siehst Du vier verschiedene Netze eines Würfelns. Findest Du noch weitere? Zeichne sie auf!

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.10

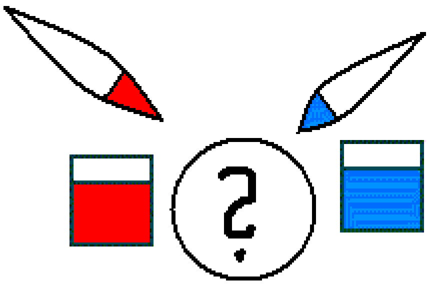
Häuptling "Schwarze Feder" will sich Kaffee zubereiten. Dazu muss er an den Fluss, um Wasser zu holen, an den Waldrand, um Brennholz zu sammeln und schließlich an seinen Lagerplatz zurück. Konstruiere oder beschreibe den kürzesten Weg für unseren Indianer.



Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.11

Ein Kreis soll zweifarbig ausgemalt werden. Dabei soll der Kreis in zwei gleichgroße Flächen aufgeteilt werden. Der Künstler hat allerdings nur einen Zirkel zur Verfügung und kein Lineal oder dergleichen, um die Begrenzung der zwei Flächen des Kreises zu ermitteln. Nach langer Überlegung findet er eine Lösung. Wie hat der Künstler diese gefunden? Zeichne die Lösung auf und mache eine kurze Konstruktionsbeschreibung! Gibt es vielleicht nur eine Lösung?



Rätselhafte Geometrie

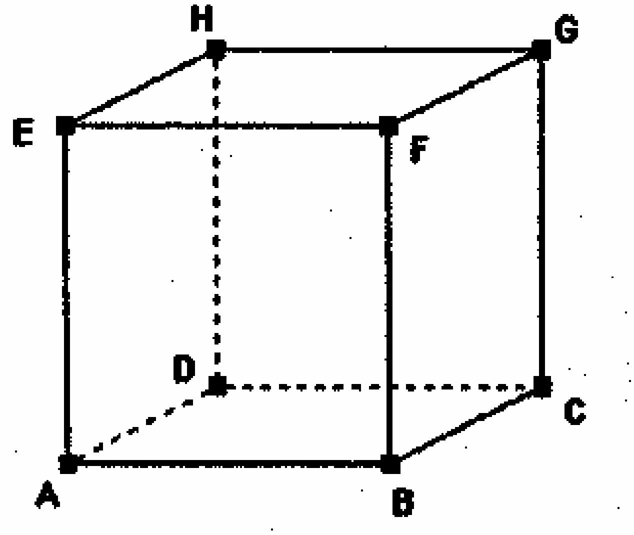
Blatt VII.12

Ein Würfel mit den Bezeichnungen A, B, C, ... H für die Eckpunkte liege auf der Grundfläche mit den Eckpunkten A, B, C, D. Der Würfel soll auf der Ebene nur über seine Kanten gekippt werden.

a) Wie oft muss der Würfel mindestens gekippt werden, bis er über alle vier Kanten der Grundfläche gekippt worden ist?

b) Wie sehen die Wege aus, die die Eckpunkte der Grundfläche ausführen, wenn eine Folge von Kippbewegungen aus Teil a) durchgeführt wird? Vergleiche die Weglängen durch Zeichnung bzw. Berechnung.

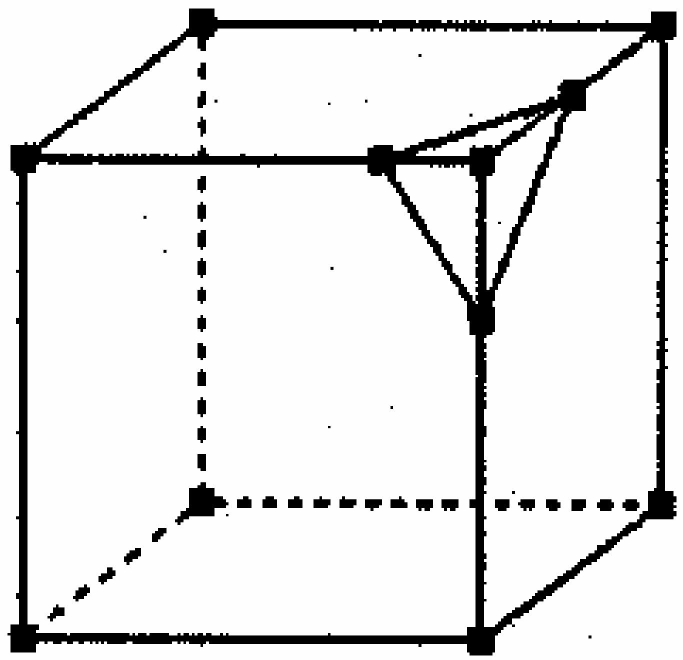
c) Beziehe in den Vergleich auch den Weg und die Weglänge des Würfelmittelpunktes mit ein.



Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.13

Ein Würfel wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt. Dies ist auf verschiedene Arten möglich. Die Abbildung zeigt eine Zerlegung in zwei Teilkörper, bei der die Eckenzahl der Teilkörper um 6 größer ist als die Eckenzahl des Würfels. Um wie viel ist die Eckenzahl der Teilkörper mindestens, um wie viel höchsten höher als die Eckenzahl des Würfels? Sind alle Zwischenwerte zwischen dem Mindest- und dem Höchstwert möglich?



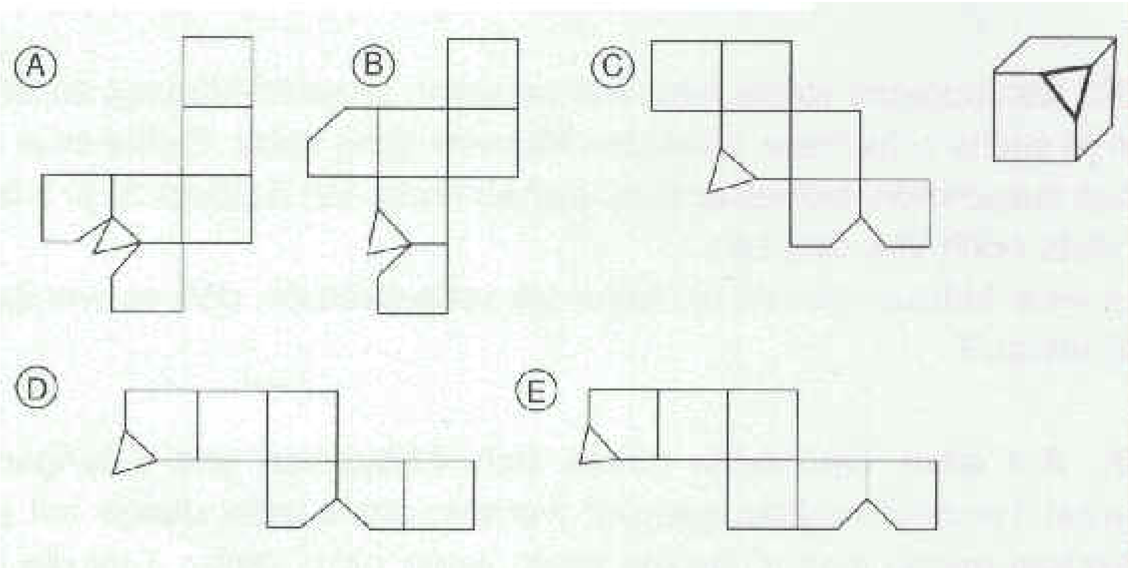
**www.mathetreff.nrw.de /
www.mathe-treff.de /
www.mathetreff.org /
www.mathetreff.info**

Lösungen

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.1 Lösung

Von dem untenstehenden Würfel ist eine kleine Ecke abgeschnitten.
Welches der Netze gehört zu diesem verstümmelten?



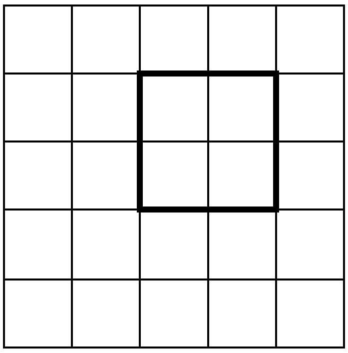
Lösung:

Netz D

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.2 Lösung

Wie viele Quadrate sind in der Figur enthalten?
(Ein Quadrat ist schon eingezeichnet)



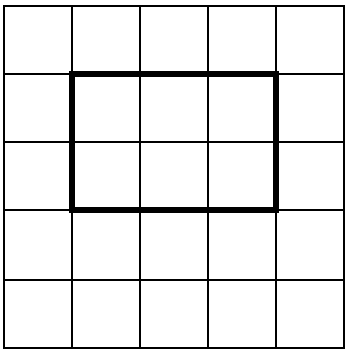
Lösung:

In der Figur kommen fünf verschiedene Quadratgrößen vor:
Es gibt 1x1-Quadrate, davon gibt es 25 Stück
Es gibt 2x2-Quadrate. Legt man ein solches Quadrat in die linke obere Ecke, kann man es auf drei weitere Positionen nach rechts verschieben. Also gibt es am oberen Rand insgesamt vier verschiedene Positionen für ein 2x2-Quadrat. Man kann es aber auch auf drei weitere Positionen nach unten verschieben. Also gibt es insgesamt 16 2x2-Quadrate in der Figur.
Es gibt 3x3-Quadrate, davon gibt es (mit der gleichen Begründung) 9 Stück.
Es gibt 4x4-Quadrate. Davon gibt es 4 Stück.
Schließlich gibt es noch ein 5x5-Quadrat.
Insgesamt gibt es 25 + 16 + 9 + 4 +1 = 55 Quadrate in der Figur.

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.3 Lösung

Wie viele Rechtecke sind in der Figur enthalten?
(Ein Rechteck ist schon eingezeichnet)



Lösung:

Es gibt verschiedene Rechteckgrößen in dieser Figur:
1x1-Rechtecke, 1x2-Rechtecke, 1x3-Rechtecke, 1x4-Rechtecke, 1x5-Rechtecke,
2x1- Rechtecke, 2x2-Rechtecke, ... 2x5-Rechtecke,
.
.
.
5x1-Rechtecke, ... 5x5-Rechtecke
Das in der Aufgabenstellung eingezeichnete Rechteck ist ein 2x3-Rechteck.
Zu jeder Rechtecksorte muß die Anzahl bestimmt werden.
Als Beispiel wird das 2x3-Rechteck ausführlich betrachtet. Zeichnet man es in die linke obere Ecke der Figur ein, so kann man es noch auf zwei andere Positionen nach rechts und auf drei andere Positionen nach unten verschieben. Insgesamt gibt es von dieser Rechteckssorte also 12 Stück in der Figur.
Mit der gleichen Methode werden die Anzahlen der anderen Rechtecke untersucht, wobei man sich die Arbeit erleichtern kann, wenn man berücksichtigt, daß es natürlich genau so viele 3x2-Rechtecke wie 2x3-Rechtecke gibt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle zusammengestellt.

Rechtecksorte	1x1	1x2	1x3	1x4	1x5	2x2	2x3	2x4	2x5	3x3	3x4	3x5	4x4	4x5	5x5
Anzahl	25	20	15	10	5	16	12	8	4	9	6	3	4	2	1

Insgesamt gibt es als 225 Rechtecke in der Figur.

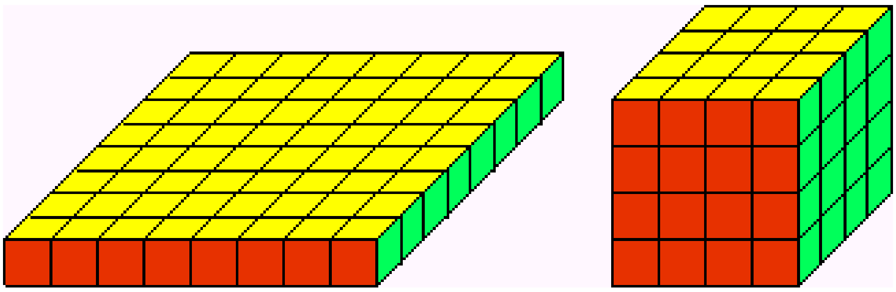
Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.4 Lösung

Fred kann aus allen seinen Bausteinen einen Würfel legen. Wenn er alle seine Steine in einer Schicht hinlegt, erhält er ein Quadrat.

Wie viele Bausteine hat er?

Zu Weihnachten bekommt er weitere Bausteine geschenkt, so dass er jetzt mehr als 100 Stück hat. Auch jetzt gelingt es ihm wieder, sowohl ein Quadrat als auch einen Würfel zu legen. Wie viele Bausteine hat er mindestens?



Lösung:

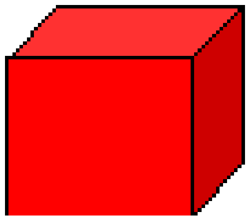
a. Die Zahl der Würfel kann aus der Quadratfigur berechnet werden: $8 \cdot 8 = 64$. Sie kann auch aus der Würfelfigur berechnet werden: $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

b. Es wird einfach ausprobiert:
Wenn der Würfel an jeder Kante 5 Steine hätte, hätte Fred insgesamt 125 Steine. 125 Steine kann man aber nicht als Quadrat legen, denn $11 \cdot 11 = 121$ und $12 \cdot 12 = 144$.
Wenn der Würfel an jeder Kante 6 Steine hätte, hätte Fred insgesamt 216 Steine. Aber auch daraus kann man kein Quadrat legen.
Mit einem Würfel, der an jeder Kante 7 Steine oder 8 Steine hat, ist es genau so.
Wenn an jeder Kante 9 Steine wären, hätte Fred 729 Steine. Daraus kann er ein Quadrat mit 27 Steinen an jeder Seite legen.
Fred hat also mindesten 729 Steine.

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.5 Lösung

Ein rot gestrichener Holzwürfel von 2 (3, 4, 5, 7) dm Kantenlänge wird in dm-Würfel zersägt.
Wie viele Quadratflächen müssen neu gestrichen werden, wenn auch die neuen Würfel wieder rot sein sollen?



Kannst du Regelmäßigkeiten erkennen?

Lösung:

Hier gibt es mehrere Lösungsansätze. Der leichteste und damit wohl auch verständlichste scheint mir folgender zu sein:
Du bestimmst die Gesamtzahl aller Quadratflächen und subtrahierst hiervon die Anzahl der bereits eingefärbten Quadratflächen.

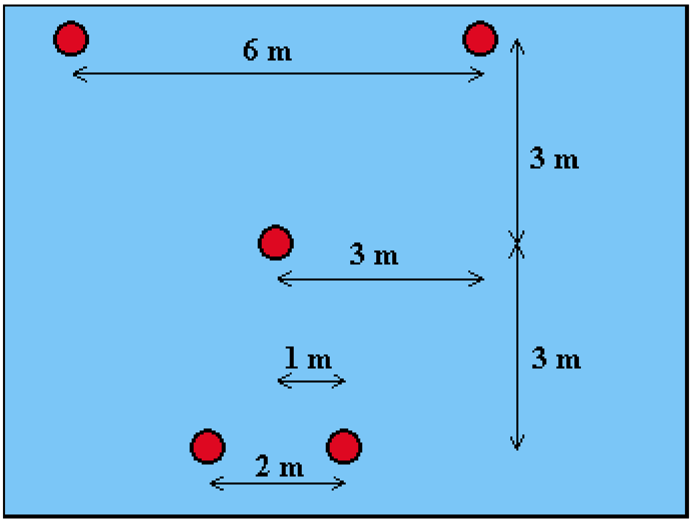
a. Für k=2 müssen 24 Flächen neu gestrichen werden.
Für k=3 müssen 108 Flächen neu gestrichen werden.
Für k=4 müssen 288 Flächen neu gestrichen werden.
Für k=5 müssen 600 Flächen neu gestrichen werden.
Für k=7 müssen 1764 Flächen neu gestrichen werden.

b. Die Regelmäßigkeit lässt sich auch als Formel ausdrücken:

$$2(3,4,5,7)^3 \cdot 6 - \left[2(3,4,5,7)^2 \cdot 6\right]$$

Rätselhafte Geometrie

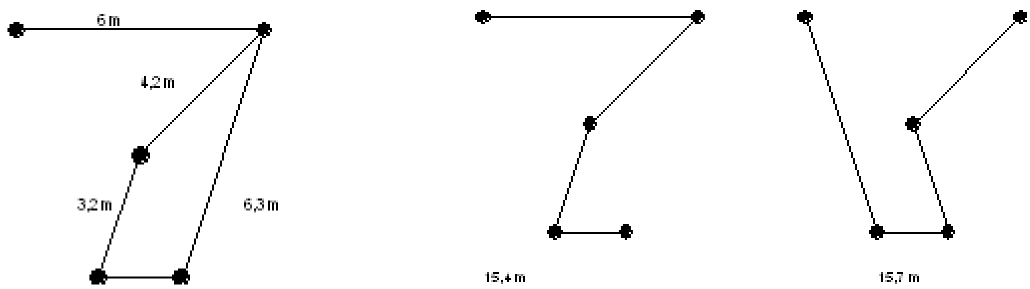
Blatt VII.6 Lösung



Im Wohnzimmer von Professor Wurzel stehen 5 Kerzen so verteilt, wie in der Abbildung dargestellt. Der Professor möchte sie alle anzünden. Da er nicht nur ein Sonderling, sondern auch noch sehr sparsam ist, will er möglichst mit einem Streichholz auskommen und sucht deshalb den kürzesten Weg, auf dem er alle Kerzen erreichen kann. Zwischen den Kerzen stehen keine Einrichtungsgegenstände wie Stühle oder Tische herum. Die hat Professor Wurzel vorher beiseite geräumt.
Kannst Du bei der Suche nach dem kürzesten Weg helfen?

Lösung:

Die Kerzen werden in ein Bild gezeichnet, sodass 1 m durch 1 cm dargestellt wird. Dann können die Abstände zwischen je zwei Kerzen gemessen werden:



Probiert man nun alle Wege aus, findet man zwei besonders kurze Wege.

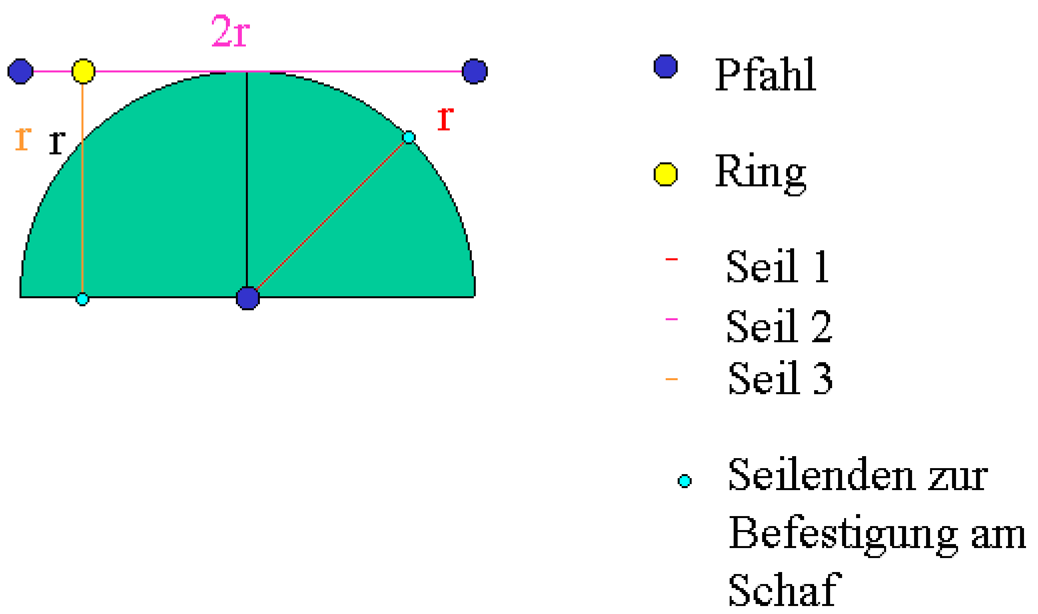
Der links dargestellte Weg ist noch ein bisschen kürzer.

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.7 Lösung

Stell dir vor, du hast von deiner Großmutter eine Wiese geerbt, die genau halbkreisförmig ist. Außerdem hast du eine Kuh (ein Schaf, egal was, Hauptsache, das Tier grast), drei Pflöcke, einen Ring, eine Schere und ein langes Seil geerbt.
Das Tier soll (natürlich!) die Wiese abgrasen. Die ganze Wiese und nichts als die Wiese. Und natürlich kannst du nicht die ganze Zeit aufpassen, dass es nicht aufs Nachbargrundstück geht.
Kannst du die Pflöcke so einschlagen und dein Tier so anleinen, dass es genau die halbkreisförmige Wiese, nicht mehr und nicht weniger, abgrasen kann.

Lösung:



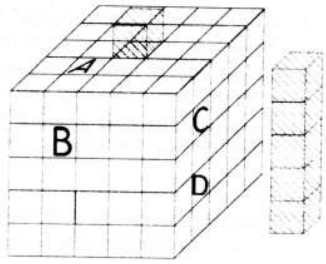
Die eine Hälfte hast du bestimmt sofort gewusst: Du steckst einen Pflock beim Mittelpunkt des Halbkreises ein und bindest das Tier mit einem Seil mit entsprechender Länge daran fest. Dann kann es jedenfalls an der runden Seite nicht über den Halbkreis hinaus. Auf der geraden Seite hat es aber noch viel Auslauf. Wie kannst du das verhindern? Dazu musst du über den Halbkreis hinausdenken. Du musst dir ein Rechteck denken, in das der Halbkreis genau hineinpasst. An den beiden neuen Ecken (auf dem Grundstück des freundlichen Nachbarn) schlägst du je einen Pfosten ein und verbindest die beiden durch ein straff gespanntes Seil. Bevor du dieses Seil an den Pfosten befestigst, gibst du den Ring auf das Seil. An diesem Ring befestigst du jetzt noch ein Seil, das so lang ist wie der Radius des Halbkreises und machst am anderen Ende dein Tier fest.

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.8 Lösung

Weihnachtsbäckerei

Eine bekannte Konditorei stellt zur Weihnachtszeit Weihnachtswürfel mit 5 cm Kantenlänge aus Dominosteinen her. Die Dominosteine sind genau 1 cm^3 große Würfelchen. Die Weihnachtswürfel werden nach Zusammenkleben der Dominosteine nochmals von außen mit einer Schicht aus Schokolade überzogen.



a. Aus Versehen wird an jeder Ecke eines Weihnachtswürfels ein $1cm^3$ großer Dominostein vergessen. Um den Verkaufspreis kalkulieren zu können, möchte die Geschäftsleitung der Konditorei wissen, ob und um wie viel sich der Schokoladenüberzug außen und der Dominosteininhalt dieses Weihnachtswürfels von dem Originalwürfel unterscheidet.

b. Auf einen Weihnachtswürfel aus Dominosteinen werden 1 cm^3 große Dominosteine aufgeklebt.

1. Es wird ein Dominostein aufgeklebt. Wie viel mehr Schokoladenüberzug wird außen für einen solchen Würfel mit aufgeklebten Dominostein benötigt, d.h. um wie viel cm^2 vergrößert sich dadurch die Oberfläche?

2. Auf eine Seitenfläche des Weihnachtswürfels werden 4 Dominosteine so aufgeklebt, dass jeder Dominostein genau auf einem Feld liegt. Es gibt dafür verschiedene Möglichkeiten. Um wie viel cm^2 ist die Oberfläche des entstehenden Körpers jeweils größer als die des ursprünglichen Würfels?

Gib alle Möglichkeiten an.

c. Eine Maschine kann aus dem Weihnachtswürfel quadratische Säulen herausstanzen. An den Feldern A, B, C und D werden entsprechende Säulen herausgestanzt. Wie viel Dominosteine werden dabei insgesamt aus dem Würfel entfernt. Gib dein Ergebnis in cm^3 an.

Lösung:

a.

Ein Eckwürfel braucht 3 cm² Schokoüberzug. Nach Entfernen des Eckwürfels werden 3 Flächen mit je 1 cm² freigelegt. Man braucht also gleich viel Überzug.

Ein Würfel hat 8 Ecken, also sind es 8 Dominosteine weniger. Vorher waren es 5*5*5 = 125 Dominosteine, jetzt also nur noch 125-8 = 117 Dominosteine oder 117 cm³.

b 1.

Die Oberfläche vergrößert sich nur um 4 cm², weil die Unterseite des Dominosteins aufgeklebt wird. Auch die Fläche des großen Würfels, auf die der Dominostein aufgeklebt wird, muss nicht mehr beschichtet werden. Die Oberfläche vergrößert sich also nur um die Seitenfläche des aufgeklebten Würfels, und die Berührungsfläche verbraucht 2 cm².

b 2.

4 Dominosteine ohne gemeinsame Flächen: 16 cm²

2 Dominosteine mit einer gemeinsamen Fläche und 2 Dominosteine ohne gemeinsame Fläche: 14 cm²

3 Dominosteine mit 2 gemeinsamen Flächen und ein einzelner D. : 12 cm²

oder je 2 Dominosteine mit je einer gemeinsamen Fläche: 12 cm²

4 D. in einer Reihe oder über Eck mit je drei gemeinsamen Flächen: 10 cm²

4 D. mit 4 gemeinsamen Flächen: 8 cm².

c.

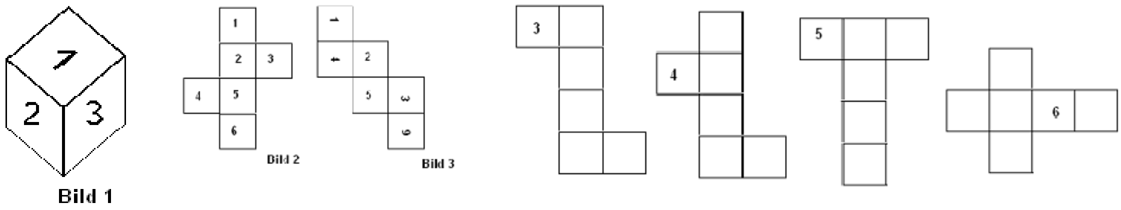
Die Maschine stanzt 17 cm³ oder 17 Dominosteine heraus. Bei A werden 5 Dominosteine, bei B, C und D nur 4 D. entfernt, weil der Stich durch die A-Säule geht.

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.9 Lösung

Merkwürdige Würfelnetze

Auf den Seiten des Würfels (Bild 1) stehen die Zahlen 1 bis 6, so wie es den Würfelnetzen (Bild 2 und Bild 3) zu entnehmen ist.

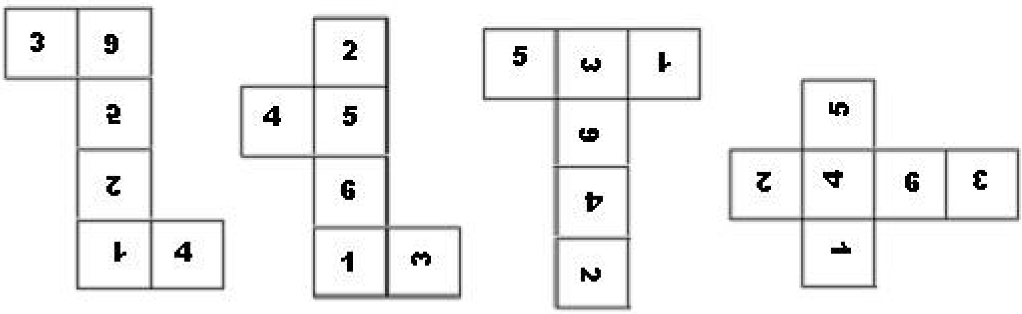


a. Die Zahlen, von denen eine bereits vorgegeben ist, sind so in die Felder der übrigen Würfelnetze einzutragen, dass es sich stets um ein Netz des Würfels aus Bild 1 handelt.

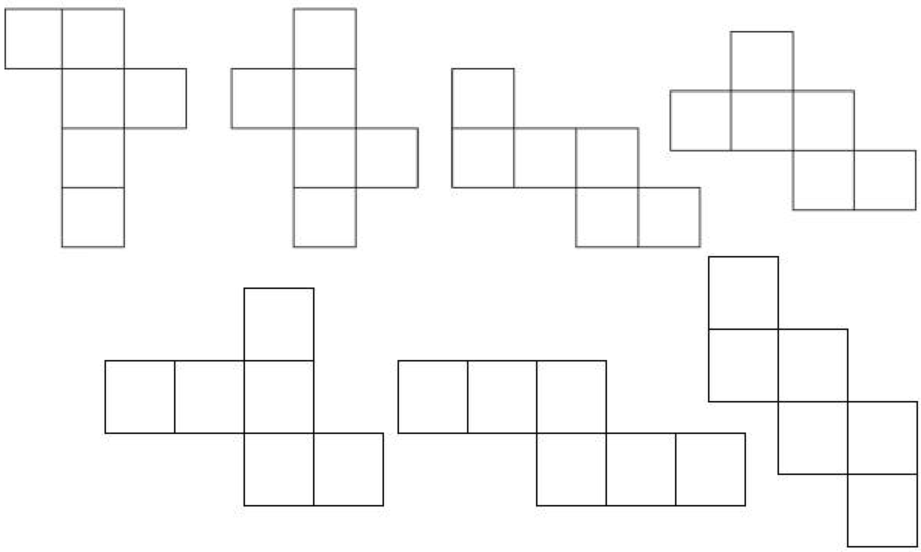
b. Bei Aufgabe a) siehst Du vier verschiedene Netze eines Würfelns. Findest Du noch weitere? Zeichne sie auf!

Lösung:

a) Die Netze müssen so aussehen:



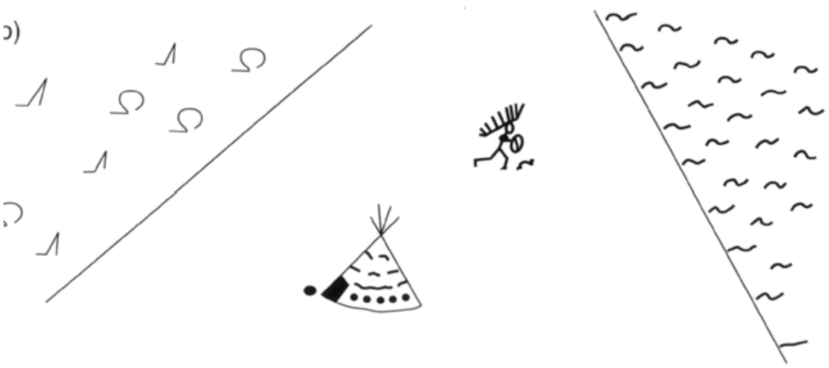
b) Es gibt insgesamt 11 mögliche Würfelnetze. Zu den obigen 4 kommen noch folgende 7 Netze dazu:



Rätselhafte Geometrie

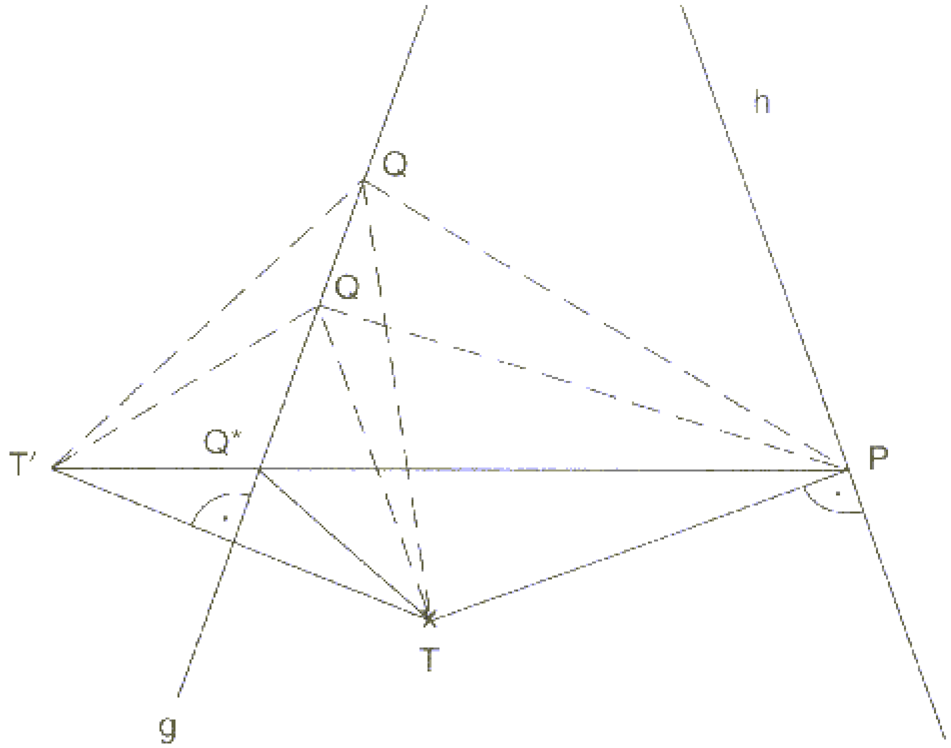
Blatt VII.10 Lösung

Häuptling "Schwarze Feder" will sich Kaffee zubereiten. Dazu muss er an den Fluss, um Wasser zu holen, an den Waldrand, um Brennholz zu sammeln und schließlich an seinen Lagerplatz zurück. Konstruiere oder beschreibe den kürzesten Weg für unseren Indianer.



Lösung:

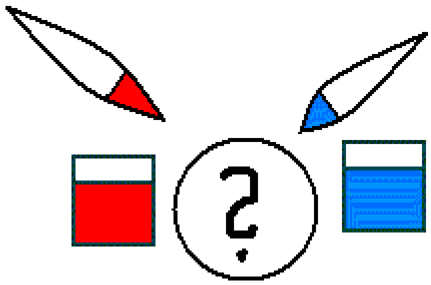
Der kürzeste Weg vom Tipi T zum Ufer ist das TP von T auf h. Der kürzeste Weg von P über den Waldrand nach T führt nur über den Schnittpunkt Q* der Strecke PT` mit g. Dabei ist T` der achsengespiegelte Punkt von T an g. Die Strecke PQ*T hat die selbe Länge wie T`P. Die Strecke T`P ist gerade, somit die kürzeste Verbindung. Da T`Q* genau so lang ist wie Q*T, gilt dann aber auch: Q* ist der gesuchte Punkt am Waldrand und PQ*T der gesuchte Weg.



Rätselhafte Geometrie

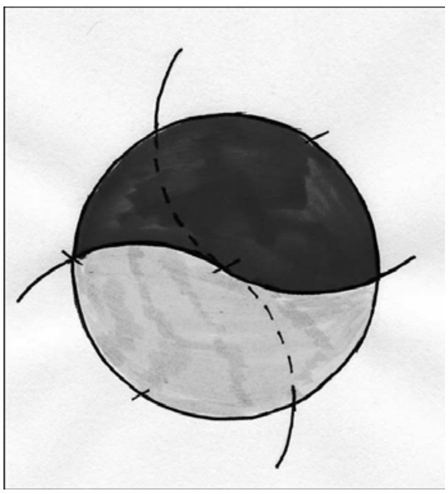
Blatt VII.11 Lösung

Ein Kreis soll zweifarbig ausgemalt werden. Dabei soll der Kreis in zwei gleichgroße Flächen aufgeteilt werden. Der Künstler hat allerdings nur einen Zirkel zur Verfügung und kein Lineal oder dergleichen, um die Begrenzung der zwei Flächen des Kreises zu ermitteln. Nach langer Überlegung findet er eine Lösung. Wie hat der Künstler diese gefunden? Zeichne die Lösung auf und mache eine kurze Konstruktionsbeschreibung! Gibt es vielleicht nur eine Lösung?



Lösung:

Eine mögliche Lösung ist im nebenstehenden Bild zu erkennen.
Man zeichnet zuerst einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Anschließend trägt man den Radius r auf der Kreislinie sechsmal ab und erhält die Punkte A, B, C, D, E, F. Um z.B. A und D werden jeweils mit dem Radius r zwei Kreise k_1 und k_2 gezeichnet.
Nun ist der ursprüngliche Kreis in vier Flächen aufgeteilt, wobei die beiden sich jeweils gegenüberliegenden Flächen kongruent sind.
Je zwei nebeneinander liegende Felder zusammengenommen ergeben eine Kreishälfte.
Dies ist eine Lösung der Aufgabe.



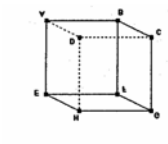
Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.12 Lösung

Ein Würfel mit den Bezeichnungen A, B, C, ... H für die Eckpunkte liege auf der Grundfläche mit den Eckpunkten A, B, C, D. Der Würfel soll auf der Ebene nur über seine Kanten gekippt werden.

a) Wie oft muss der Würfel mindestens gekippt werden, bis er über alle vier Kanten der Grundfläche gekippt worden ist?

b) Wie sehen die Wege aus, die die Eckpunkte der Grundfläche ausführen, wenn eine Folge von Kippbewegungen aus Teil a) durchgeführt wird? Vergleiche die Weglängen durch Zeichnung bzw. Berechnung.



c) Beziehe in den Vergleich auch den Weg und die Weglänge des Würfelmittelpunktes mit ein.

Lösung:

a) Er muss 6 Mal gekippt werden, und zwar über die Kanten AB, BF, BC, CD, DH und DA.

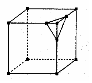
b) und c).

	A	B	C	D	M
AB	Kein Weg	Kein Weg	Viertelkreis mit r = a	Viertelkreis mit r = a	Viertelkreis mit $r = \sqrt{2} \cdot a$
BF	Viertelkreis mit r = a	Kein Weg	Viertelkreis mit r = a	Viertelkreis mit r = a	Viertelkreis mit $r = \sqrt{2} \cdot a$
BC	Viertelkreis mit r = a	Kein Weg	Kein Weg	Viertelkreis mit r = a	Viertelkreis mit $r = \sqrt{2} \cdot a$
CD	Viertelkreis mit r = a	Viertelkreis mit r = a	Kein Weg	Kein Weg	Viertelkreis mit $r = \sqrt{2} \cdot a$
DH	Viertelkreis mit r = a	Viertelkreis mit r = a	Viertelkreis mit r = a	Kein Weg	Viertelkreis mit $r = \sqrt{2} \cdot a$
DA	Kein Weg	Viertelkreis mit r = a	Viertelkreis mit r = a	Kein Weg	Viertelkreis mit $r = \sqrt{2} \cdot a$
	Kreis mit r = a	¾ Kreis mit r = a	Kreis mit r = a	¾ Kreis mit r = a	

Rätselhafte Geometrie

Blatt VII.13 Lösung

Ein Würfel wird durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt. Dies ist auf verschiedene Arten möglich. Die Abbildung zeigt eine Zerlegung in zwei Teilkörper, bei der die Eckenzahl der Teilkörper um 6 größer ist als die Eckenzahl des Würfels. Um wie viel ist die Eckenzahl der Teilkörper mindestens, um wie viel höchsten höher als die Eckenzahl des Würfels? Sind alle Zwischenwerte zwischen dem Mindest- und dem Höchstwert möglich?



Lösung:

Wenn der Schnitt durch eine Kante des Würfels geht, erhöht sich an dieser Stelle die Eckenzahl um 2. Geht der Schnitt aber durch eine Würfelecke, erhöht sich die Eckenzahl nur um 1, da die entstehenden Teilkörper dort zwar zwei Ecken haben, eine Ecke des Würfels durch den Schnitt aber zerstört wird.

Wenn die Schnittebene nur eine oder zwei Ecken und keine Kante des Würfels trifft, entstehen keine zwei Teilkörper. Daher müssen mindestens 3 Ecken getroffen werden, und die Eckenzahl erhöht sich um 3.

Durch Veränderung der Lage der Schnittebene kann man versuchen, die Anzahl der neu entstehenden Kanten zu erhöhen. Jede der 6 Begrenzungsebenen des Würfels kann durch die Schnittebene aber höchstens einmal getroffen werden. Daher kann die Schnittfläche höchsten ein Sechseck sein, das den Würfel in 6 Kanten schneidet. Damit kann sich die Eckenzahl höchstens um 12 erhöhen.

In der Abbildung sind die Extremwerte und alle möglichen Zwischenwerte dargestellt. In einigen Fällen gibt es auch andere Möglichkeiten, die Schnittebene zu legen, um die gewünschte Erhöhung zu erhalten.

Es fällt auf, daß eine Erhöhung um 11 nicht dargestellt ist. Es wird bewiesen, dass sie nicht möglich ist.

Wenn sich die Eckenzahl nämlich um 11 erhöhen würde, müsste der Schnitt durch eine Würfelecke gehen, da 11 ungerade ist. An dieser Würfelecke treffen 3 Würfelflächen zusammen. Die Schnittebene kann höchstens zwei dieser Würfelflächen schneiden, die dritte wird nur im Eckpunkt getroffen. Nun bleiben noch drei Würfelflächen übrig, die von der Schnittebene getroffen werden können. Damit kann die Schnittfläche aber höchstens ein Fünfeck sein. Da eine der Ecken des Fünfecks bereits in einer Würfelecke liegt, können höchstens 4 Würfelkanten geschnitten werden, und die Eckenzahl erhöht sich höchstens um 9.