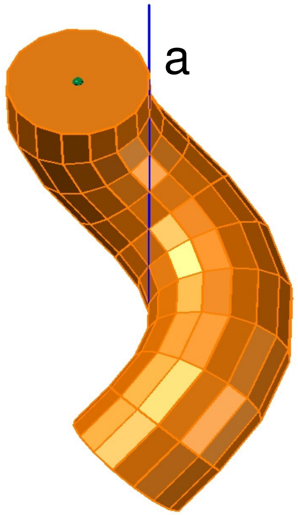
Anregungen zum Modellieren mit kongruenten, geraden Prismenstücken



O. RÖSCHEL

Strobl, November 2013

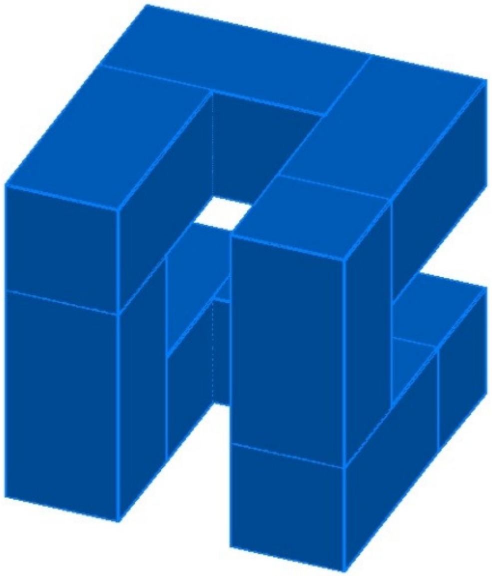
Inhalt

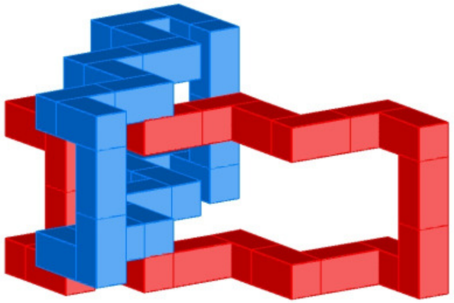
- Einige Beispiele
- Prismen und Gehrungsschnitte
- Diskrete Schraubung
- Anregungen für ‚Knoten' aus kongruenten Prismenteilen
- Zusammenfassung

1. Einige Beispiele

Verwendung eines Satzes kongruenter, regulärer Prismenstücke zur Modellierung von Stabwerken

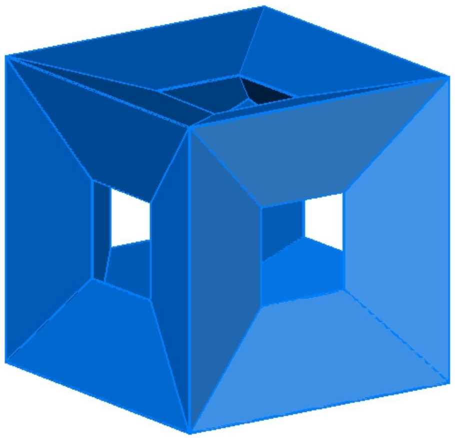
Am einfachsten: Bauklötze (Dominos)

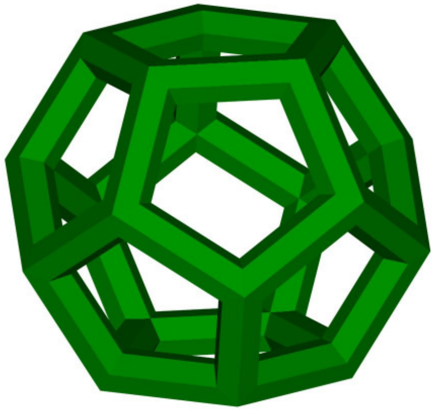




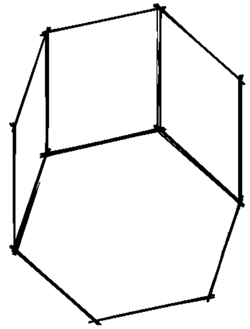
Dominos → sogar Knoten möglich:
Siehe z.B. www.math.uni-bielefeld.de

Schnitte ‚auf Gehrung' → Stabwerke als Kantenmodelle geeigneter Polyeder



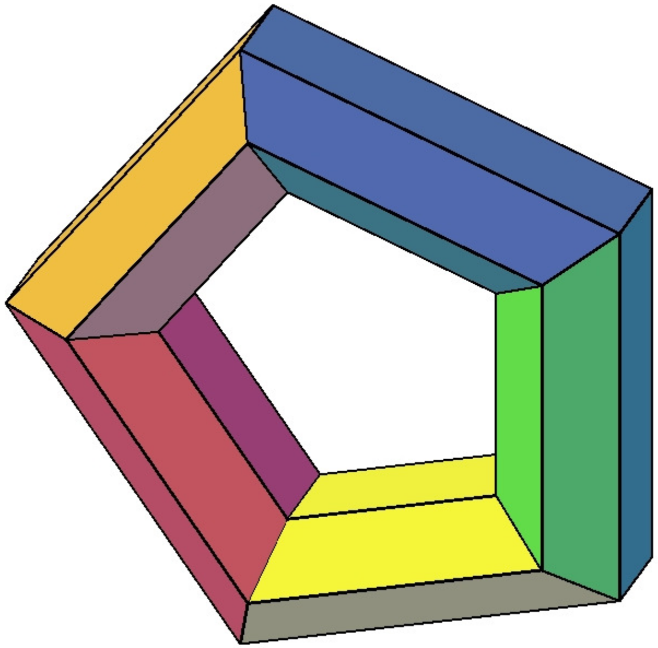


2. Prismen und Gehrungsschnitte



Gegeben:

- Ein **gerades Prisma** T: regelm. k-Eck als Normalschnitt, Achse p
- Kongruentes Stück T*, Achse p*

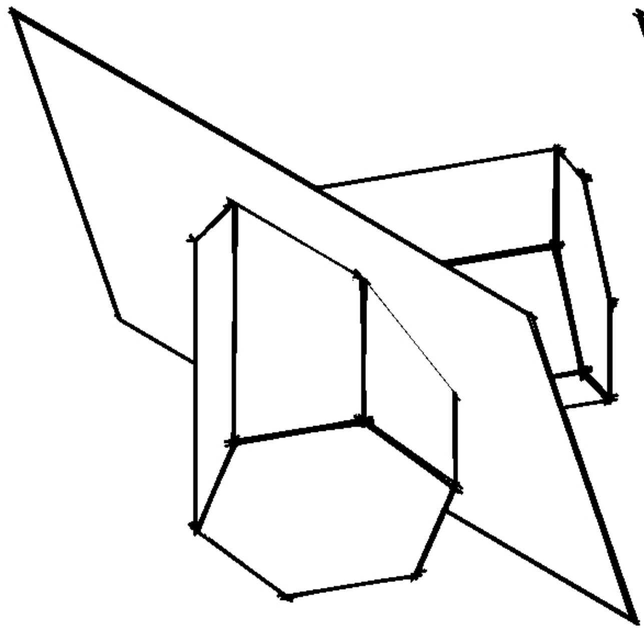


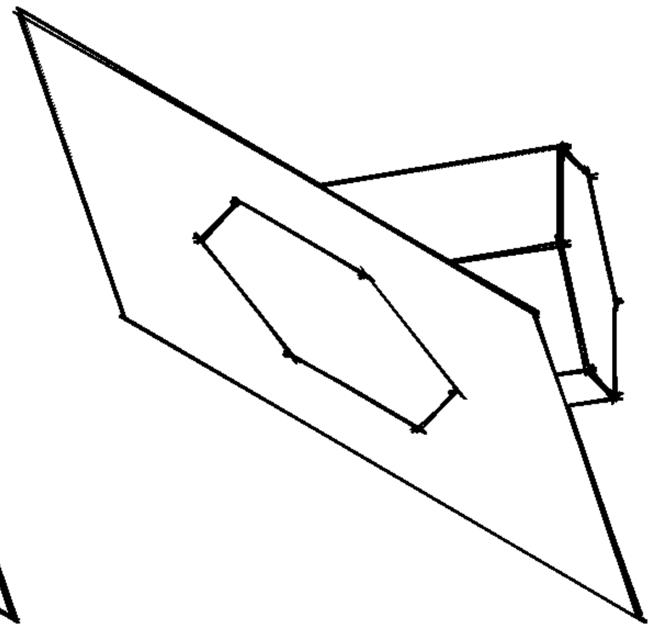
Ziel: Erzeuge Prismenschuss aus kongruenten Prismenstücken!

Zusatz: Prismenkanten bei Prismenschuss ‚fortlaufend'

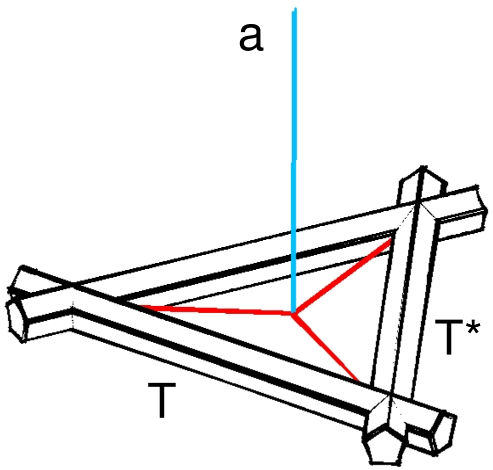
Bem.: Extrusion längs geeigneten Pfaden liefert ev. Gewünschtes.

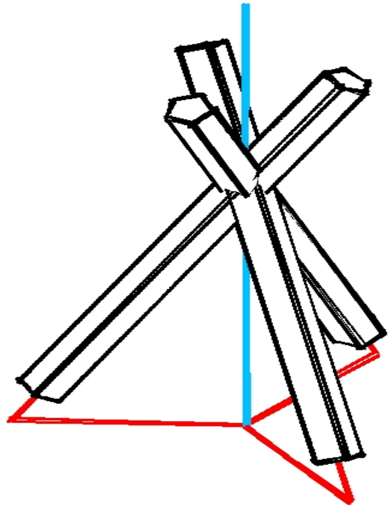
Prismenkanten ‚fortlaufend' → Gehrungsschnitte der Nachbarprismen stimmen überein.





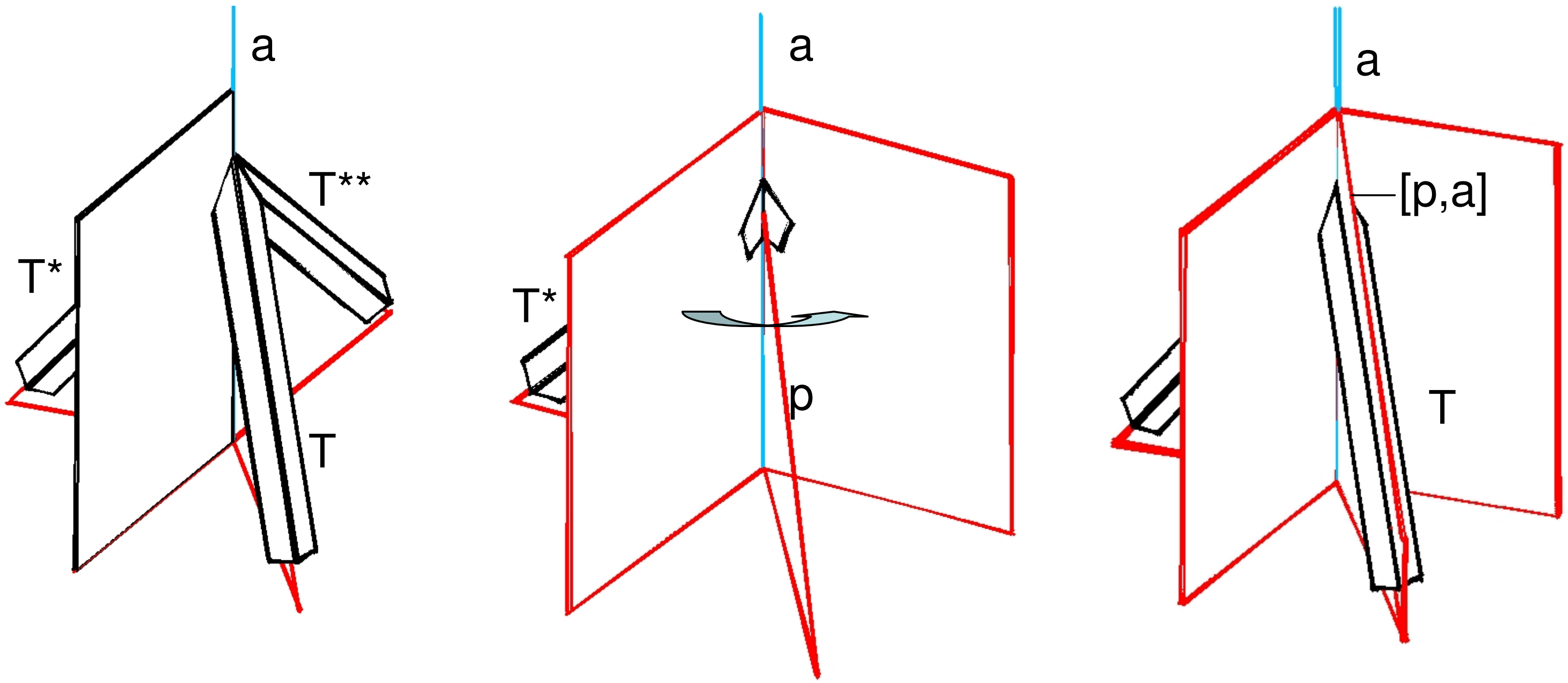
Drehlagen: Achse a





Beobachtung: p und p* schneiden sich genau dann, wenn p entweder orthogonal zur Achse a liegt oder die Drehachse a schneidet.

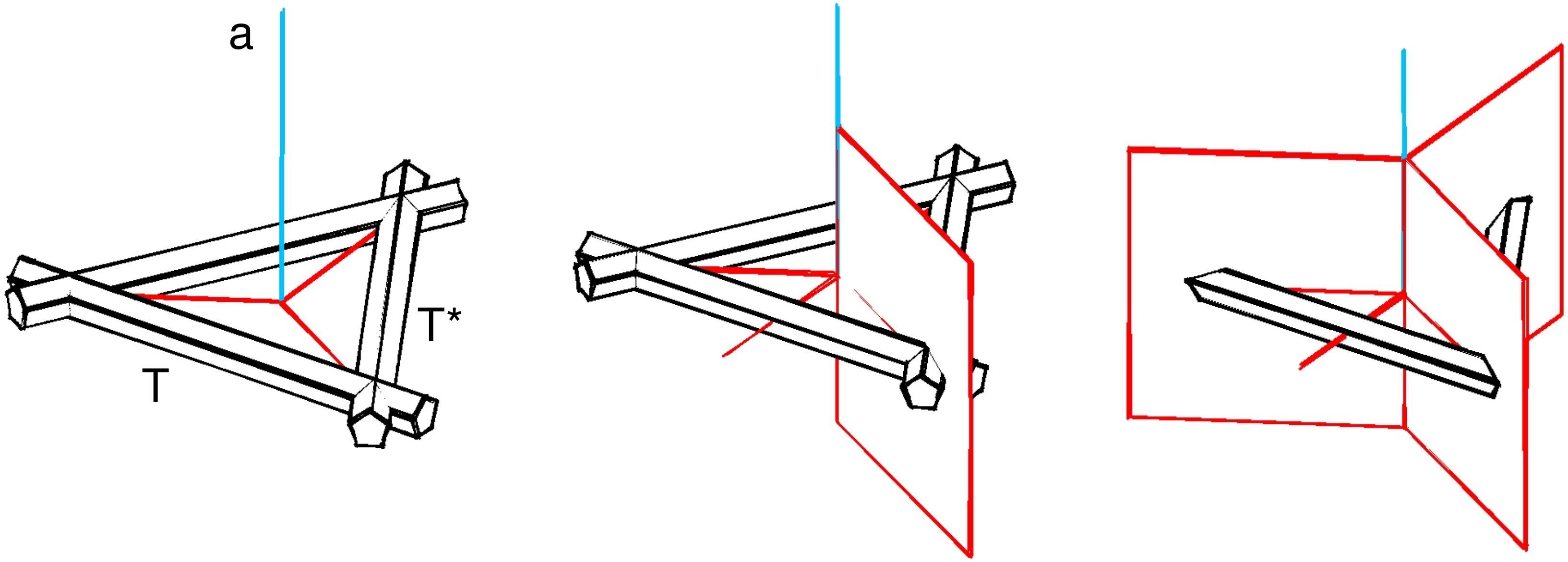
Betrachte Gehrungsschnitte : Ebene Schnitte längs ‚innerer' Symmetrieebene der Prismenachsen p und p*.



Mehrere Nachbarn T*, T** bzgl. der Drehachse a → Gehrungsschnitte zu zwei Nachbarn (Schnittebenen enthalten Achse a)
Kongruente Prismen → Drehung um a muss Gehrungsschnitte zur Deckung bringen → **T muss Spiegelung an Ebene [p,a] vertragen!**

Daher: Das Ausgangsprisma T muss bezüglich der Ebene [p,a] symmetrisch sein, wenn seine Achse eine zumindest 3-zählige Drehachse a der Anordnung trifft!

Fall: p orthogonal kreuzend zur Drehachse a

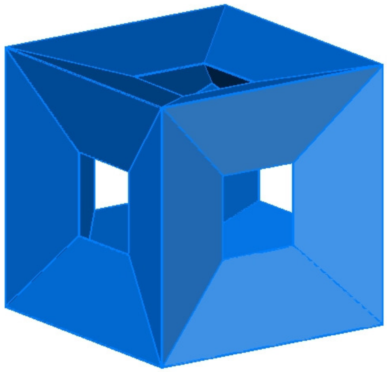


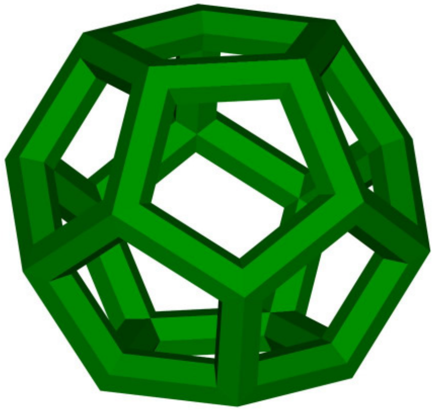
Dann existieren wieder Gehrungsschnitte mit Ebenen durch a! Keine weitere Symmetriebedingung!

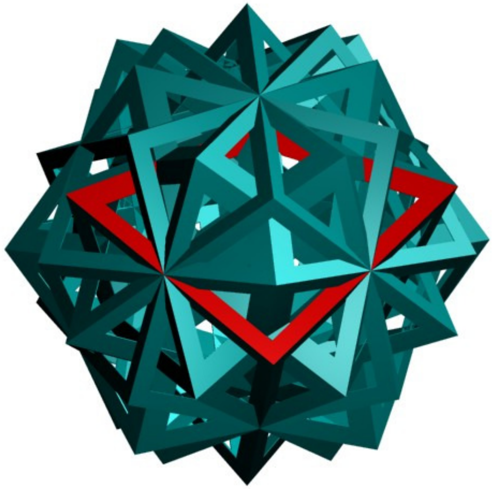
→ Stabmodelle von Kanten ‚geeigneter' Polyeder:

Polyeder mit mindestens 3-zähligen Drehachsen, deren Kanten eine Kugel mit Mitte M berühren.

Stab = Prisma muss symmetrisch bezüglicher der Ebene [p,M] sein!





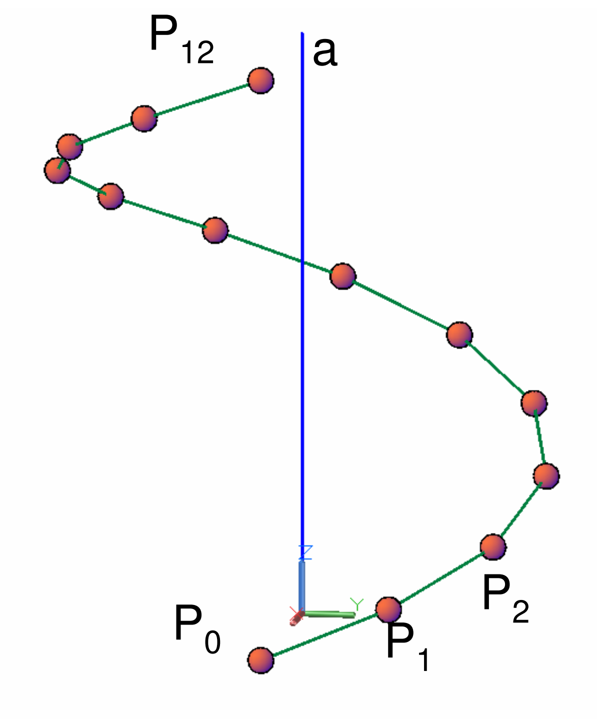


3. Diskrete Schraubung

Gegeben: Eine Schraubung σ (diskret) um Achse a, Drehwinkel β, Vorschub b

Startpunkt P_0 → Schraublage P_1 → Schraublage P_2 → … Eckpunkte P_i

einer ‚**diskreten Schraublinie**'

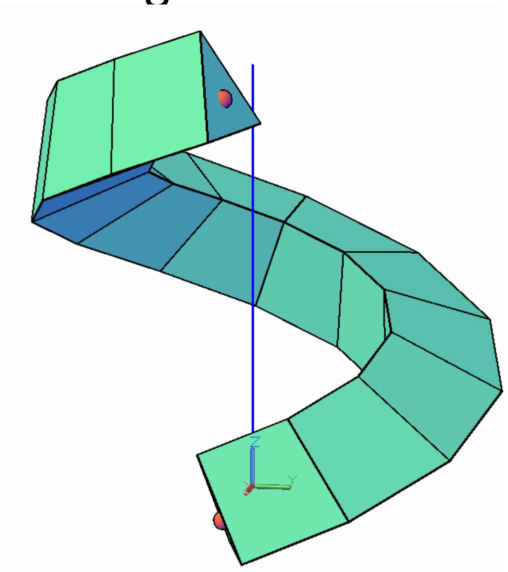


Ziel: Prisma mit Achse p := [P_0, P_1] und regulärem Querschnitt verschrauben
→ Folge von kongruenten Prismen

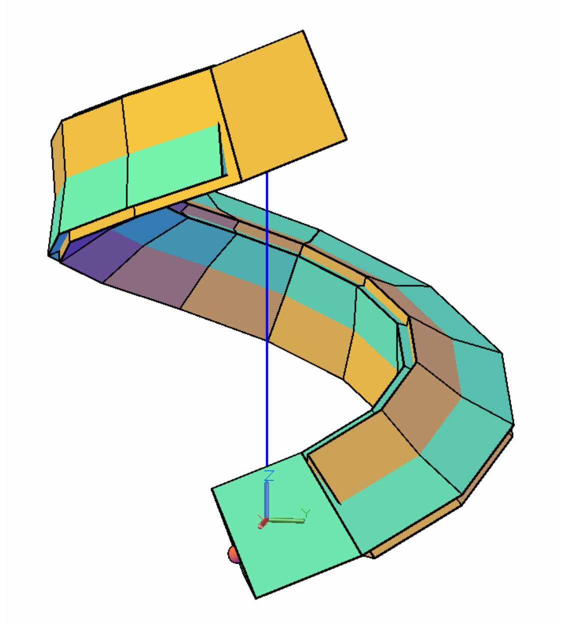
Können die so zusammenpassen wie im Fall der Drehung?

Erster Ansatz: Extrusion eines geeigneten Polygons (Dreieck) längs der diskreten Schraublinie → Extrusionsobjekt aus kongruenten Teilprismen (abgesehen vom Startprisma)

Beobachtung: Obwohl der Extrusionspfad durch die diskrete Schraubung σ in sich übergeht, scheint das für obige Teilprismen nicht mehr zu gelten!



Extrusionsobjekt

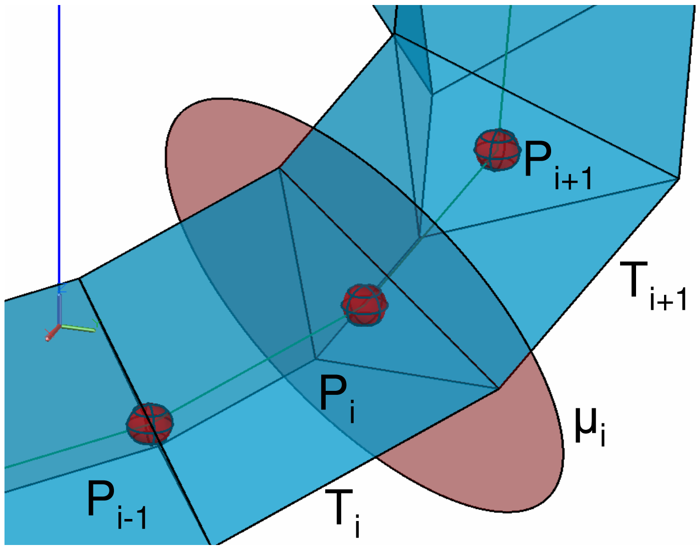


Unter der Schraubung σ

Was ist da los?

Extrusion: Teilprisma T_i (Achse $[P_{i-1}, P_i]$) wird an Gehrungsebenen μ_i (= Symmetrieebene zu Nachbarachse) geschnitten und dann gespiegelt

μ_i … ‚innere' Symmetrieebene der Geraden $[P_{i-1}, P_i]$ und $[P_i, P_{i+1}]$



Schraubung: Teilprisma T_i (Achse $[P_{i-1}, P_i]$) wird in Nachbarprisma $T_{i+1} := \sigma(T_i)$ transformiert.

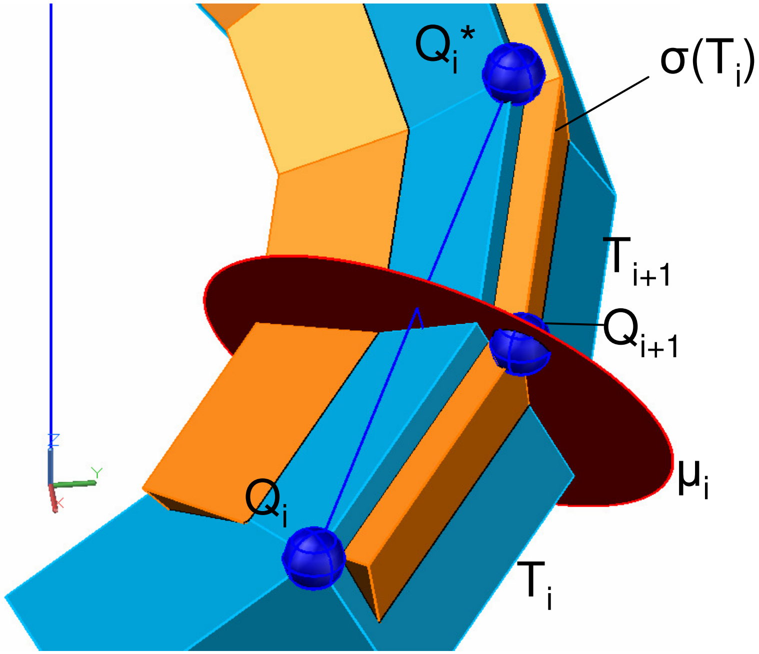
Studium einer Ecke Q_i auf dem Teilprisma T_i zu Achse $[P_{i-1}, P_i]$ (blau):

Spiegelung an μ_i: $T_i \rightarrow T_{i+1}$ (blau)
Ecke $Q_i \rightarrow Q_i^*$

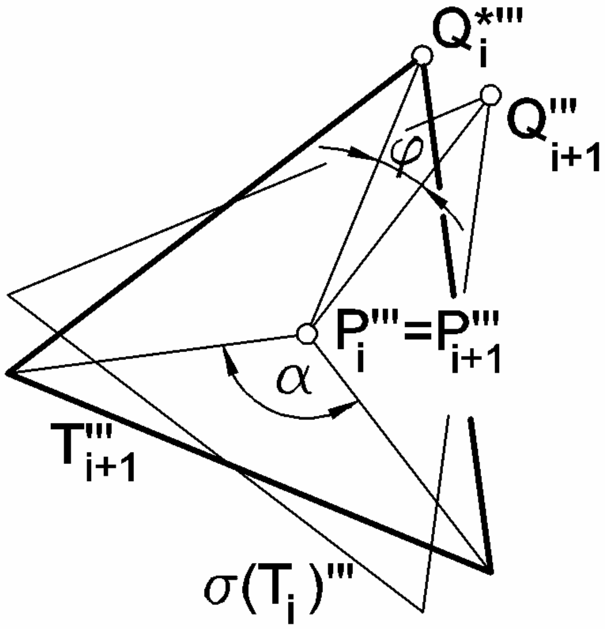
Schraubung σ: $T_i \rightarrow \sigma(T_i)$ (orange),
$Q_i \rightarrow \sigma(Q_i) = Q_{i+1}$ (in μ_i)

Prismen T_{i+1} und $\sigma(T_i)$ sind kongruent mit gemeinsamer Achse $[P_i, P_{i+1}]$.

Daher: Sie gehen durch eine Drehung um diese gemeinsame Achse ineinander über!



Normalschnitt normal zur gemeinsamen Prismenachse: φ … Drehwinkel dieser Drehung



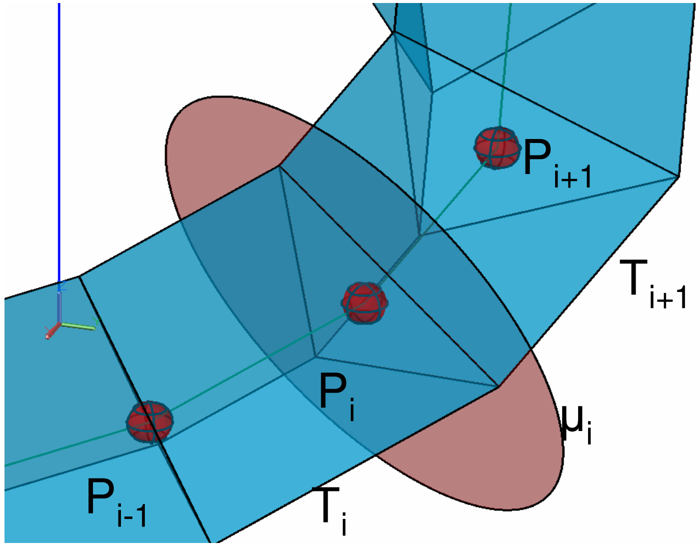
Bem.: φ hängt nicht vom ausgewählten Punkt Q_i auf dem Ausgangsprisma T_i ab.

Normalschnitt des Prismas: reguläres k-Eck → Aufeinanderfolgende Ecken eines regulären k-Ecks werden aus seinem Mittelpunkt unter einem festen Zentriwinkel $\alpha = 2\pi/k$ gesehen

Resultat: Für unseren Ansatz liefert die Extrusion genau dann auch einen Prismenzug, der zur Schraubung σ passt, wenn der Winkel φ ein ganzzahliges Vielfaches dieses Zentriwinkels α ist.

Berechnung:

Überlegung: Die Ebene $[P_{i-1}, P_i, P_{i+1}]$ bleibt bei der Spiegelung an der Gehrungsebene μ_i fest und geht bei der Schraubung σ in die Ebene $[P_i, P_{i+1}, P_{i+2}]$ über. Beide Ebenen enthalten die Prismenachse $[P_i, P_{i+1}]$. Der Schnittwinkel dieser Ebenen stimmt daher mit φ überein.



Punkte berechnen: $P_0 \ldots (x,0,0)$

$P_i \ldots (x\cos(i\beta), x\sin(i\beta), ib)$

Normalvektoren der Ebenen $[P_{i-1}, P_i, P_{i+1}]$

$$\vec{n}_1 := 2x(1-\cos\beta)\,(b\sin\beta, -b\cos\beta, x\sin\beta)^t$$

$$\vec{n}_2 := 2x(1-\cos\beta)\,(b\sin 2\beta, -b\cos 2\beta, x\sin\beta)^t$$

→ **Schnittwinkel**:

$$\cos\varphi = (x^2\sin^2\beta + b^2\cos\beta)/(x^2\sin^2\beta + b^2).$$

Resultat:

Übereinstimmung mit dem m-fachen Zentriwinkel α des regulären k-Ecks liegt genau dann vor, wenn für den Abstand x des Startpunktes P_0 von der Schraubachse a gilt:

$$x = \pm \frac{b}{\sin\beta} \sqrt{\frac{\cos(2\pi m/k) - \cos\beta}{1 - \cos(2\pi m/k)}}$$

Größen: m = 1, …, k-1

Diskrete Schraubung σ: Drehwinkel β und Vorschub b

Frage: Geht sich das überhaupt reell aus?

Antwort: Ja, aber nicht für alle Kombinationen von k, m, β und b.

Werte für interessante Beispiele zu b = 1, β = π/6:

Für m = 1 und k = 3, …, 36 - Resultat für x:

{-1.90859 i, -1.86121 i, -1.79567 i, -1.7112 i, -1.6052 i, -1.4732 i, -1.30744 i, -1.0927 i, -0.790055 i, 0., 0.823734, 1.18803, 1.48277, 1.7436, 1.98393, 2.21046, 2.42705, 2.63616, 2.83944, 3.03805, 3.23287, 3.42453, 3.61354, 3.8003, 3.98511, 4.16825, 4.34992, 4.53029, 4.70952, 4.88774, 5.06504, 5.24153, 5.41728, 5.59236}

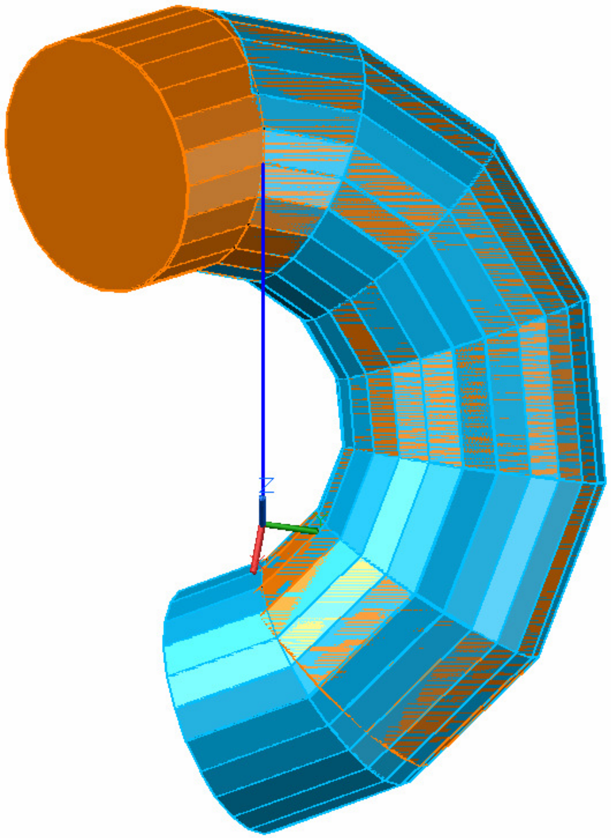
Für m = 2 und k = 3, …, 36 – Resultat für x:

{-1.90859 i, -1.93185 i, -1.92452 i, -1.90859 i, -1.88723 i, -1.86121 i, -1.83071 i, -1.79567 i, -1.75593 i, -1.7112 i, -1.66112 i, -1.6052 i, -1.54283 i, -1.4732 i, -1.39523 i, -1.30744 i, -1.20769 i, -1.0927 i, -0.957022 i, -0.790055 i, -0.564702 i, 0., 0.576608, 0.823734, 1.01891, 1.18803, 1.34098, 1.48277, 1.61635, 1.7436, 1.86581, 1.98393, 2.09863, 2.21046}

Daher: Für kleine Eckenzahlen k existieren keine reelle Lösungen!

Beispiel: m=1, k = 24 → x = 3.42453

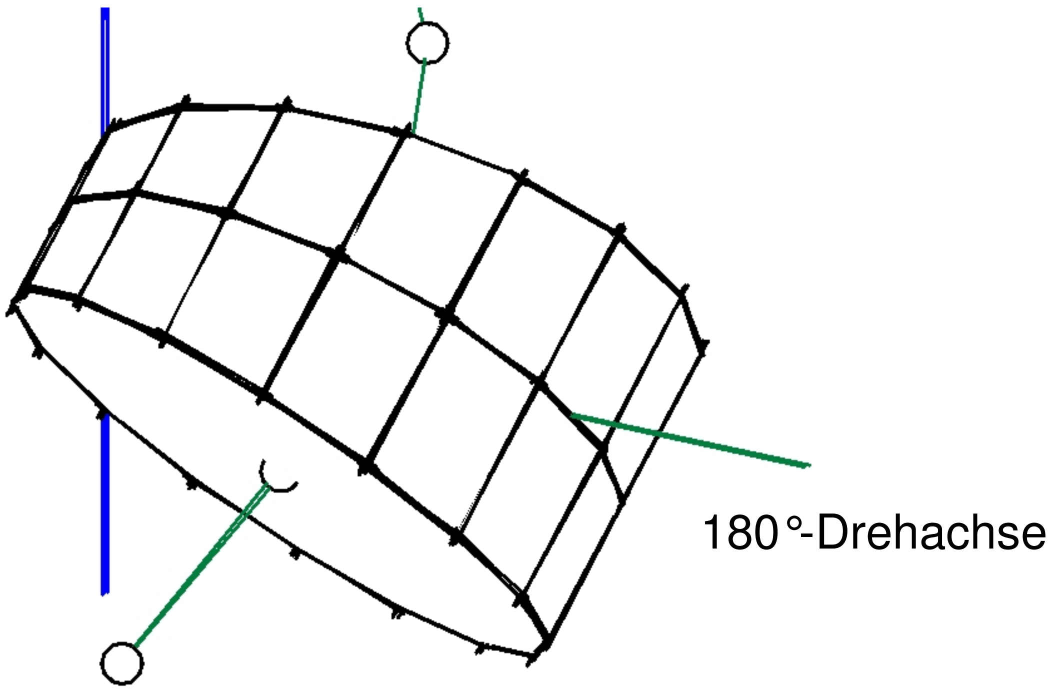
Ausgangsstück und verschraubtes Stück verschieden gefärbt



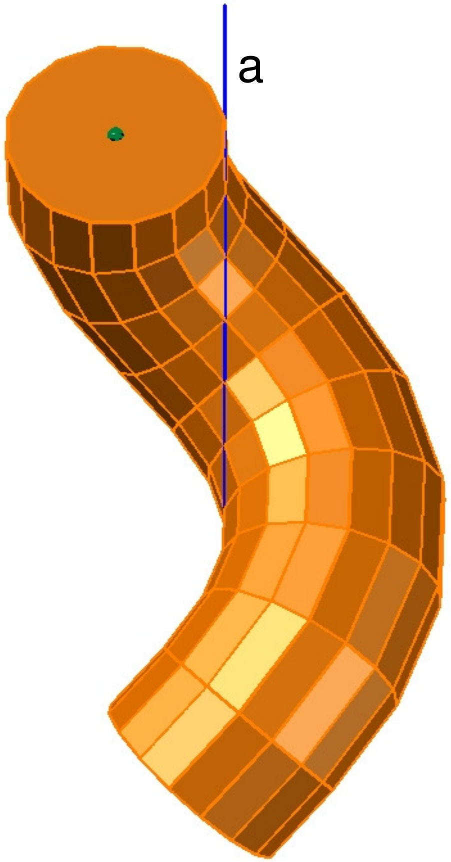
Bem.: Auf den Radius des verwendeten k-Ecks kommt es nicht an!

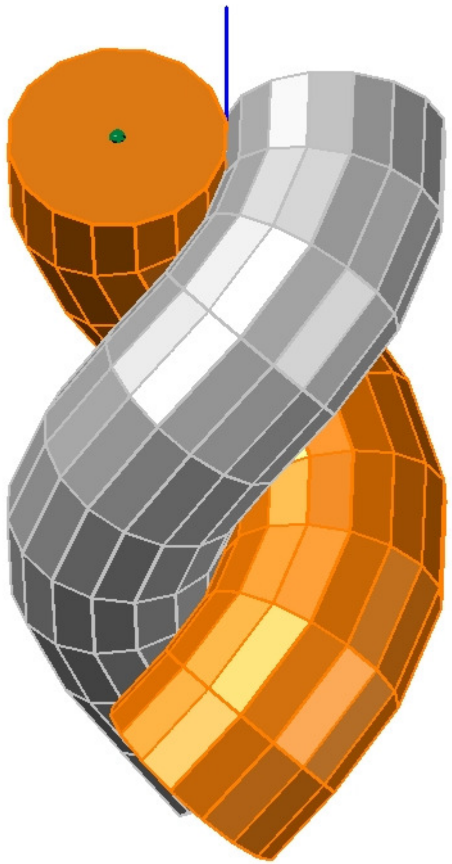
Teilstücke besitzen i.A. **keine Spiegelsymmetrie** mehr!

Bei geeignetem Normalschnitt kann eine 180°-Drehsymmetrie auftreten:

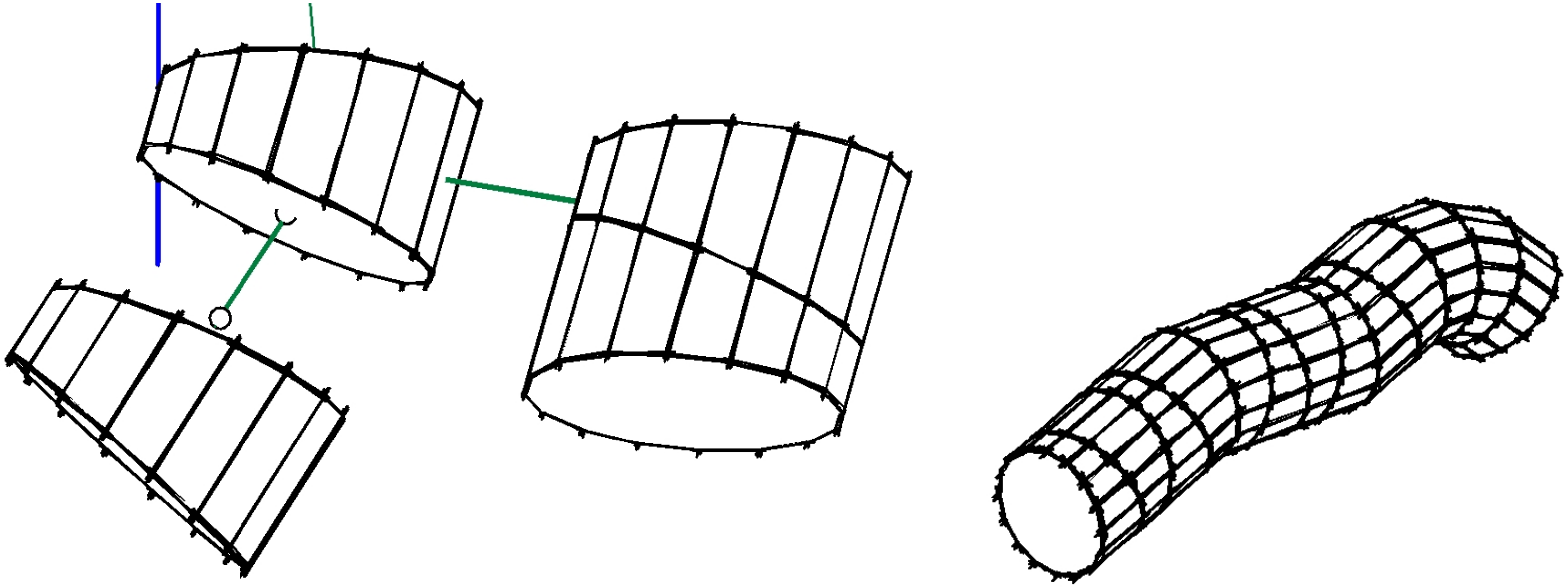


Weiteres Beispiel: Schraubachse a auf der Oberfläche
→ ‚berührende Prismenschüsse'





Andere Prismenschüsse erzeugbar, wenn Nachfolgeprisma nachgesetzt wird (180°-Drehung):



Kombinationen in beliebiger Reihenfolge möglich → unzählige Beispiele

Zielgerichtet? Forderungen stellen!

Z.B.: **Der Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Prismenachsen habe vorgeschriebenen Wert!**

$$P_i \ldots (x\cos(i\beta), x\sin(i\beta), ib)$$

Forderung: Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{P_1P_2}$ seien orthogonal!

$\rightarrow$

$$b = \pm x\sqrt{2\cos\beta\ (\cos\beta - 1)}$$

Von vorher:

$$x = \pm\frac{b}{\sin\beta}\sqrt{\frac{\cos(2\pi m/k) - \cos\beta}{1 - \cos(2\pi m/k)}}$$

$\rightarrow$ Bedingung für den Drehwinkel β!

Die Bedingung für den Drehwinkel β ergibt eine **kubische Gleichung** für y := cos β

$$2y^3 - y^2(\cos(2\pi m/k)+3) + 2y\cos(2\pi m/k) +$$
$$+1 - \cos(2\pi m/k) = 0$$

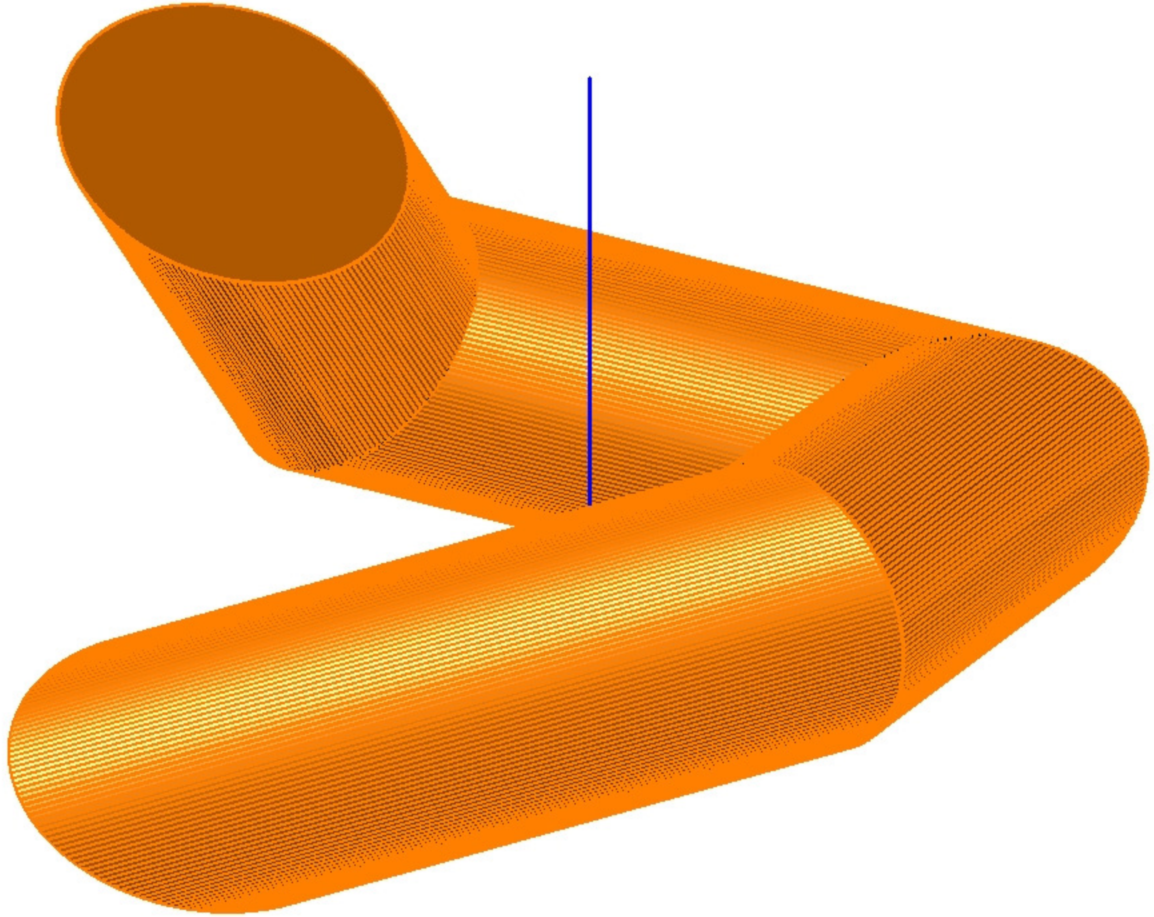
Lösungen: y = 1 doppelt (unbrauchbar) und $y = 0.5[\cos(2\pi m/k) - 1]$

Daraus ergibt sich β = 92.1812°

Nun Berechnung von x wie vorhin

→ Leider bei m=1 erst ab k = 166 reelle Lösungen!

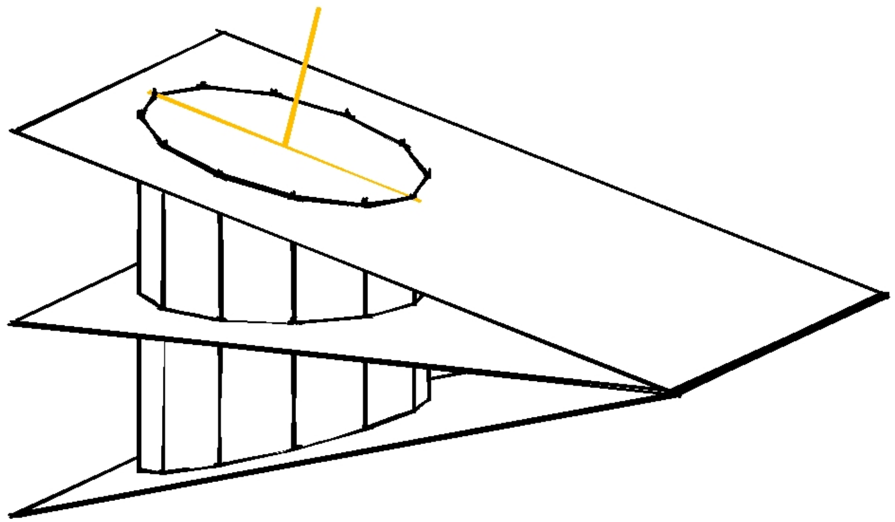
Prismen mit regelm. 166-Eck als Normalschnitt lassen sich geeignet verschrauben!
(x = 2.77017)



4. Weitere Ansätze: Prismen, deren Normalschnitte nicht mehr regulär sind

M. ZAWIDZKI - K. NISHINARI: Modular Pipe-Z System for Three-Dimensional Knots. Journal for Geometry and Graphics 16/1, 81—87 (2013).

Primsmenteile mit Symmetrie bezüglich Normalschnitten, deren Gehrungsschnitte reguläre k-Ecke sind.



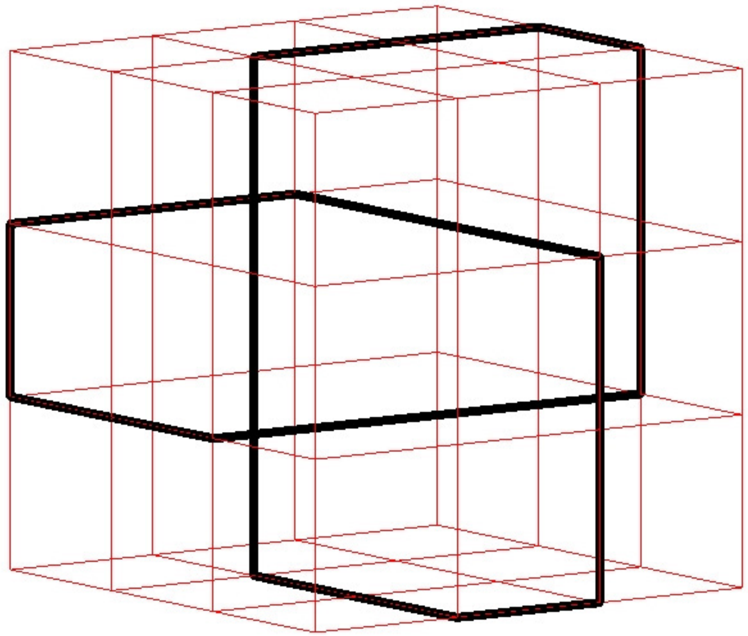
Diese Teile können um die Drehachse des Gehrungsschnittes (reguläres k-Eck) um geeignete Winkel verdreht werden
→ grosse Formenvielfalt

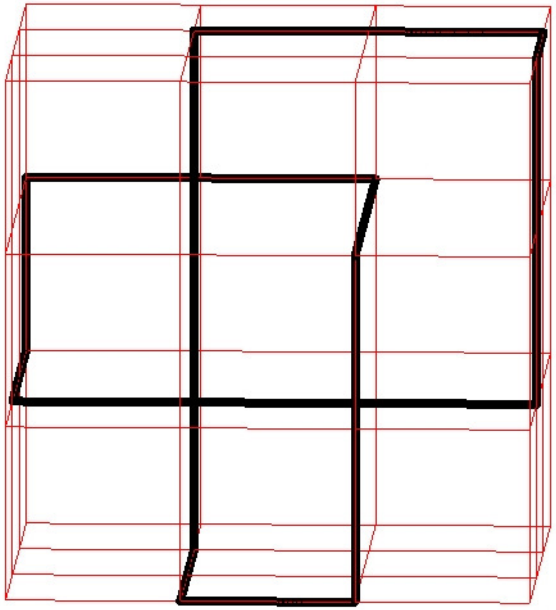
Aus obiger Arbeit:
‚Trefoil-Knot'

Aber: Sind geschlossene Konfigurationen tatsächlich erreichbar?

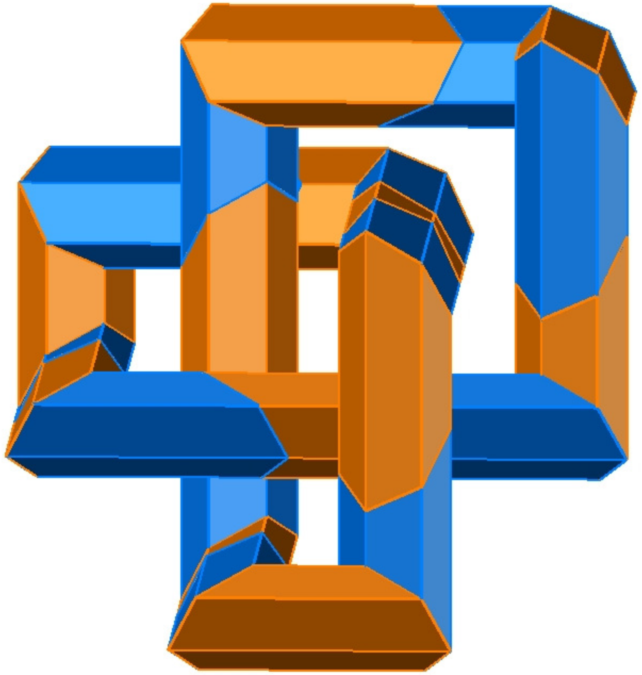
Versuch zu ‚Trefoil-Knot' (O.R.):

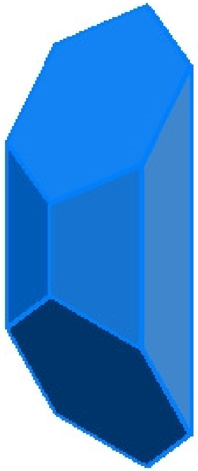
Start mit Knoten (Kantenzug auf Würfelgitter)





Versuch zu ‚Trefoil-Knot' (O.R.):
Nun Prismenquerschnitt in Gehrungsebene als regulären Vieleck wählen, extrudieren und ‚am anderen Ende' ebenfalls auf Gehrung schneiden



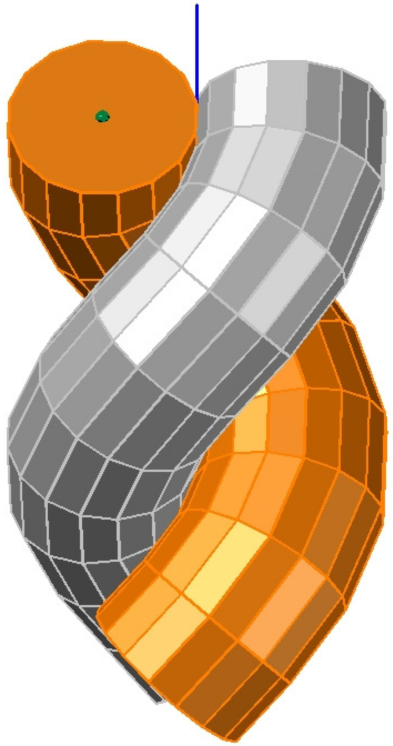


Teilstück

Verallgemeinerungen auf weitere Knoten → viele weitere Möglichkeiten!

Zusammenfassung

- Einige Beispiele
- Gehrungsschnitte bei Drehung
- Diskrete Schraubung und gerade Prismenstücke mit regulärem Normalschnitt
- Verallgemeinerungen



→ schöne Beispiele im Spannungsfeld zwischen analytisch-geoemtrischen Methoden und dem Modellieren mit CAD-Paketen

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit!