1+2=3

mathématiques sans frontières

Regierungspräsidium Freiburg

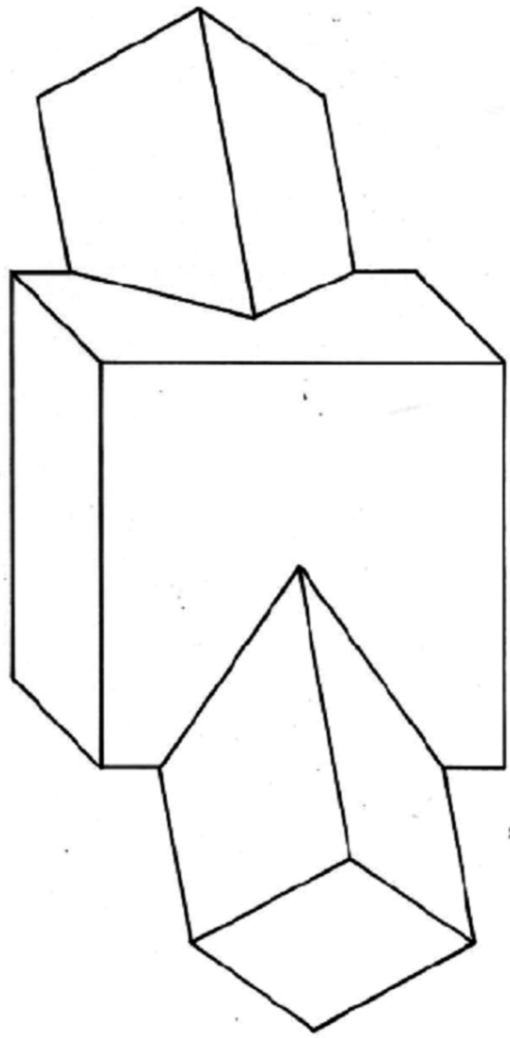
http://www.hfg.og.bw.schule.de/pages_kli/mog/seiten/index.html

Rätselhafte Geometrie

Blatt I.1

Piercing

Ein Würfel wurde so durchbohrt, dass ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche passgenau hindurch gesteckt werden kann. Dabei gehen zwei sich gegenüber liegende Kanten des Prismas jeweils durch die Mittelpunkte benachbarter Würfelflächen. Die beiden anderen Kanten des Prismas schneiden zwei sich gegenüber liegende Würfelkanten (siehe Abbildung).



Zeichnet ein Schrägbild des durchbohrten Würfels, nachdem das Prisma entfernt wurde. Sichtbare Kanten sollen durchgezogen und unsichtbare Kanten gestrichelt werden.

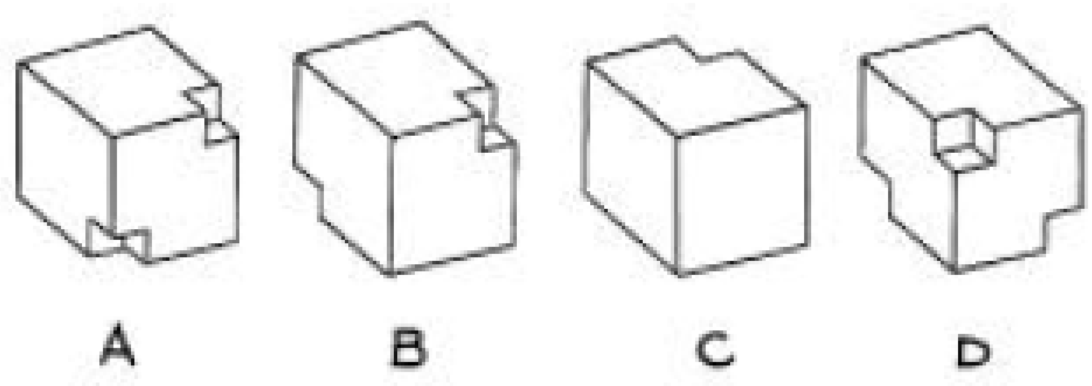
Rätselhafte Geometrie

Blatt I.1

Um die Ecke gedacht

Die Zeichnungen stellen vier Holzwürfel dar, bei denen jeweils Ecken ausgefräst worden sind.

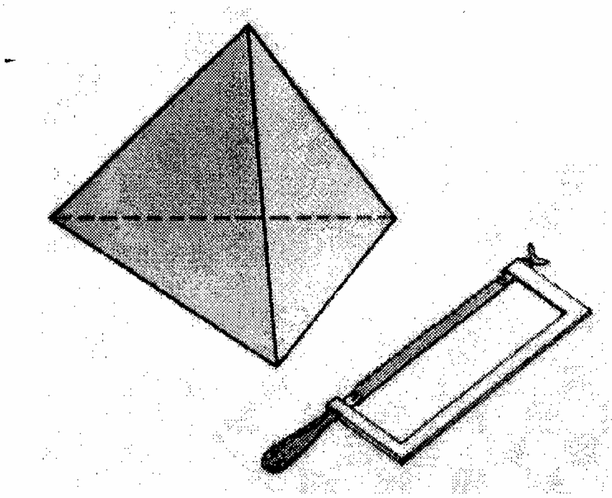
Nur zwei dieser Würfel sind identisch.
Welche sind es? Begründe.



Rätselhafte Geometrie

Blatt I.3

Was bleibt?



Die vier Ecken eines regelmäßigen Tetraeders sollen so abgesägt werden, dass aus den vier Seitenflächen des Tetraeders jeweils ein regelmäßiges Sechseck entsteht.

Zeichne das Netz dieses Restkörpers auf und färbe parallele Seitenflächen des Körpers mit der gleichen Farbe.

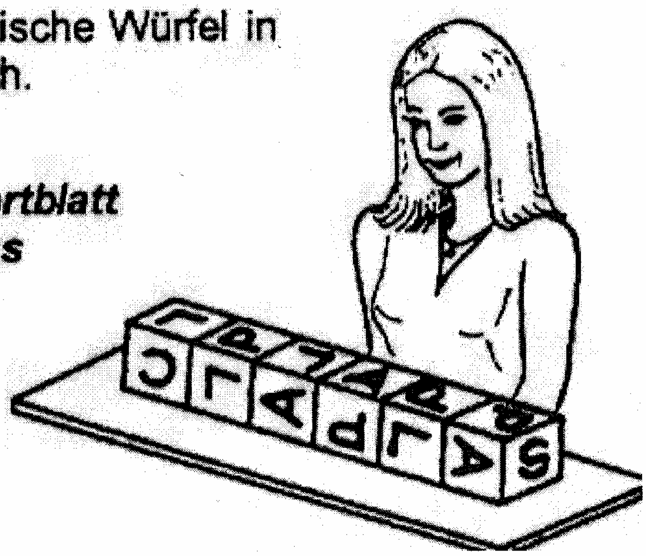
Rätselhafte Geometrie

Blatt I.4

Ansichtssache

Etienne legt sechs identische Würfel in einer Reihe auf den Tisch.

Zeichne auf das Antwortblatt die Rückseite der sechs abgebildeten Würfel, so wie Barbara sie sieht.

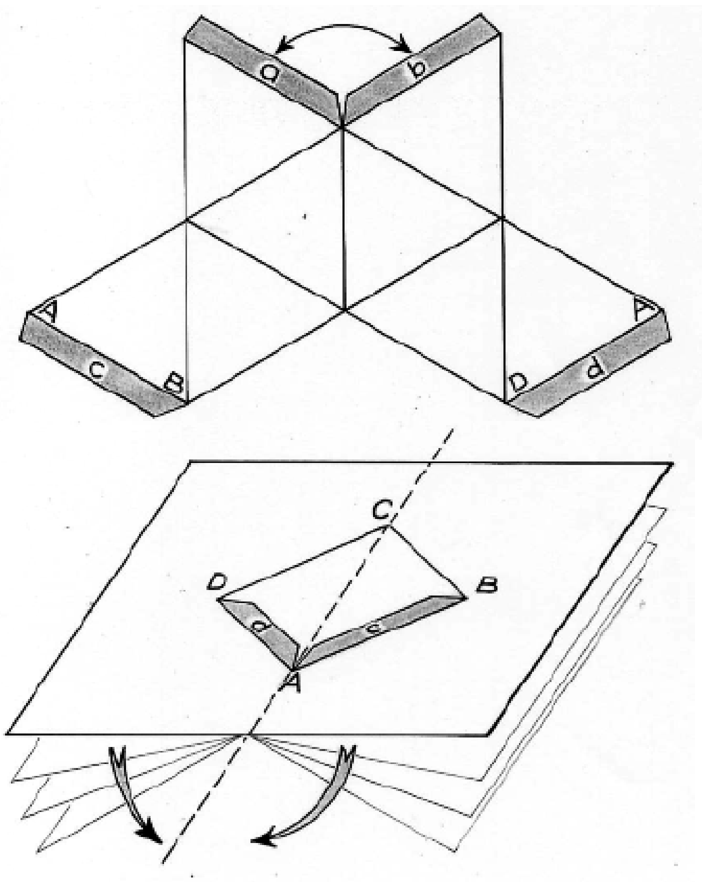


Rätselhafte Geometrie

Blatt I.5

Hier ist eine originelle Methode zur Herstellung eines Körpers:

Zeichnet das abgebildete Netz in wahrer Größe. Es besteht aus acht gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 5 cm und den vier Laschen a, b, c, d.



Schneidet euer Netz aus, knickt alle Kanten und klebt die Laschen a und b zusammen.

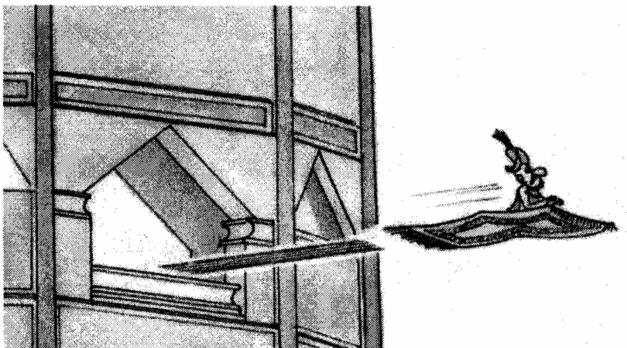
Zeichnet auf das Antwortblatt ein Quadrat ABCD mit 5 cm Seitenlänge und knickt das Blatt entlang der Diagonalen AC.

Klebt nun die Laschen c und d des Netzes so auf das Blatt, dass die Strecken AB und AD des Netzes auf den Seiten AB und AD des Quadrates liegen.

Faltet nun das Blatt entlang AC so zusammen, dass das Netz außen bleibt. Der Körper richtet sich nun auf der Knickkante auf

Rätselhafte Geometrie

Blatt I.6



Ineinander

Der persische Mathematiker Abu al-Wafâ (940-988 n. Chr.) stellte das folgende geometrische Problem:

Konstruiere zu einem Quadrat mit gegebener Seitenlänge ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Ecke mit einer Ecke des Quadrats zusammenfällt. Die beiden anderen Ecken des Dreiecks sollen jeweils auf einer Seite des Quadrats liegen.

Konstruiere das Dreieck von Abu al-Wafâ nur Zirkel und Lineal für ein Quadrat der Seitenlänge 8 cm. Beschreibe die Konstruktion und weise nach, dass das Dreieck gleichseitig ist.

Rätselhafte Geometrie

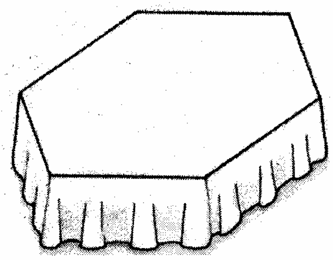
Blatt I.7

Tischrücken

Im Festsaal eines Dorfes stehen acht gleiche, viereckige Tische. Thomas stellt sie lückenlos zusammen, so dass sich eine große Tafel in Form eines regelmäßigen Sechsecks mit 2 m Seitenlänge ergibt.

„Der Platz wird nie für alle reichen!" protestiert Anja und beginnt auch schon die Tische umzustellen. Sie gruppiert sie ohne Zwischenraum zu einem Viereck mit 26 m Umfang.

Zeichne die Anordnung von Thomas und die von Anja im Maßstab 1:50.



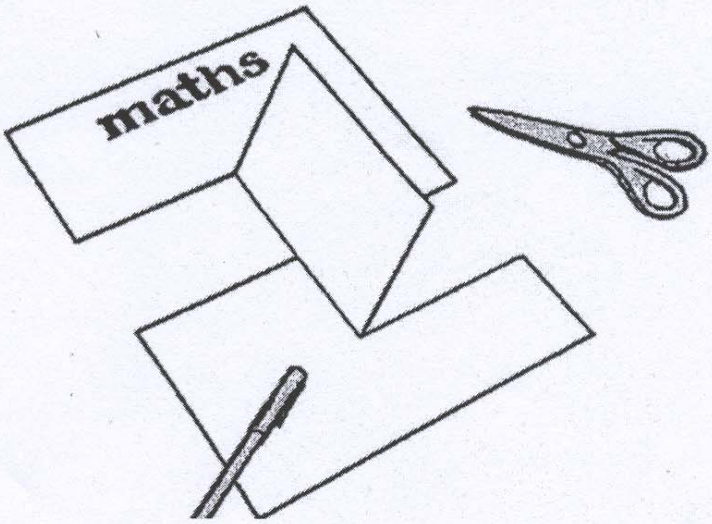
Rätselhafte Geometrie

Blatt I.8

Monumento

Michel findet auf Mariannes Schreibtisch ein Blatt Papier. Es ist eingeschnitten und auf verblüffendende Art gefaltet, ohne an irgend einer Stelle geklebt zu sein.

Schneide das Antwortblatt ein und falte es so, dass es wie auf der Abbildung aussieht.
Achtung: Das Blatt muss aus einem Stück bestehen!

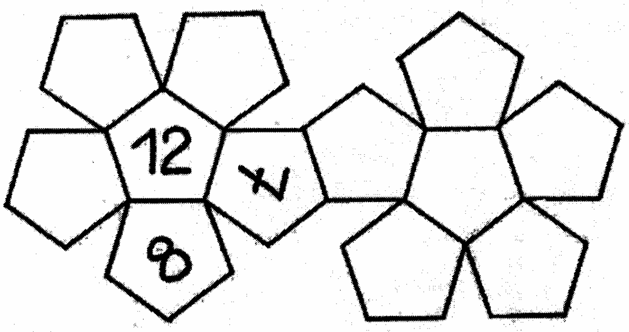


Rätselhafte Geometrie

Blatt I.9

Zwölferwürfel

Daniel spielt gern und besitzt jede Menge Würfel. Einer davon hat die Form eines Dodekaeders. Dieser hat als Seitenflächen 12 regelmäßige Fünfecke, die paarweise parallel sind und mit den Zahlen von 1 bis 12 versehen sind. Wie bei einem sechsseitigen Würfel hat die Summe der Zahlen auf zwei zueinander parallelen Seiten stets den gleichen Wert.



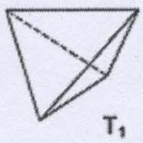
Zeichne das Netz eines solchen Dodekaeders auf und beschrifte seine Flächen mit den passenden Zahlen.

Rätselhafte Geometrie

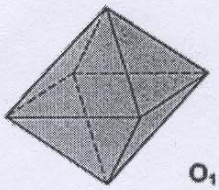
Blatt I.10

Tetra-Oktaeder

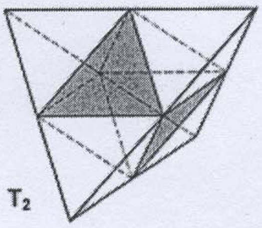
Die nebenstehende Abbildung zeigt ein regelmäßiges Tetraeder T_1 und ein regelmäßiges Oktaeder O_1, beide mit der Kantenlänge 1.



T_1

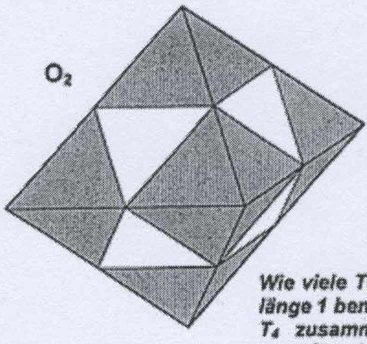


O_1



T_2

O_2



Das Tetraeder T_2 mit der Kantenlänge 2 ist aus mehreren Tetraedern T_1 und einem Oktaeder O_1 zusammengesetzt.

Das Oktaeder O_2 besteht aus Oktaedern O_1 und Tetraedern T_1. Die sichtbaren Seitenflächen der Oktaeder O_1 sind im Bild grau gefärbt.

Wie viele Tetraeder und Oktaeder der Kantenlänge 1 benötigt man, um daraus ein Tetraeder T_4 zusammenzusetzen? Wie viele benötigt man für ein Oktaeder O_4 der Kantenlänge 4? Begründe die Antworten.

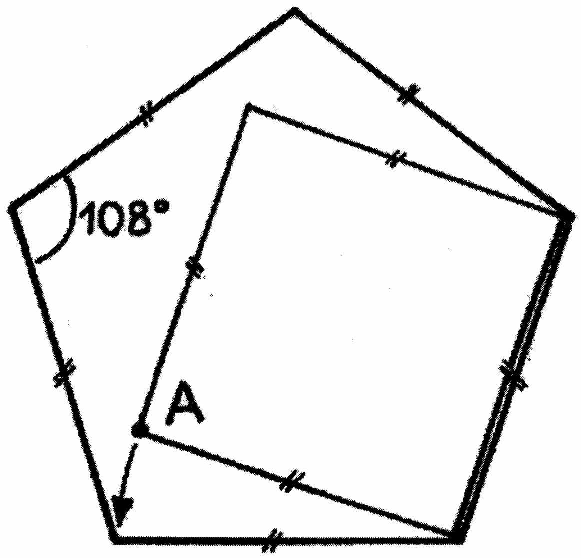
Rätselhafte Geometrie

Blatt I.11

Quadratwanderung

Im Inneren eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seitenlänge 8 cm liegt ein ein Quadrat dessen Seitenlänge ebenfalls 8 cm beträgt. Es bewegt sich innerhalb des Fünfecks durch Drehung so, dass immer mindestens eine seiner Ecken mit einer Ecke des Fünfecks zusammenfällt.

Zeichne das Fünfeck und trage mit Farbstift die Kurve ein, auf welcher sich der Eckpunkt A des Quadrats bei dieser Wanderung bewegt.



1+2=3

mathématiques

sans frontières

Regierungspräsidium Freiburg

http://www.hfg.og.bw.schule.de/pages_kli/mog/seiten/index.html

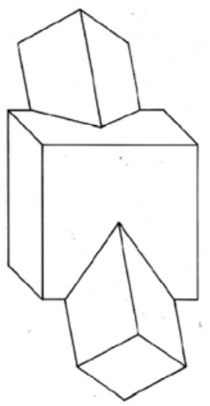
Lösungen

Rätselhafte Geometrie

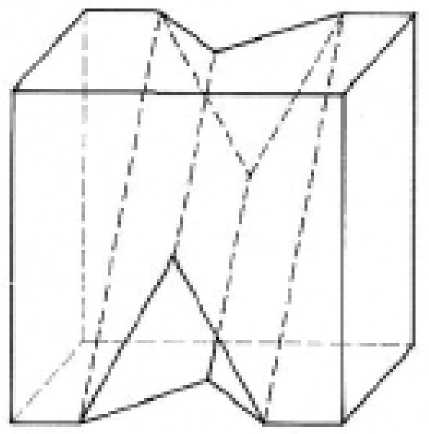
Blatt I.1 Lösung

Piercing

Ein Würfel wurde so durchbohrt, dass ein gerades Prisma mit quadratischer Grundfläche passgenau hindurch gesteckt werden kann. Dabei gehen zwei sich gegenüber liegende Kanten des Prismas jeweils durch die Mittelpunkte benachbarter Würfelflächen. Die beiden anderen Kanten des Prismas schneiden zwei sich gegenüber liegende Würfelkanten (siehe Abbildung).



LÖSUNG:



Zeichnet ein Schrägbild des durchbohrten Würfels, nachdem das Prisma entfernt wurde. Sichtbare Kanten sollen durchgezogen und unsichtbare Kanten gestrichelt werden.

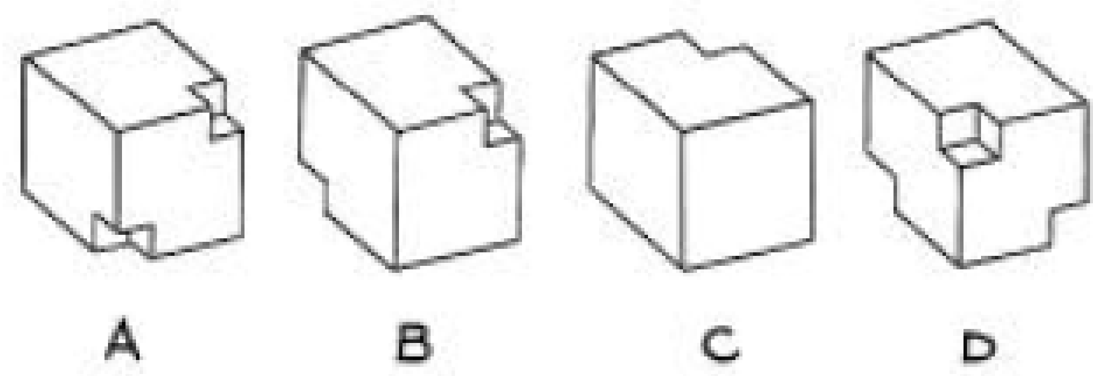
Rätselhafte Geometrie

Blatt I.2 Lösung

Um die Ecke gedacht

Die Zeichnungen stellen vier Holzwürfel dar, bei denen jeweils Ecken ausgefräst worden sind.

Nur zwei dieser Würfel sind identisch.
Welche sind es? Begründe.



Lösung:

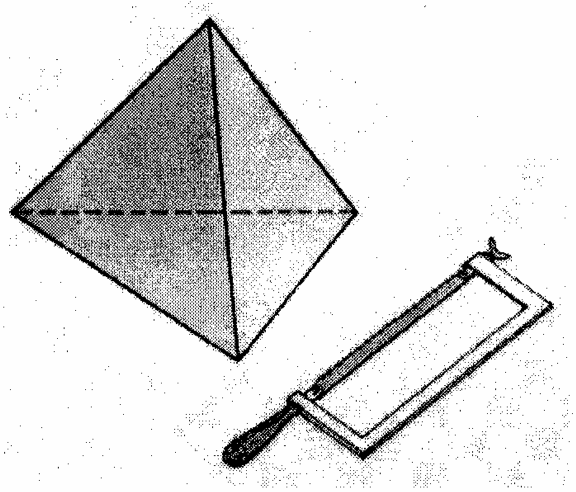
Die einzigen Würfel die identisch sein können sind A und D:

- C hat höchstens zwei „abgeschnittene“ Ecken, und zwar an einer gemeinsamen Kante. Dies trifft für die anderen Würfel nicht zu. C kann also mit keinem anderen Würfel identisch sein.
- Wenn A und B jeweils nur 2 „abgeschnittene“ Ecken haben, dann liegen sie bei B an einer Raumdiagonalen, nicht aber bei A.
- Wenn A und B jeweils drei „abgeschnittene“ Ecken haben, dann liegen bei B zwei von ihnen an einer gemeinsamen Kante, was bei A nicht zutreffen kann.
- Da zwei Würfel identisch sein sollen, können das nur A und D sein. Auch bei D liegen die drei „abgeschnittenen“ Ecken nicht an einer gemeinsamen Kante.

Rätselhafte Geometrie

Blatt I.3 Lösung

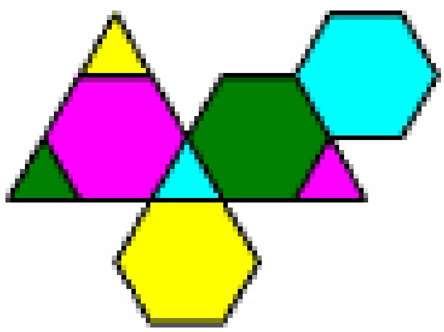
Was bleibt?



Die vier Ecken eines regelmäßigen Tetraeders sollen so abgesägt werden, dass aus den vier Seitenflächen des Tetraeders jeweils ein regelmäßiges Sechseck entsteht.

Zeichne das Netz dieses Restkörpers auf und färbe parallele Seitenflächen des Körpers mit der gleichen Farbe.

Lösung:



Hier ein mögliches Netz.

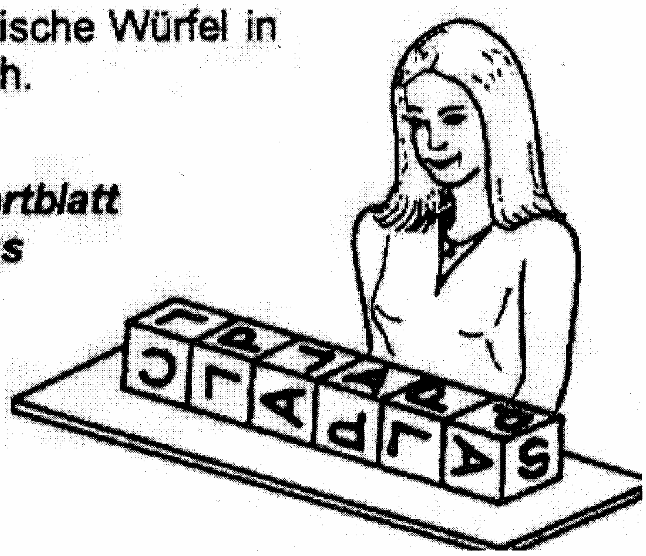
Rätselhafte Geometrie

Blatt I.4 Lösung

Ansichtssache

Etienne legt sechs identische Würfel in einer Reihe auf den Tisch.

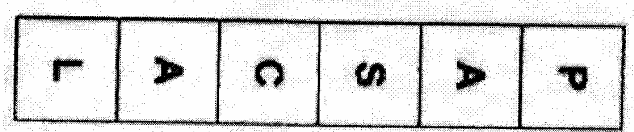
Zeichne auf das Antwortblatt die Rückseite der sechs abgebildeten Würfel, so wie Barbara sie sieht.

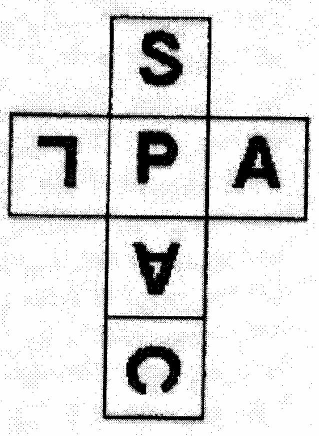


Lösung:

__Aufgabe 6 : Ansichtssache__

Hier ein mögliches Würfelnetz und die Rückseite wie sie Barbara sieht:



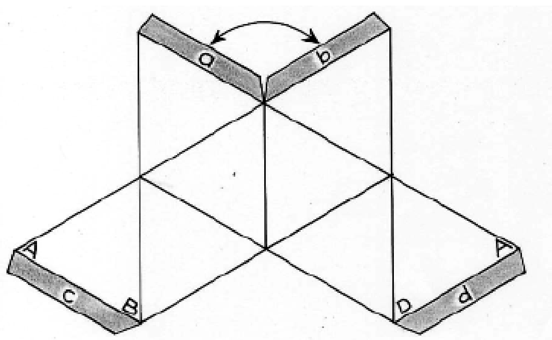


Rätselhafte Geometrie

Blatt I.5 Lösung

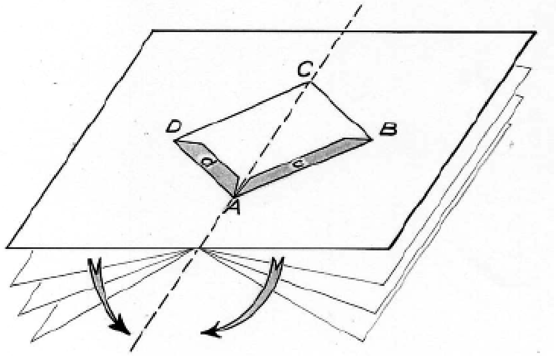
Hier ist eine originelle Methode zur Herstellung eines Körpers:

Zeichnet das abgebildete Netz in wahrer Größe. Es besteht aus acht gleichseitigen Dreiecken mit der Seitenlänge 5 cm und den vier Laschen a, b, c, d.



Schneidet euer Netz aus, knickt alle Kanten und klebt die Laschen a und b zusammen.

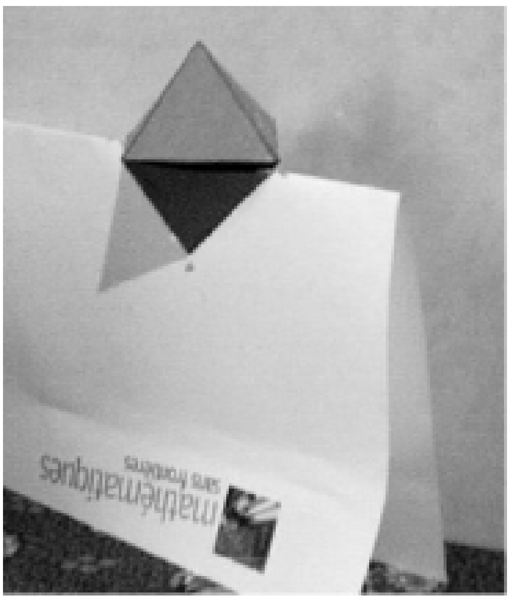
Zeichnet auf das Antwortblatt ein Quadrat ABCD mit 5 cm Seitenlänge und knickt das Blatt entlang der Diagonalen AC.



Klebt nun die Laschen c und d des Netzes so auf das Blatt, dass die Strecken AB und AD des Netzes auf den Seiten AB und AD des Quadrates liegen.

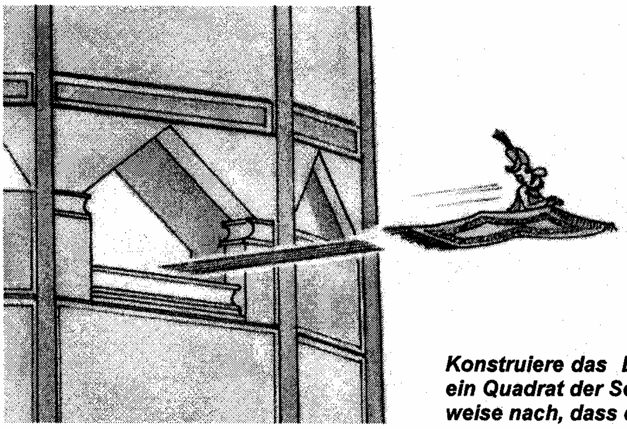
Faltet nun das Blatt entlang AC so zusammen, dass das Netz außen bleibt. Der Körper richtet sich nun auf der Knickkante auf

Lösung:



Rätselhafte Geometrie

Blatt I.6 Lösung



Ineinander

Der persische Mathematiker Abu al-Wafâ (940-988 n. Chr.) stellte das folgende geometrische Problem:

Konstruiere zu einem Quadrat mit gegebener Seitenlänge ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Ecke mit einer Ecke des Quadrats zusammenfällt. Die beiden anderen Ecken des Dreiecks sollen jeweils auf einer Seite des Quadrats liegen.

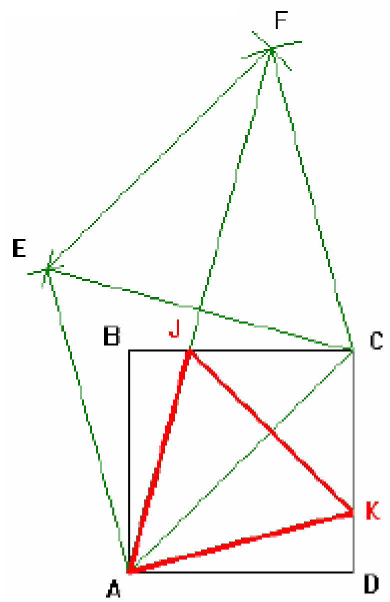
Konstruiere das Dreieck von Abu al-Wafâ nur Zirkel und Lineal für ein Quadrat der Seitenlänge 8 cm. Beschreibe die Konstruktion und weise nach, dass das Dreieck gleichseitig ist.

Lösung:

Man konstruiert zunächst das gleichseitige Dreieck ACE über der Diagonalen AC. Die Winkelhalbierende des Winkels CAE schneidet die Seite BC im Punkt J. Spiegelt man J an AC, so erhält man den Punkt K. Da AC auch Symmetrieachse des Quadrats ist, liegt K auf der Seite CD.

Da AJ Winkelhalbierende im Dreieck ACE ist, gilt $\angle CAJ = 30°$. Aufgrund der Symmetrie ist $\angle KAJ = 60°$. Außerdem sind die Strecken AJ und AK gleich lang. Somit ist das Dreieck gleichseitig.

Bem. Auch andere Konstruktionen sind möglich.



Rätselhafte Geometrie

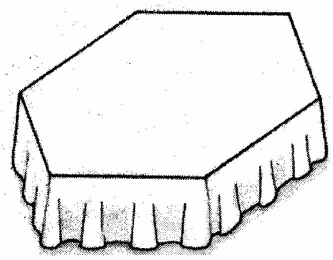
Blatt I.7 Lösung

Tischrücken

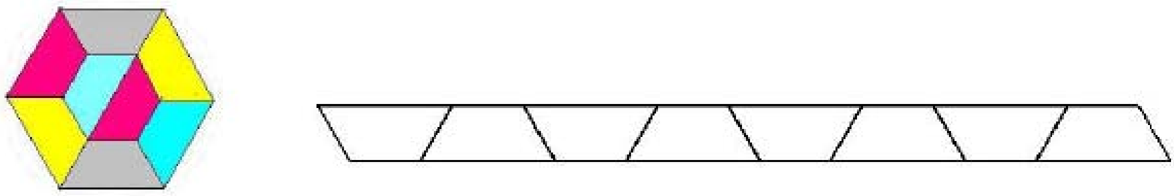
Im Festsaal eines Dorfes stehen acht gleiche, viereckige Tische. Thomas stellt sie lückenlos zusammen, so dass sich eine große Tafel in Form eines regelmäßigen Sechsecks mit 2 m Seitenlänge ergibt.

„Der Platz wird nie für alle reichen!" protestiert Anja und beginnt auch schon die Tische umzustellen. Sie gruppiert sie ohne Zwischenraum zu einem Viereck mit 26 m Umfang.

Zeichne die Anordnung von Thomas und die von Anja im Maßstab 1:50.



Lösung:



Hier die Anordnungen von Cédric und Anaïs. Der Umfang beträgt 12m bzw. 26 m.

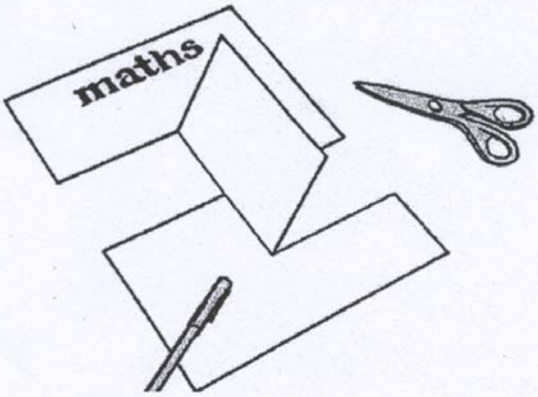
Rätselhafte Geometrie

Blatt I.8 Lösung

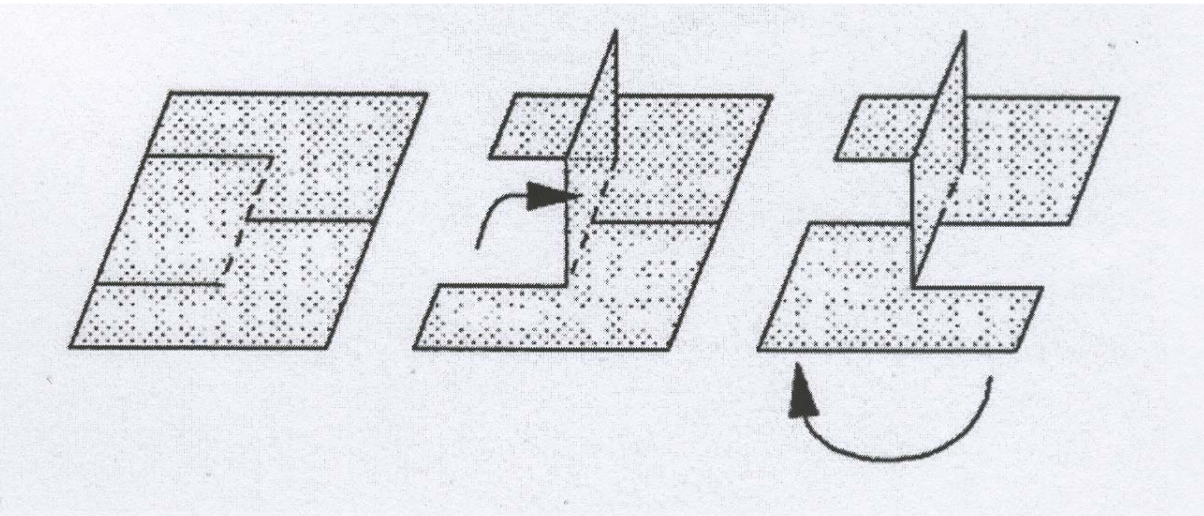
Monumento

Michel findet auf Mariannes Schreibtisch ein Blatt Papier. Es ist eingeschnitten und auf verblüffendende Art gefaltet, ohne an irgend einer Stelle geklebt zu sein.

Schneide das Antwortblatt ein und falte es so, dass es wie auf der Abbildung aussieht.
Achtung: Das Blatt muss aus einem Stück bestehen!



Lösung:

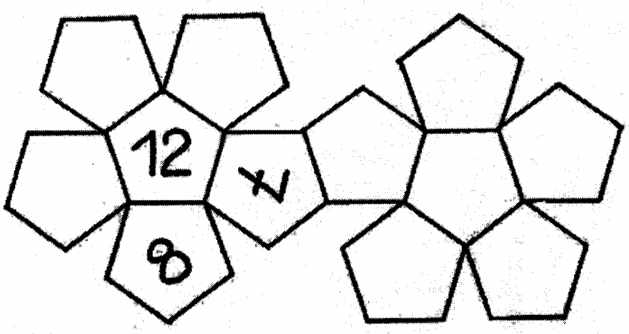


Rätselhafte Geometrie

Blatt I.9 Lösung

Zwölferwürfel

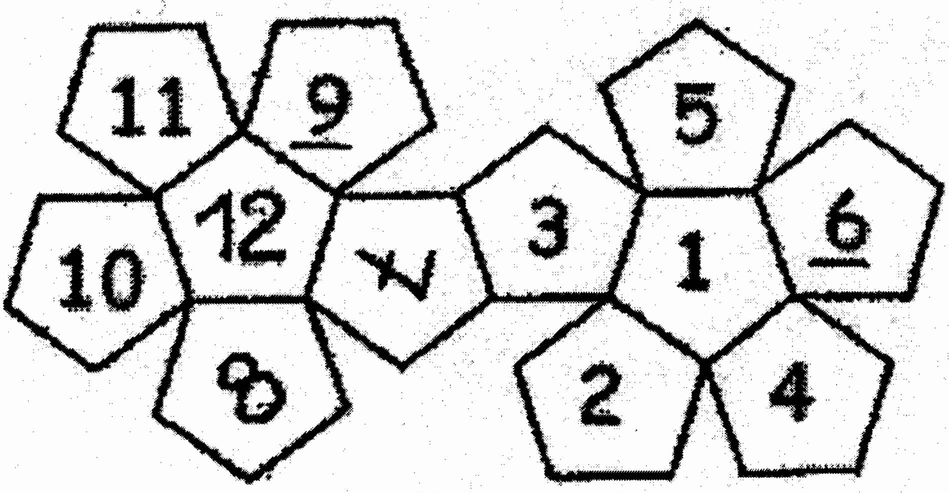
Daniel spielt gern und besitzt jede Menge Würfel. Einer davon hat die Form eines Dodekaeders. Dieser hat als Seitenflächen 12 regelmäßige Fünfecke, die paarweise parallel sind und mit den Zahlen von 1 bis 12 versehen sind. Wie bei einem sechsseitigen Würfel hat die Summe der Zahlen auf zwei zueinander parallelen Seiten stets den gleichen Wert.



Zeichne das Netz eines solchen Dodekaeders auf und beschrifte seine Flächen mit den passenden Zahlen.

Lösung:

Hier eine der möglichen Lösungen :

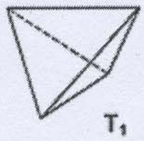


Rätselhafte Geometrie

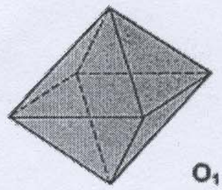
Blatt I.10 Lösung

Tetra-Oktaeder

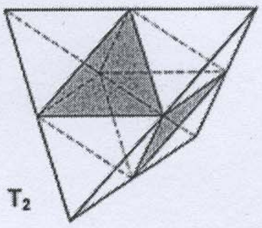
Die nebenstehende Abbildung zeigt ein regelmäßiges Tetraeder T_1 und ein regelmäßiges Oktaeder O_1, beide mit der Kantenlänge 1.



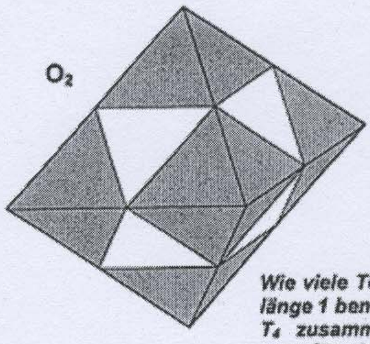
T_1



O_1



T_2



O_2

Das Tetraeder T_2 mit der Kantenlänge 2 ist aus mehreren Tetraedern T_1 und einem Oktaeder O_1 zusammengesetzt.

Das Oktaeder O_2 besteht aus Oktaedern O_1 und Tetraedern T_1. Die sichtbaren Seitenflächen der Oktaeder O_1 sind im Bild grau gefärbt.

Wie viele Tetraeder und Oktaeder der Kantenlänge 1 benötigt man, um daraus ein Tetraeder T_4 zusammenzusetzen? Wie viele benötigt man für ein Oktaeder O_4 der Kantenlänge 4? Begründe die Antworten.

Lösung

Auf den Abbildungen sieht man :

T2 = O1 + 4 T1 und O2 = 6 O1 + 8 T1

In gleicher Weise erhält man T4 und O4 aus T2 und O2 :

T4 = O2 + 4 T2 = 6 O1 + 8 T1 + 4(O1 + 4 T1) und

O4 = 6 O2 + 8 T2 = 6(6 O1 + 8 T1) + 8(O1 + 4 T1)

also	**T4 = 10 O1 + 24 T1**
und	**O4 = 44 O1 + 80 T1**

(Das ist die einzige Lösung. Der Beweis der Eindeutigkeit wird nicht erwartet.)

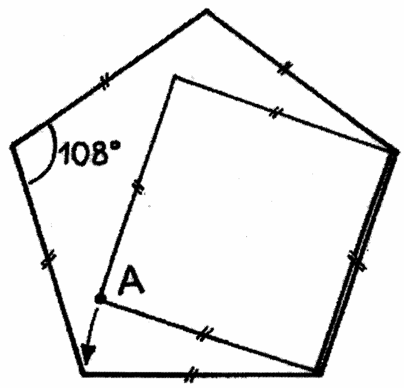
Rätselhafte Geometrie

Blatt I.11 Lösung

Quadratwanderung

Im Inneren eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seitenlänge 8 cm liegt ein ein Quadrat dessen Seitenlänge ebenfalls 8 cm beträgt. Es bewegt sich innerhalb des Fünfecks durch Drehung so, dass immer mindestens eine seiner Ecken mit einer Ecke des Fünfecks zusammenfällt.

Zeichne das Fünfeck und trage mit Farbstift die Kurve ein, auf welcher sich der Eckpunkt A des Quadrats bei dieser Wanderung bewegt.



Lösung Die Kurve von A besteht aus Kreisbögen.