Problem des Monats

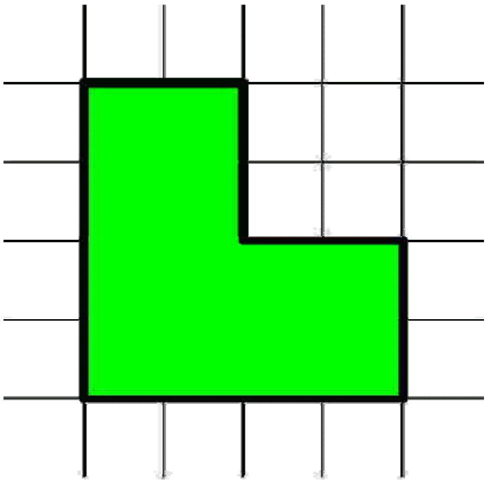
www.problem-des-monats.de

Rätselhafte Geometrie

Blatt III.1

Schwierige Landaufteilung

Ein Vater hinterlässt seinen Kindern eine Wiese mit folgendem Grundriss:



Die Wiese soll unter den Kindern aufgeteilt werden.

a) Alle Teile sollen den gleichen Flächeninhalt haben und die gleiche Form besitzen. Zeichne je eine Aufteilung für drei und für vier Geschwister!

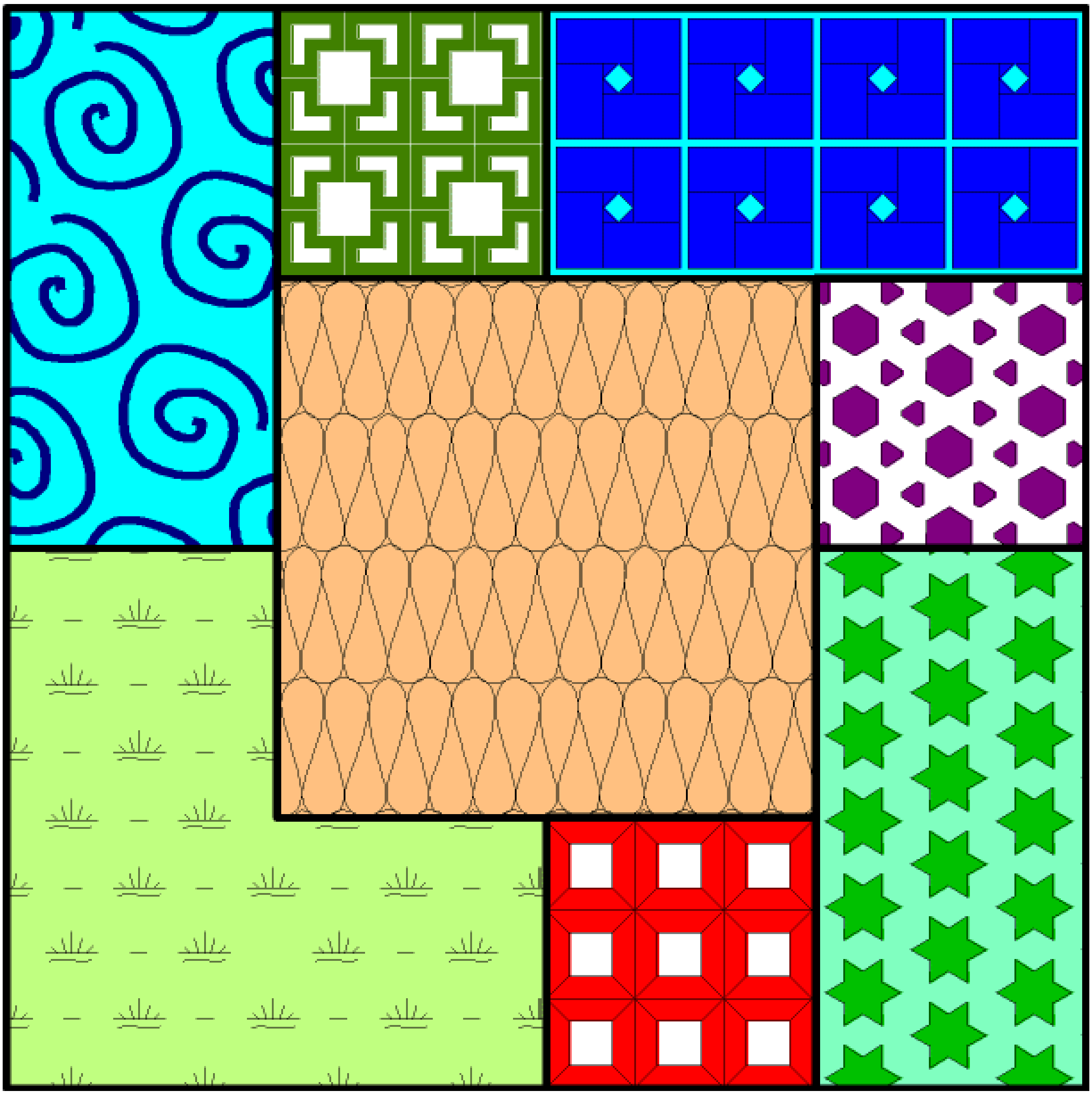
b) Alle Teile sollen zwar den gleichen Flächeninhalt haben, aber alle Teile sollen von verschiedener Form sein. Zeichne auch hierzu je ein Aufteilung für drei und für vier Geschwister!

Rätselhafte Geometrie

Blatt III.2

Omas Häkeldeckchen

Petra und Marco waren bei Oma zu Kaffee und Kuchen eingeladen. Wie üblich war es ziemlich langweilig, denn Oma sprach die ganze Zeit mit Tante Amalie über deren Kuraufenthalt in Bad Denkheim. Aber Petra gefielen Omas Häkeldeckchen, mit denen der Kaffeetisch gedeckt war.
Es waren acht quadratische Deckchen, alle von der gleichen Größe, aber jedes mit einem anderen Muster.



"Was meinst du, in welcher Reihenfolge hat Oma die acht Deckchen ausgelegt?" fragt sie Marco, der fast am Einschlafen war. "Gute Frage, aber woher soll ich das wissen?" antwortet Marco. "Na, denk doch nach!" stichelt Petra.

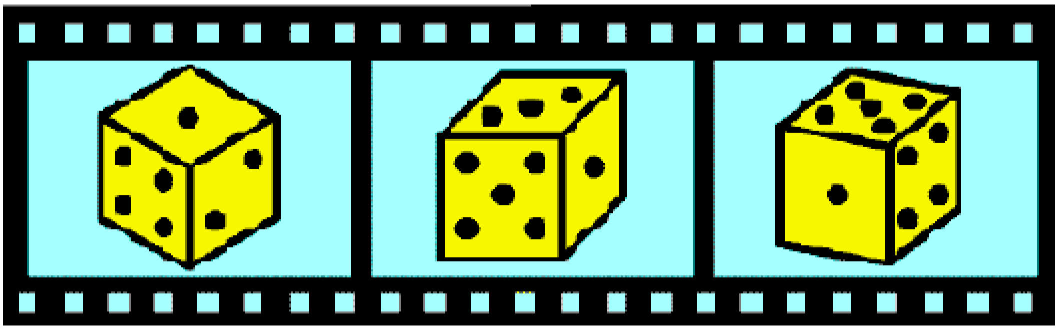
In welcher Reihenfolge wurden die Deckchen ausgelegt?

Rätselhafte Geometrie

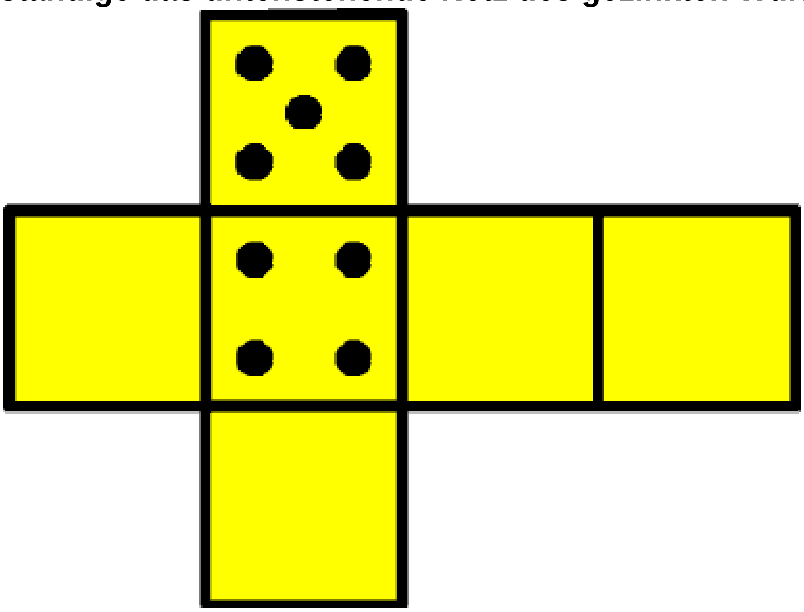
Blatt III.3

Der gezinkte Würfel

Petra und Marco lesen eine spannende Detektivgeschichte. Darin überführt der Meisterdetektiv einen Falschspieler und hat dazu heimlich die drei folgenden Fotos desjenigen Würfels gemacht, mit dem der Falschspieler auffällig oft gewonnen hat. Mit diesem Beweis konnte der Detektiv den Betrug aufklären!



Was stimmt an diesem Würfel nicht? Erkläre!
Vervollständige das untenstehende Netz des gezinkten Würfels!

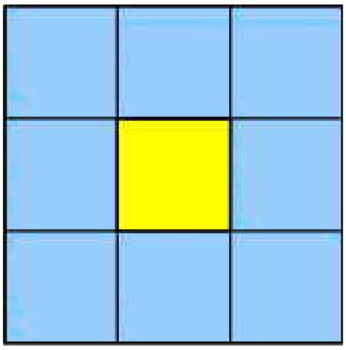


Rätselhafte Geometrie

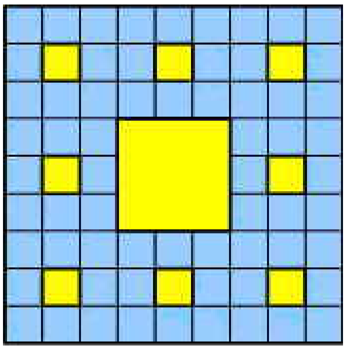
Blatt III.4

Der Sierpinski-Teppich

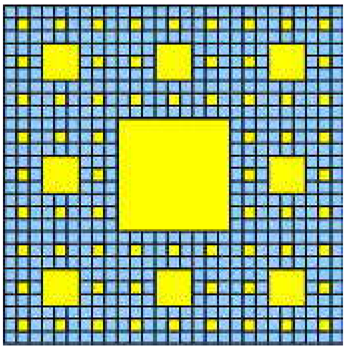
Ein quadratischer Teppich mit 81 cm Seitenlänge wird zunächst in 9 gleich große Quadrate aufgeteilt. Das mittlere Quadrat wird anschließend herausgeschnitten. Es sind noch 8 von 9 Quadraten vorhanden, also hat dieser Teppich der ersten Stufe einen Flächeninhalt von 5832 cm^2.



Beim zweiten Schritt wird mit den 8 verbliebenen Quadraten ebenso verfahren.



Jetzt hat der Teppich ein großes und 8 kleine Löcher.



So sieht der Teppich nach dem dritten Schritt aus.

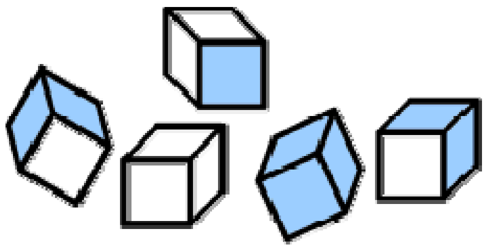
a. Welchen Flächeninhalt hat dieser löchrige Teppich der dritten Stufe?
b. Welchen Flächeninhalt hat dann der Teppich der vierten Stufe, wenn man das Verfahren entsprechend fortsetzt?

Rätselhafte Geometrie

Blatt III.5

STROBLer Turmbau

Im Seebad von Strobl wurde ein Spielturm aufgebaut. Er besteht aus 154 würfelförmigen Bausteinen. Nach der Fertigstellung wurde er von allen Seiten (außer von unten natürlich!) blau angestrichen. Marco überlegt sich nun, wie die einzelnen Würfel wohl aussehen würden, wenn man den ganzen Turm wieder in seine Einzelteile zerlegen könnte.



Es ist ihm klar, dass manche Würfel gar keine Farbe abbekommen haben. Andere wurden nur an einer einzigen Seite angestrichen, wieder andere haben dagegen 2, 3, 4 oder sogar 5 blaue Seitenflächen.

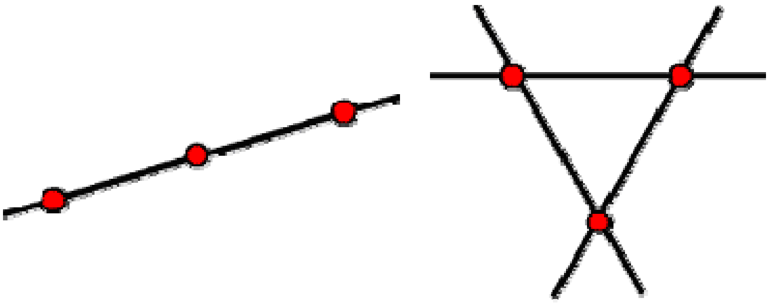
Wie viele Würfel sind es in jedem dieser sechs Fälle?

Rätselhafte Geometrie

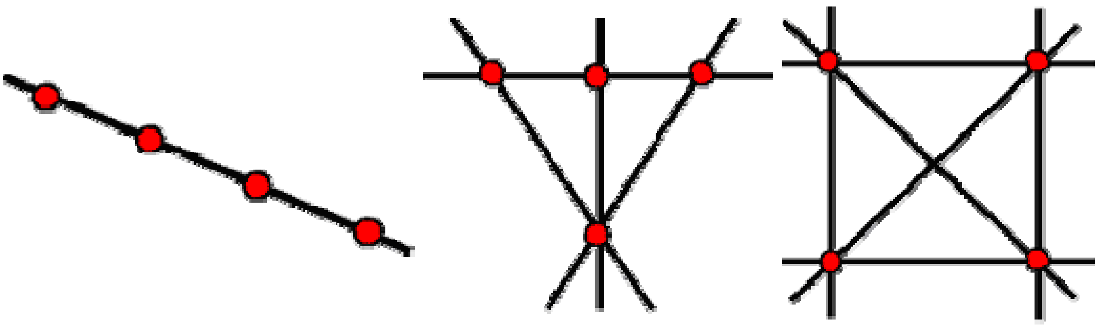
Blatt III.6

Viele Verbindungen

Petra und Marco zeichnen gerne. Marco hat entdeckt, dass es bei drei Punkten je nach Lage der Punkte entweder eine oder drei Verbindungsgeraden gibt:



Bei vier Punkten findet Petra drei verschiedene Anordnungen der Punkte, die zu 1, 4 oder 6 Verbindungsgeraden führen:



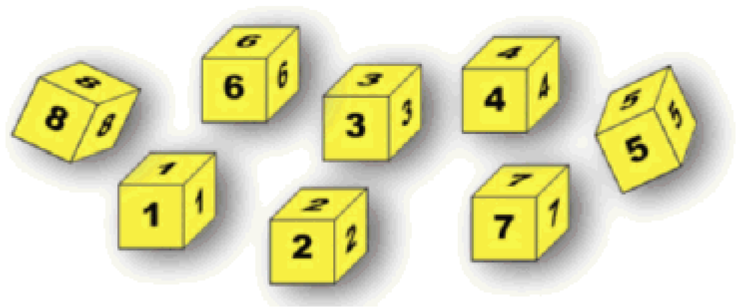
Bei fünf Punkten gibt es noch mehr verschiedene Möglichkeiten für die Anzahl der Verbindungsgeraden.
Wie viele unterschiedliche Fälle gibt es? Fertige jeweils eine Zeichnung an und nenne die Zahl der Verbindungsgeraden!

Rätselhafte Geometrie

Blatt III.7

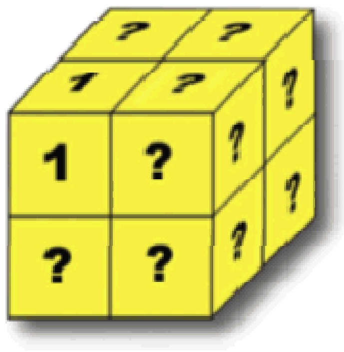
Zusammengewürfelt

Petra und Marco haben acht kleine Würfel, die mit den Zahlen 1 bis 8 nummeriert sind. Die entsprechende Nummer steht bei jedem Würfel auf allen sechs Seiten.



Petra und Marco wollen diese acht Würfel so zu einem großen Würfel zusammensetzen, dass die Summe der vier Zahlen auf jeder Seite des großen Würfels gleich ist.

a. Die Summe der vier Zahlen auf jeder Seite des großen Würfels ist 18. Begründe, warum dies so sein muss!
b. Zeichne ein vollständig beschriftetes Netz des großen Würfels!

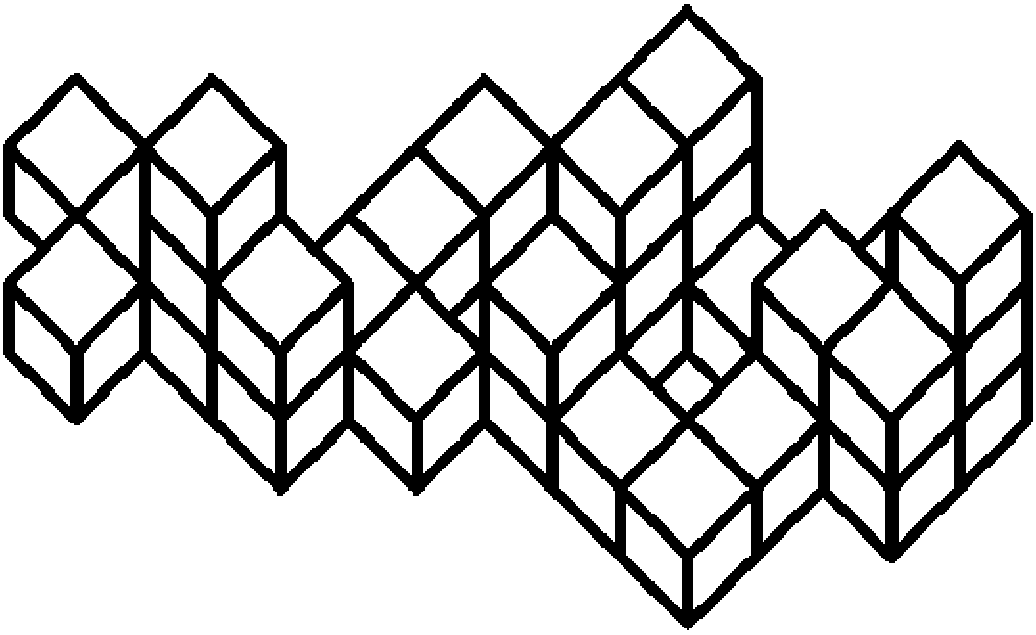


Rätselhafte Geometrie

Blatt III.8

Klotzig

Petras kleiner Bruder hat auf einer ebenen Tischplatte eine Häuserlandschaft gebaut.

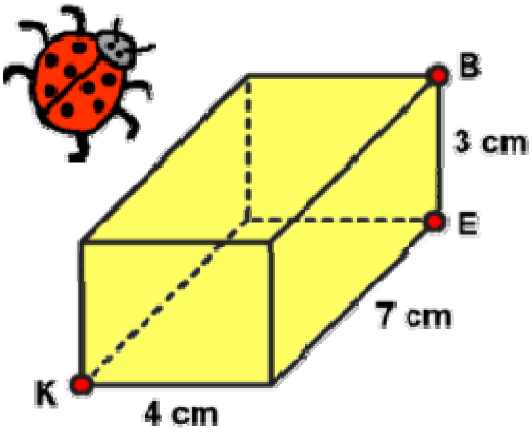


a. Petra hat das Werk ihres Bruders gezeichnet. Wie viele würfelförmige Bauklötze hat er mindestens gebraucht?
b. Möglicherweise sind noch weitere Bauklötze vorhanden, die man in der Zeichnung nicht sehen kann, weil sie verdeckt sind. Wie viele Bauklötze waren es im Höchstfall?

Rätselhafte Geometrie

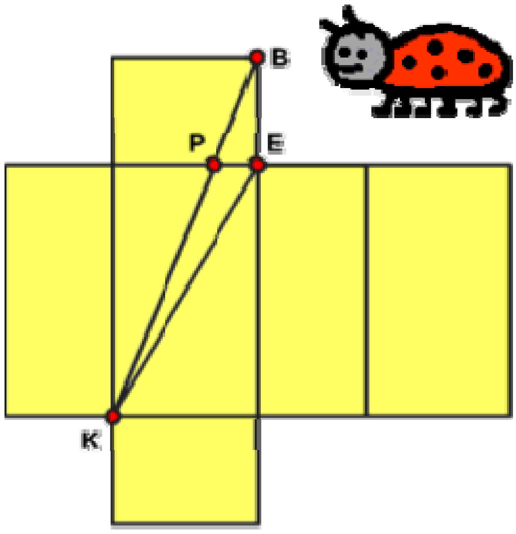
Blatt III.9

Schlauer Käfer



In der Ecke K einer quaderförmigen Kiste sitzt ein Käfer. In der Ecke B befindet sich seine Beute B. Der Käfer will auf kürzestem Weg zu seiner Beute krabbeln.

Petra und Marco zeichnen ein Netz des Quaders und erkennen, dass es für den Käfer besser ist, nicht den Weg über die Ecke E, sondern den Weg über den Punkt P zu nehmen.



a. Zeichne dieses Netz und miss möglichst genau die Länge des Weges von K nach B über E und von K nach B über P.
b. Staunend stellen Petra und Marco fest, dass der schlaue Käfer einen noch kürzeren Weg einschlägt. Mit Hilfe einer Veränderung am Netz des Quaders kann man die Länge dieses Weges messen. Wie lang ist dieser kürzeste Weg?

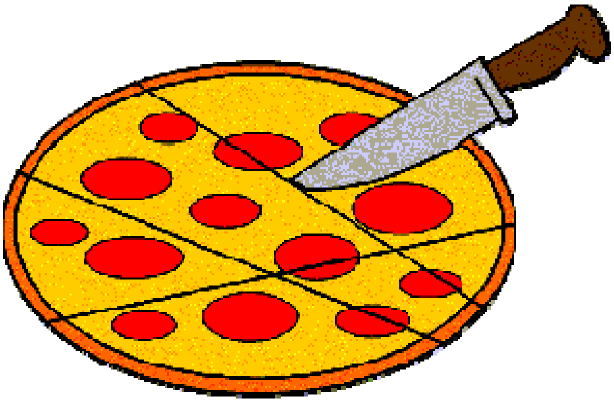
Rätselhafte Geometrie

Blatt III.10

Pizza schneiden

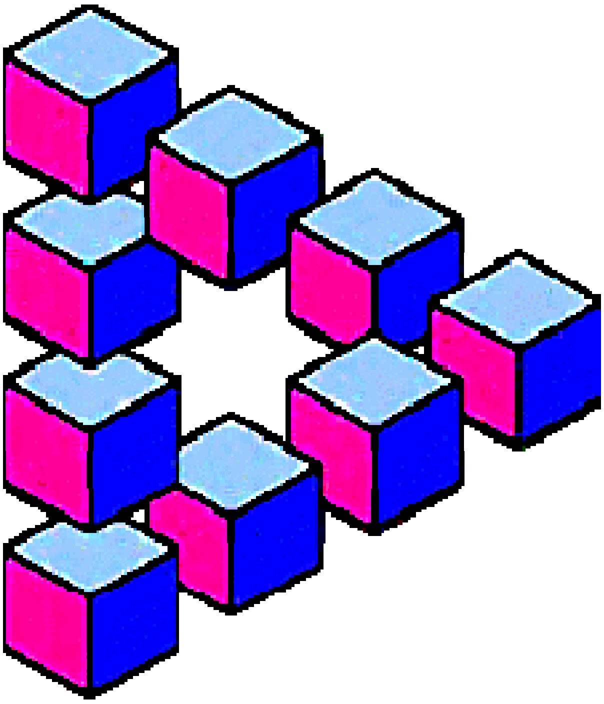
Petra und Marco bewirten beim Klassenfest. Beim Aufschneiden der Pizzastücke meint Marco: "Ich schaffe es bestimmt, eine einzige Pizza mit nur sechs geraden Schnitten so zu teilen, dass jeder von uns 23 Schülern wenigstens ein kleines Stückchen bekommt."

Bei diesem Beispiel erhält man mit drei Schnitten sechs Stücke.



a. Kann Marco tatsächlich die Pizza mit sechs Schnitten in 23 Stücke teilen? Wenn nicht, wie viele Stücke können es höchstens werden?
b. Welches ist die kleinste Stückzahl, die man mit sechs Schnitten erhält?

Problem des Monats



www.problem-des-monats.de

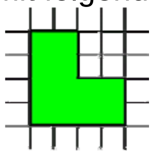
Lösungen

Rätselhafte Geometrie

Blatt III.1 Lösung

Schwierige Landaufteilung

Ein Vater hinterlässt seinen Kindern eine Wiese mit folgendem Grundriss:



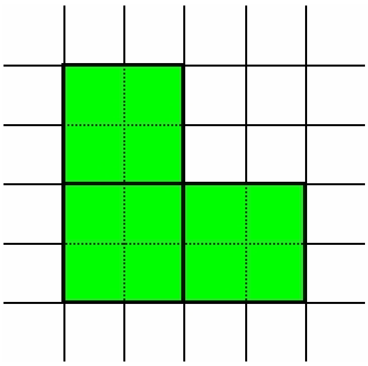
Die Wiese soll unter den Kindern aufgeteilt werden.

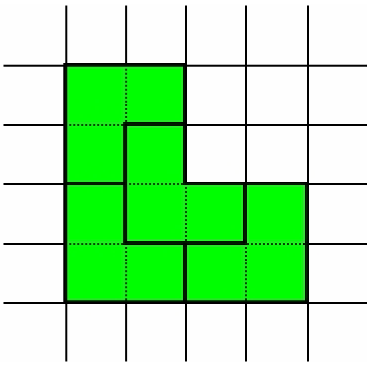
a) Alle Teile sollen den gleichen Flächeninhalt haben und die gleiche Form besitzen. Zeichne je eine Aufteilung für drei und für vier Geschwister!

b) Alle Teile sollen zwar den gleichen Flächeninhalt haben, aber alle Teile sollen von verschiedener Form sein. Zeichne auch hierzu je ein Aufteilung für drei und für vier Geschwister!

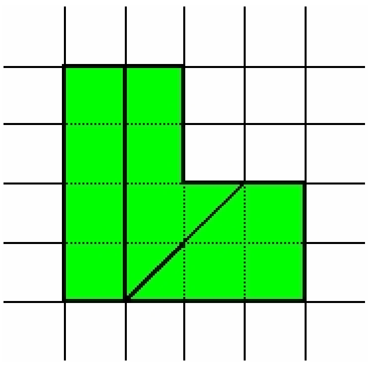
LÖSUNG:

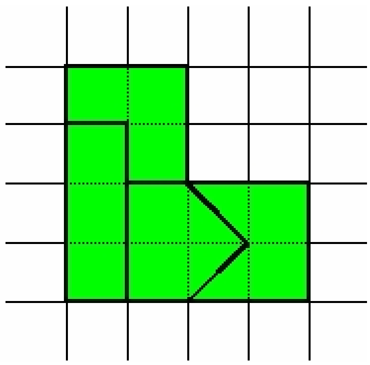
a) 3 bzw. 4 Teile gleicher Größe und gleicher Form. Dies sind die einzigen möglichen Lösungen.





b) 3 bzw. 4 Teile gleicher Größe, aber unterschiedlicher Form. Hierbei sind auch andere Lösungen möglich.





Rätselhafte Geometrie

Blatt III.2 Lösung

Omas Häkeldeckchen

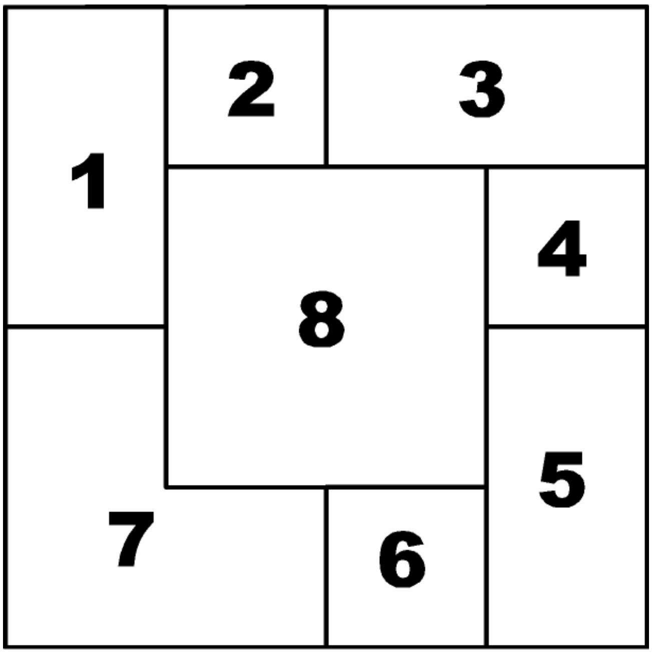
Petra und Marco waren bei Oma zu Kaffee und Kuchen eingeladen. Wie üblich war es ziemlich langweilig, denn Oma sprach die ganze Zeit mit Tante Amalie über deren Kuraufenthalt in Bad Denkheim. Aber Petra gefielen Omas Häkeldeckchen, mit denen der Kaffeetisch gedeckt war.
Es waren acht quadratische Deckchen, alle von der gleichen Größe, aber jedes mit einem anderen Muster.

"Was meinst du, in welcher Reihenfolge hat Oma die acht Deckchen ausgelegt?" fragt sie Marco, der fast am Einschlafen war. "Gute Frage, aber woher soll ich das wissen?" antwortet Marco. "Na, denk doch nach!" stichelt Petra.

In welcher Reihenfolge wurden die Deckchen ausgelegt?

LÖSUNG:

Das unterste Deckchen mit der Nummer 1 liegt oben links auf dem Tisch. In der Mitte mit der Nummer 8 liegt das oberste Deckchen. Die Skizze zeigt die Lage aller acht Deckchen.



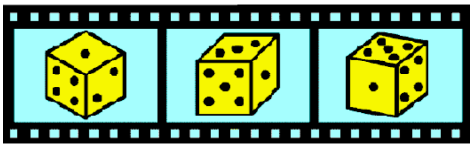
Um diese Anordnung herauszufinden, nimmt man in Gedanken die Deckchen nacheinander von oben her weg. Dabei liegt das jeweils oberste Deckchen vollständig frei.
Eine gute Hilfe ist es auch, acht Papierquadrate auszuschneiden und damit die Anordnung durchzuspielen.

Rätselhafte Geometrie

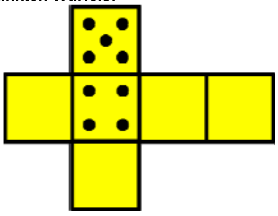
Blatt III.3 Lösung

Der gezinkte Würfel

Petra und Marco lesen eine spannende Detektivgeschichte. Darin überführt der Meisterdetektiv einen Falschspieler und hat dazu heimlich die drei folgenden Fotos desjenigen Würfels gemacht, mit dem der Falschspieler auffällig oft gewonnen hat. Mit diesem Beweis konnte der Detektiv den Betrug aufklären!

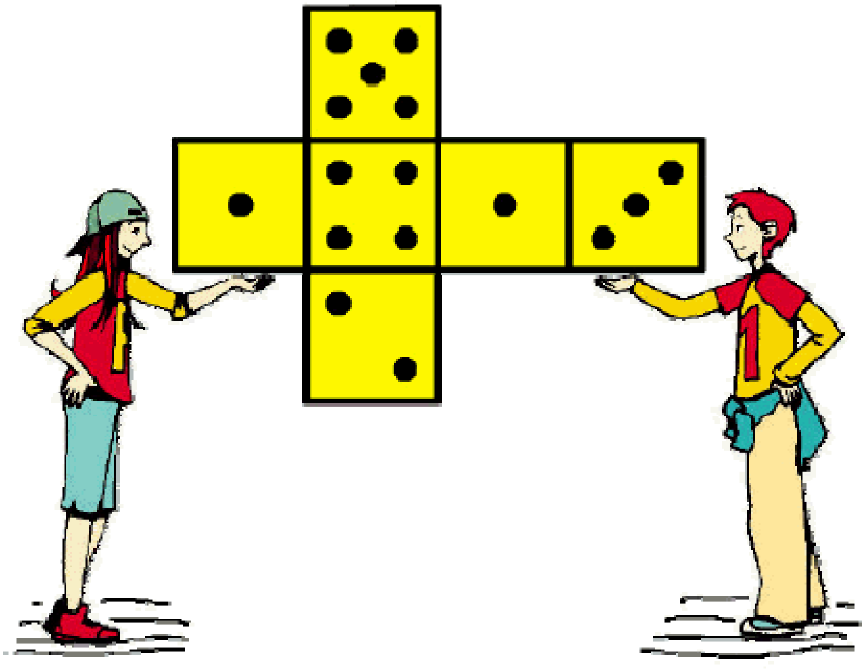


Was stimmt an diesem Würfel nicht? Erkläre!
Vervollständige das untenstehende Netz des gezinkten Würfels!



LÖSUNG:

Bei diesem gezinkten Würfel gibt es zwei Seiten mit der Augenzahl "1", dafür fehlt die Augenzahl "6". Das vollständige Netz des gezinkten Würfels sieht so aus:



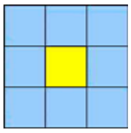
Wichtig ist hierbei nicht nur die passende Augenzahl in jedem Feld, sondern auch die richtige Anordnung der Punkte.

Rätselhafte Geometrie

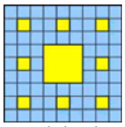
Blatt III.4 Lösung

Der Sierpinski-Teppich

Ein quadratischer Teppich mit 81 cm Seitenlänge wird zunächst in 9 gleich große Quadrate aufgeteilt. Das mittlere Quadrat wird anschließend heraus-geschnitten. Es sind noch 8 von 9 Quadraten vorhanden, also hat dieser Teppich der ersten Stufe einen Flächen-inhalt von 5832 cm^2.

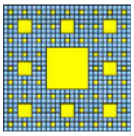


Beim zweiten Schritt wird mit den 8 verbliebenen Quadraten ebenso verfahren.



Jetzt hat der Teppich ein großes und 8 kleine Löcher.

So sieht der Teppich nach dem dritten Schritt aus.



a. Welchen Flächeninhalt hat dieser löchrige Teppich der dritten Stufe?

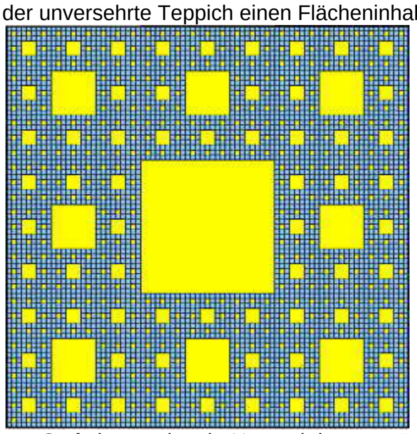
b. Welchen Flächeninhalt hat dann der Teppich der vierten Stufe, wenn man das Verfahren entsprechend fortsetzt?

LÖSUNG:

Der Teppich der dritten Stufe besitzt einen Flächeninhalt von 4608 cm^2. Der Teppich der vierten Stufe hat noch einen Flächeninhalt von 4096 cm^2.

Erklärung:

Vor dem ersten Schritt besitzt der unversehrte Teppich einen Flächeninhalt von 81cm·81cm =



6561 cm^2. Der Teppich der ersten Stufe hat noch acht Neuntel des ursprünglichen Flächeninhalts von 6561 cm^2, also 5832 cm^2. Im zweiten Schritt geht bei jedem der noch vorhandenen acht Quadrate wiederum ein Neuntel verloren, sodass noch acht Neuntel von 5832 cm^2, also 5184 cm^2 übrig bleiben. Nach dem dritten Schritt sind es dann noch acht Neuntel von 5184 cm^2, also 4608 cm^2. Hiervon bleiben nach dem vierten Schritt schließlich noch acht Neuntel übrig; hierfür erhält man somit 4096 cm^2.

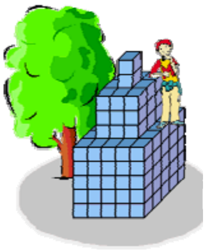
Wenn man diese Schritte bis ins Unendliche fortsetzt, erhält man den "Sierpinski-Teppich" mit dem Flächeninhalt Null. Dieses sogenannte "Fraktal" wurde nach dem polnischen Mathematiker Waclaw Sierpinski (1882 - 1969) benannt.

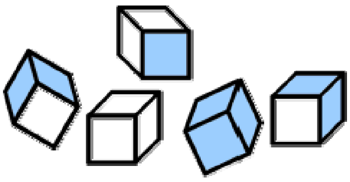
Rätselhafte Geometrie

Blatt III.5 Lösung

STROBLER Turmbau

Im Seebad von Strobl wurde ein Spielturm aufgebaut. Er besteht aus 154 würfelförmigen Bausteinen. Nach der Fertigstellung wurde er von allen Seiten (außer von unten natürlich!) blau angestrichen.

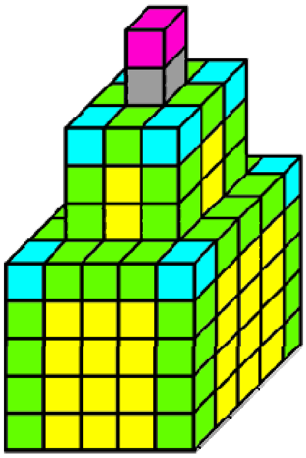




Marco überlegt sich nun, wie die einzelnen Würfel wohl aussehen würden, wenn man den ganzen Turm wieder in seine Einzelteile zerlegen könnte.

Es ist ihm klar, dass manche Würfel gar keine Farbe abbekommen haben. Andere wurden nur an einer einzigen Seite angestrichen, wieder andere haben dagegen 2, 3, 4 oder sogar 5 blaue Seitenflächen.

Wie viele Würfel sind es in jedem dieser sechs Fälle?



LÖSUNG:

48 Würfel haben **keine Farbe** abbekommen,
56 Würfel haben **1 farbige Seitenfläche**,
40 Würfel haben 2 farbige Seitenflächen,
8 Würfel haben 3 farbige Seitenflächen,
1 Würfel hat 4 farbige Seitenflächen und
1 Würfel hat sogar 5 farbige Seitenflächen.

<u>Erklärung:</u>

Der oberste Würfel weist 5 farbige Seitenflächen auf, der Würfel direkt, darunter hat 4 farbige Seiten. Die 8 Würfel in den oberen Ecken des großen 5er- bzw. 3er-Würfels haben 3 farbige Seitenflächen. Entlang der Kanten der beiden großen Würfel gibt es insgesamt 40 Würfel, die an 2 Seiten angestrichen sind.

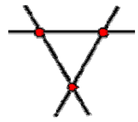
Bei den beiden großen Würfeln finden sich in den mittleren Feldern der Seitenflächen insgesamt 56 Würfel, die nur an einer Seite angestrichen wurden. 48 Würfel sind nach dem Zusammenbau nicht mehr sichtbar, sie wurden also auch nicht angestrichen.

Rätselhafte Geometrie

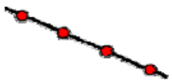
Blatt III.6 Lösung

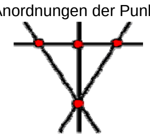
Viele Verbindungen

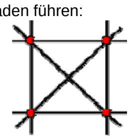
Petra und Marco zeichnen gerne. Marco hat entdeckt, dass es bei drei Punkten je nach Lage der Punkte entweder eine oder drei Verbindungsgeraden gibt:



Bei vier Punkten findet Petra drei verschiedene Anordnungen der Punkte, die zu 1, 4 oder 6 Verbindungsgeraden führen:





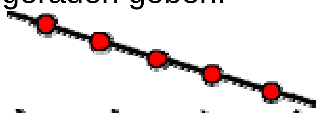


Bei fünf Punkten gibt es noch mehr verschiedene Möglichkeiten für die Anzahl der Verbindungsgeraden.
Wie viele unterschiedliche Fälle gibt es? Fertige jeweils eine Zeichnung an und nenne die Zahl der Verbindungsgeraden!

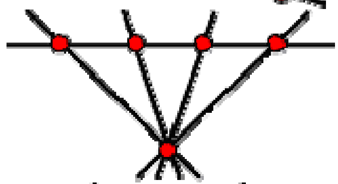
LÖSUNG:

Bei fünf Punkten kann es 1, 5, 6, 8 oder 10 Verbindungsgeraden geben.

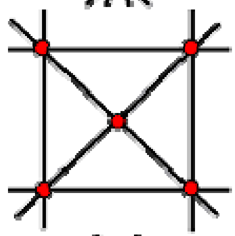
In dieser Situation gibt es nur **eine** Verbindungsgerade.



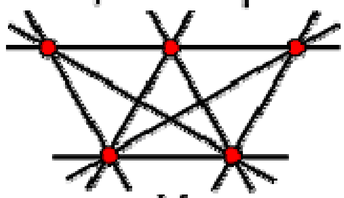
Verschiebt man einen der fünf Punkte, sodass nur noch vier Punkte hintereinander liegen, ergeben sich **fünf** Verbindungsgeraden.



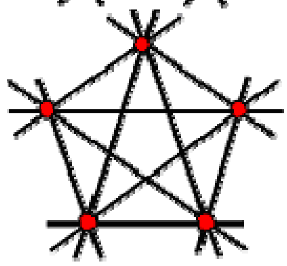
Bei zwei Geraden, auf denen jeweils genau drei Punkte liegen, erhält man insgesamt **sechs** Verbindungsgeraden.



Gibt es nur eine Gerade, auf der genau drei Punkte liegen, braucht man **acht** Verbindungsgeraden.



Wenn nie mehr als zwei Punkte auf einer Geraden liegen, sind insgesamt **zehn** Verbindungsgeraden nötig.

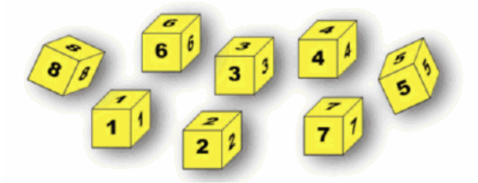


Rätselhafte Geometrie

Blatt III.7 Lösung

Zusammengewürfelt

Petra und Marco haben acht kleine Würfel, die mit den Zahlen 1 bis 8 nummeriert sind. Die entsprechende Nummer steht bei jedem Würfel auf allen sechs Seiten.



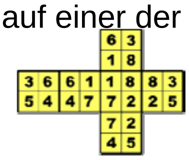
Petra und Marco wollen diese acht Würfel so zu einem großen Würfel zusammensetzen, dass die Summe der vier Zahlen auf jeder Seite des großen Würfels gleich ist.

a. Die Summe der vier Zahlen auf jeder Seite des großen Würfels ist 18. Begründe, warum dies so sein muss!

b. Zeichne ein vollständig beschriftetes Netz des großen Würfels!

LÖSUNG:

a) Nach dem Zusammenbau der acht kleinen Würfel zu dem einen großen Würfel sieht man von jedem kleinen Würfel nur noch drei Seiten. Jede der Zahlen 1 bis 8 kommt somit beim großen Würfel genau dreimal vor.
Die Gesamtsumme aller sichtbaren Zahlen beim großen Würfel beträgt deshalb:
3 · (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 108.
Für die Summe s der vier Zahlen auf einer der sechs Seitenflächen des großen Würfels gilt daher:

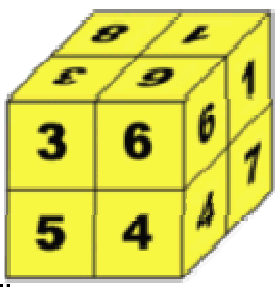


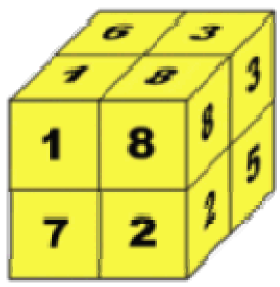
s = 108 : 6 = 18.

b) Dieses Netz zeigt eine der vielen möglichen Lösungen.

Und so sieht der zugehörige Würfel aus:

Von vorne *Von hinten*





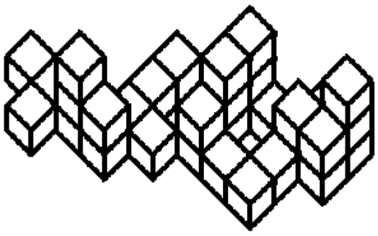
Erklärung:
Am leichtesten findet man eine Lösung, wenn man sich zunächst klar macht, dass es nur die folgenden acht Möglichkeiten gibt, die Summe 18 auf die geforderte Weise darzustellen: 1+2+7+8, 1+3+6+8, 1+4+5+8, 1+4+6+7, 2+3+5+8, 2+3+6+7, 2+4+5+7, 3+4+5+6.

Rätselhafte Geometrie

Blatt III.8 Lösung

Klotzig

Petras kleiner Bruder hat auf einer ebenen Tischplatte eine Häuserlandschaft gebaut.



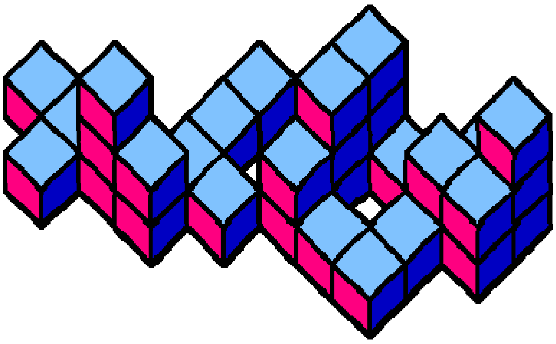
a. Petra hat das Werk ihres Bruders gezeichnet. Wie viele würfelförmige Bauklötze hat er mindestens gebraucht?

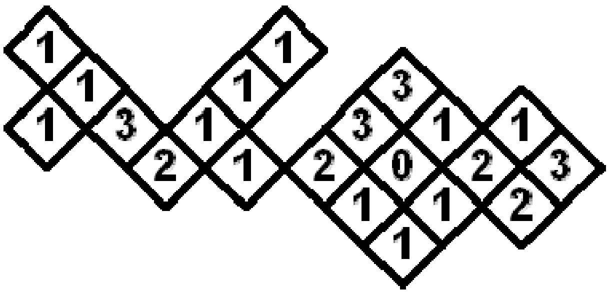
b. Möglicherweise sind noch weitere Bauklötze vorhanden, die man in der Zeichnung nicht sehen kann, weil sie verdeckt sind. Wie viele Bauklötze waren es im Höchstfall?

LÖSUNG:

a)

Petras kleiner Bruder hat mindestens 32 Bauklötze gebraucht. Malt man die Seitenflächen verschiedenfarbig an, kann man die einzelnen Würfel besser erkennen.





Der Grundriss zeigt die Höhe der einzelnen Türme der gesamten Stadtlandschaft. Damit erhält man die Mindestsumme von 32 Steinen.

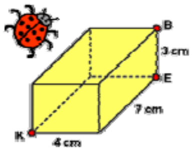
b)

Vier weitere Klötze waren möglicherweise durch andere verdeckt und deshalb in der Zeichnung nicht erkennbar. Demnach waren es höchstens 36 Bauklötze.

Rätselhafte Geometrie

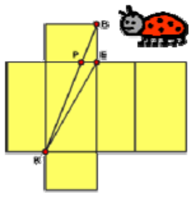
Blatt III.9 Lösung

Schlauer Käfer



In der Ecke K einer quaderförmigen Kiste sitzt ein Käfer. In der Ecke B befindet sich seine Beute B. Der Käfer will auf kürzestem Weg zu seiner Beute krabbeln.

Petra und Marco zeichnen ein Netz des Quaders und erkennen, dass es für den Käfer besser ist, nicht den Weg über die Ecke E, sondern den Weg über den Punkt P zu nehmen.



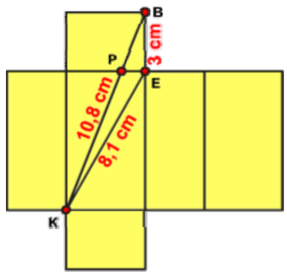
a. Zeichne dieses Netz und miss möglichst genau die Länge des Weges von K nach B über E und von K nach B über P.

b. Staunend stellen Petra und Marco fest, dass der schlaue Käfer einen noch kürzeren Weg einschlägt. Mit Hilfe einer Veränderung am Netz des Quaders kann man

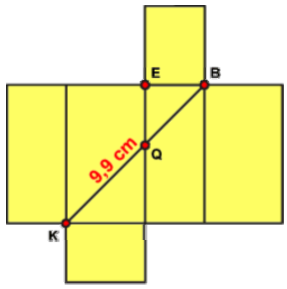
die Länge dieses Weges messen. Wie lang ist dieser kürzeste Weg?

LÖSUNG:

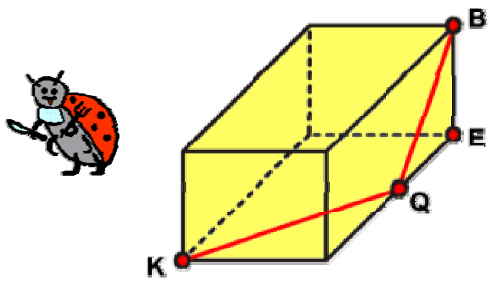
a) Von K nach B über E sind es ungefähr 11,1 cm, während die Weglänge von K nach B über P nur ungefähr 10,8 cm beträgt.



Erklärung: Die Weglängen können bei einer sauberen Zeichnung des Netzes direkt gemessen werden.



b) Der kürzeste Weg von K nach B misst ungefähr 9,9 cm.
Erklärung: Der kürzeste Weg führt über den Punkt Q auf der längeren Seitenkante des Quaders. Um dies zu erkennen, hängt man im Netz die hintere Seitenfläche nicht an der Grundfläche, sondern an der rechten Seitenfläche an.



Rätselhafte Geometrie

Blatt III.10 Lösung

Pizza schneiden

Petra und Marco bewirten beim Klassenfest. Beim Aufschneiden der Pizzastücke meint Marco: "Ich schaffe es bestimmt, eine einzige Pizza mit nur sechs geraden Schnitten so zu teilen, dass jeder von uns 23 Schülern wenigstens ein kleines Stückchen bekommt."

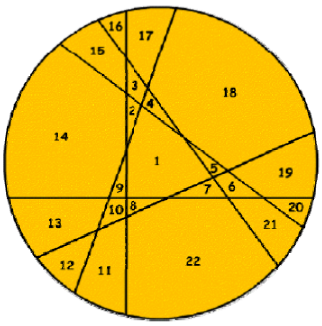
Bei diesem Beispiel erhält man mit drei Schnitten sechs Stücke.

a. Kann Marco tatsächlich die Pizza mit sechs Schnitten in 23 Stücke teilen? Wenn nicht, wie viele Stücke können es höchstens werden?

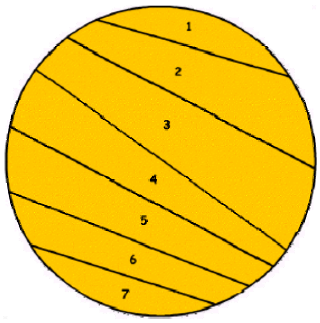
b. Welches ist die kleinste Stückzahl, die man mit sechs Schnitten erhält?

LÖSUNG:

a) Die Pizza kann mit sechs geraden Schnitten nicht in 23, sondern höchstens 22 Stücke geteilt werden.



b) Bei sechs Schnitten erhält man mindestens 7 Stücke.



Beim 1. Schnitt entstehen zwei Teilstücke. Beim 2.Schnitt kommen zwei Stücke hinzu, falls die erste Schnittlinie gekreuzt wird.

Beim 3. Schnitt gibt es weitere drei Teilstücke, wenn die beiden vorhandenen Geraden geschnitten werden.

Will man eine möglichst kleine Stückzahl erreichen, dürfen sich die Schnitte nicht kreuzen.

Zahl n der Schnitte:	1	2	3	4	5	6	7	...
Höchstzahl der Stücke:	2	4	7	11	16	22	29	...
Mindestzahl der Stücke:	2	3	4	5	6	7	8	...

Anmerkung:

Bei n Schnitten gibt es höchstens $n \cdot (n + 1):2 + 1$ Stücke und mindestens $n + 1$ Stücke.