

Geometrie und Spezielle Relativitätstheorie

Alles,
was man überhaupt erklären kann,
kann man auch einfach erklären
(Wittgenstein, Kastenberger)

**Vortragsreihe deutscher Naturforscher
gegen Einsteins allgemeine
Relativitätstheorie!**

Die in wissenschaftlichen Kreisen bisher nicht beachtete Methode, mit Hilfe von Reklamemitteln die Öffentlichkeit für das sogenannte Prinzip zu beeinflussen, einer Theorie, deren für weittragend erklärte philosophische Bedeutung in allen Punkten des Beweises bedarf, veranlaßt uns, auch über diese aus der bisher beachteten Kiste herauszutreten, um – ungenügend – bis an die breite Öffentlichkeit zu wenden.

Die einseitig betriebene Dringlichkeitsangelegenheit, welcher nicht unbewußt die Öffentlichkeit mit ebensolcher Wirkung entgegensteht, u. Verstand, dem namentlich deutsche Gelehrte angeben, den Weg des öffentlichen Vortrages zu beschreiten, damit das deutsche Publikum neutraler Seite eine möglichst vielfältige Beurteilung der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie erhält.

Es sprechen zunächst am
Dienstag, 24. August, im gr. Saale der Philharmonie, abends 8 Uhr,
Herr Paul Weyland, Berlin:
über Einsteins Relativitätstheorie als wissenschaftliche Massenirrtum.

Donnerstag, 2. September, im gleichen Saale,
Herr Prof. Dr. K.
Erkenntnistheorie und Relativitätstheorie.

Herr Prof. Dr. E. Gehrde, Berlin:
Kritik der Einsteinschen Relativitätstheorie.

Herr Dr. ing. Gla.
Physikal. Einwände gegen Einsteins Relativitätstheorie.

Dreizeh der Karten von 12–2 Mark bei den Theaterkassen von H. Weitzel, Leipziger Str. 37 und Kautzschstr. 7, Note & Dr. Theodor Weiser, Potsdamer Str. 134b, sowie an der Abendkasse.

Beitragende deutscher Arbeitsgemeinschaft werden folgen und rechtliche Befugnisse.

Alle den Namen führenden Teilnehmer werden für persönliche Zuhilfenahme an die persönliche Mitarbeit der Teilnehmerinnen durch Paul Weyland, Berlin N 134, bitten.

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{\beta\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma} \frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} \\
 & = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sum_{\beta\gamma} \mathfrak{M}_{\beta\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma\delta\epsilon} \mathfrak{M}_{\beta\gamma} \mathfrak{M}_{\delta\epsilon} g^{\delta\delta} \frac{\partial g^{\gamma\epsilon}}{\partial x^\alpha}.
 \end{aligned}$$

Nach (61a) läßt sich die vierfache Summe hier umformen in:

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma\delta\epsilon\theta\eta} \mathfrak{M}_{\beta\gamma} \mathfrak{M}_{\delta\epsilon} g^{\delta\delta} g^{\theta\theta} g^{\epsilon\epsilon} \frac{\partial g_{\theta\eta}}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\delta\epsilon\theta\eta} \mathfrak{M}^{\delta\delta} \mathfrak{M}_{\delta\epsilon} g^{\epsilon\epsilon} \frac{\partial g_{\theta\eta}}{\partial x^\alpha}.$$

Setzt man die berechneten Ausdrücke in (131) ein, so findet man:

$$\left. \begin{aligned}
 F_\alpha &= - \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial (\sqrt{-g} \mathfrak{M}_{\alpha\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma})}{\partial x^\beta} \\
 &+ \frac{1}{4} \sum_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\mathfrak{M}_{\beta\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma}) + \frac{1}{2} \sum_{\delta\epsilon\theta\eta} \mathfrak{M}^{\delta\delta} \mathfrak{M}_{\delta\epsilon} g^{\epsilon\epsilon} \frac{\partial g_{\theta\eta}}{\partial x^\alpha}.
 \end{aligned} \right\} (131a)$$

Nach § 6, f) ist $\frac{1}{2} \sum_{\beta\gamma} \mathfrak{M}_{\beta\gamma} \mathfrak{M}^{\beta\gamma} = \mathfrak{M}^2$ das Quadrat des Absolutwertes von \mathfrak{M} .



Fächerportal Geometrie

Mit vielen geometrische Themen (aktuell, historisch, wissenschaftlich, ...), Terminen, Literatur, Lehrplänen, ...

<http://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad.html>

Geometrie & Kunst: Perspektive in der Malerei

PPT-Präsentation (9MB) des Vortrages in Strobl 2013

<http://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad/klassische-fachgebiete/geometrie-und-kunst/detail/geometrie-als-werkzeug-der-kunst-perspektive-in-der-malerei.html>

Lehrgang Hyperbolische Geometrie

Grundlagen der hyperbolischen Geometrie auf anschauliche (d.h. auch konstruktive) Weise. (Poincaré sche Halbebenenmodell verwendet.)

<http://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad/klassische-fachgebiete/nichteuklidische-und-mehrdimensionale-geometrie/detail/lehrgang-hyperbolische-geometrie.html>

Der NURBS - das unbekannte Wesen

Mathematischer Hintergrund zu diversen Werkzeugen, deren Verwendung in den modernen CAD Programmen zur Selbstverständlichkeit geworden ist.

<http://geometrie.eduhi.at/data/AK/NURBS/02.HTM>

Architektur - Rundgang

2012 wurde monatlich eine besonders spannende Architektur vorgestellt...

<http://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad/klassische-fachgebiete/geometrie-und-architektur/detail/architektur-quiz.html>

Soweit ein wenig Eigenwerbung ...
Kontakt:

Mag. Alois Kastenberger
kastenberger@diefenbach.at

Ziele

- Wiederholung :
Lineare Abbildungen, Isometrie,
Lorentz- (oder Laguerre-)
Transformation
- Kennenlernen:
C- (oder Minkowski-)
Geometrie, Zyklographie
- Anwenden:
auf die Galilei- Geometrie,
Grundgedanken der
Relativitätstheorie
- Schwerpunkt:
wesentliche Teile der SRT sind
rein geometrischer Natur und
aus der Geometrie heraus
erklärbar.

Inhalt

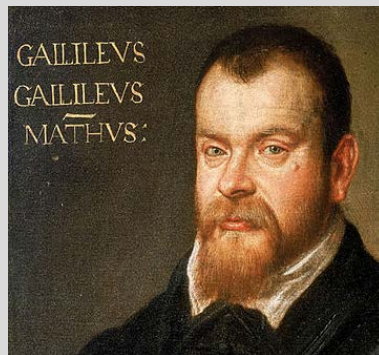
- Quellen, Zitate
- Skalarprodukte
- Projektive Erklärung der
Isometrien
- Pseudoeuklidische Isometrie
- Pseudoeuklidische Geometrie
in der Ebene
- C-Geometrie im Raum,
Zyklographie
- Galilei´s Welt: die absolute
Zeit
- Einstein: das
Relativitätsprinzip und die neue
Art des Denkens
- Ausblick: in welcher
Geometrie leben wir?

Ich habe vernommen, zu Naukratis in Aegypten sei einer der dortigen alten Götter gewesen, dem auch der Vogel geheiligt ist, den sie Ibis nennen, während der Gott selbst den Namen Teuth führt; dieser habe zuerst Zahlenlehre und Rechenkunst erfunden und Geometrie und Astronomie

(Rede von Sokrates in: Platon, Phaidros)

Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.

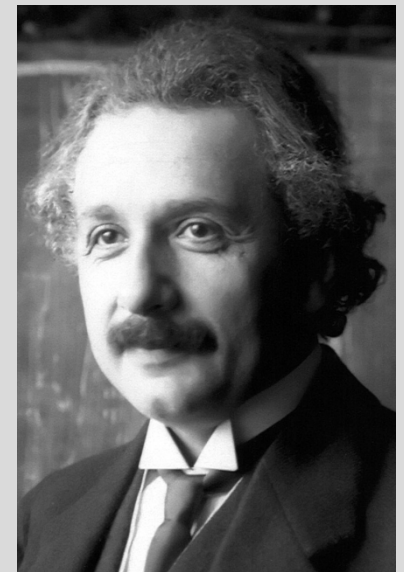
(Galileo Galilei)



μηδεὶς εἴσιτω
ἀγεομετρικὸς
Kein der Geometrie
Unkundiger soll hier
eintreten!
(Platon)

Die Gesetze, nach denen sich die Zustände der physikalischen Systeme ändern, sind unabhängig davon, auf welches von zwei relativ zueinander in gleichförmiger Bewegung befindlichen Koordinatensystemen diese Änderungen bezogen werden.

Zwei Dinge sind unendlich, das Universum und die menschliche Dummheit, aber bei dem Universum bin ich mir noch nicht ganz sicher.
Einstein



Die Originalarbeit von Albert Einstein (1905)
http://www.physik.fu-berlin.de/~kleinert/files/1905_17_891-921.pdf

Allgemeine **Relativitätstheorie** Vorlesung von
Dr. Meik **Hellmund** Universität Leipzig
<http://www.math.uni-leipzig.de/~hellmund/GR/skript1.pdf>

Walter Benz
Geometrische Transformationen unter
besonderer Berücksichtigung der
Lorentztransformationen
BI Wissenschaftsverlag (1992)

Albert Einstein
Über die spezielle und allgemeine
Relativitätstheorie
<https://archive.org/stream/berdiespezielle00unkngoog#page/n86/mode/2up>

Max Born
Einsteins Relativitätstheorie
<http://de.scribd.com/doc/84057032/Die-Relativitaets-Theorie>

Franz Embacher
Spezielle Relativitätstheorie
Argumentationen zur Herleitung
<http://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/SCRIPT/RT/>

Wolfgang Kirschhofer
Eine kleine Einführung in die Spezielle
Relativitätstheorie
<http://members.kabsi.at/wkirschenhofer/Reltheorie11.htm>

Andreas Lindner
Spezielle Relativitätstheorie
http://teacher.eduhi.at/alindner/Dyn_Geometrie/RelTheorie/

Viele weiter geometrische Themen auf
<http://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad.html>

Dierck-Ekkehard Liebscher
Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal
Akademie-Verlag (1991)

Peter Stocki (Dipl.-Phys., OStR)
Schiller-Gymnasium Heidenheim
Die Spezielle Relativitätstheorie und der
Übergang zur Allgemeinen Relativitätstheorie
<http://rel.sg-hdh.de/Materialien/Script0506.pdf>

Skalarprodukte und Normen

Euklidischer Raum: affiner Vektorraum mit einem **Skalarprodukt**. Das Skalarprodukt ordnet je zwei Vektoren eine reelle Zahl zu, es hat folgende Eigenschaften:

- $A \cdot B = B \cdot A$
- $A \cdot (uB + vC) = u \cdot A \cdot B + v \cdot A \cdot C$
- $A \cdot X = 0$ für alle X bei festem $A \Rightarrow A = 0$

Weiters läßt sich **Orthogonalität** definieren: zwei Vektoren A, B heißen orthogonal, wenn das Skalarprodukt $A \cdot B = 0$ ist.

Das Skalarprodukt zieht eine **Norm** nach sich:

Die Norm eines Vektors ist $\sqrt{A \cdot A}$.

Besonderheiten: sie kann sein:

- $=1$: Einheitsvektor
- $=i$: imaginärer Einheitsvektor
- $=0$: isotroper Vektor

Abstand zweier Punkte A, B : $d = \sqrt{(A-B) \cdot (A-B)}$

Skalarprodukt bezüglich einer Basis:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad Y = \sum_{k=1}^n y_k e_k, \quad XY = \sum_{i,k=1}^n g_{i,k} x_i y_k$$

Mit einer gewissen Matrix (g_{ik})

Es lassen sich Basen finden, bezüglich derer alle gemischten Glieder der Matrix $=0$ sind

▪ Die Glieder der Hauptdiagonale sind ± 1 und alle anderen $=0$.

▪ Die Anzahl der Minuszeichen hängt nicht von der Basis ab, sie ist charakteristisch für den gegebenen Raum.

▪ **Index** = Anzahl der negativen Vorzeichen und zugleich auch der imaginären Einheitsvektoren

▪ Index = 0: eigentlicher euklidischer Raum

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \text{und} \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

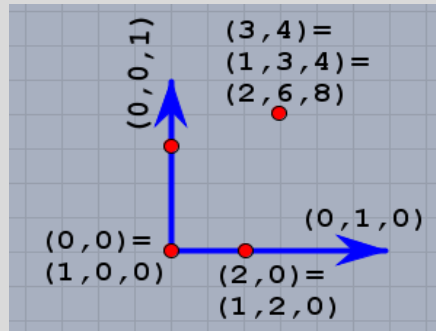
▪ Index = 1: pseudoeuklidischer Raum, Minkowski Raum

$$X \cdot Y = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n, \quad \text{und} \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2}$$

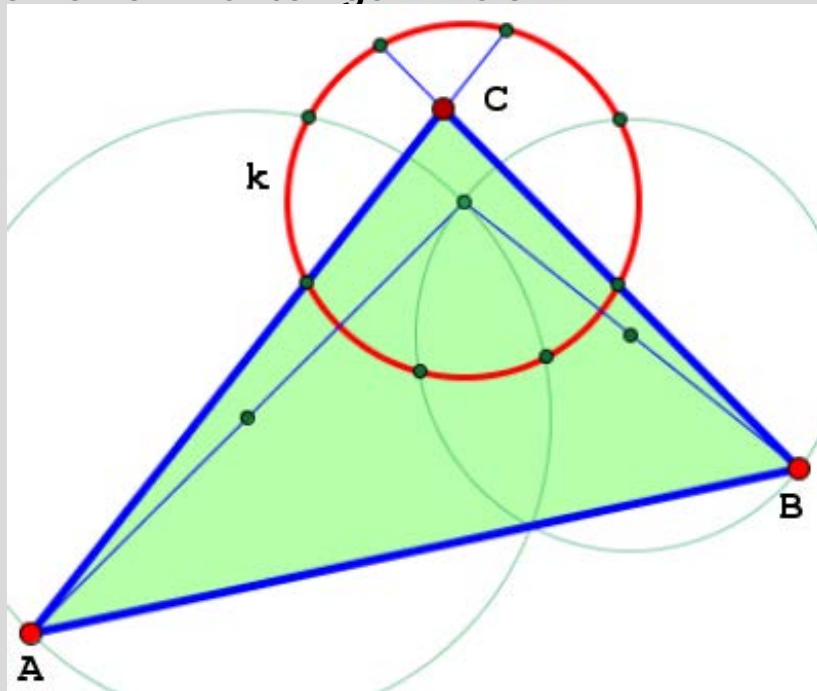
▪ Isometrien (affine Transformationen, die die Längen erhalten) sind im euklidischen Raum die Bewegungen, im Minkowski Raum heißen sie **Lorentz Transformationen**, im Umkreis der Zyklographie heißen sie **Laguerre Transformation**. Sie bilden (ebenso wie die euklidischen Bewegungen) eine Gruppe, die **Lorentzgruppe** oder **Laguerre Gruppe**.

Homogene Koordinaten

$$\begin{aligned}x_1 &:= x^* x_3, & x &:= x_1/x_3, \\x_2 &:= y^* x_3, & y &:= x_2/x_3, \\x_3 &:= x_3\end{aligned}$$



Euklidische ISOMETRIE und POLARITÄT an einem nullteiligen Kreis



$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

- $A(a_1/a_2/a_3)$ ein bel. Punkt „außerhalb“ von k ,
 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$,
 Polare bezüglich k = Antipolare zum reellen Vertreterkreis $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$.
- Darauf $B(b_1/b_2/b_3)$ „außerhalb“ von k
 $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 > 0$ und $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$.
 Seine Polare $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$.
- $C(c_1/c_2/c_3)$ ist Schnittpunkt von a und b

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \quad c_1 = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Auf c liegen A und B , daher

$$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0, \quad c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = 0$$

- Normierung der Koordinaten von A, B, C

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \quad \text{und}$$

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$

- Zusammenfassen von A, B, C zu Matrix D

$$-\text{Det}(D) = 1$$

– Zeilen normiert:

– Zeilen orthogonal:

– Folgerung daraus: Spalten normiert

– Spalten orthogonal

Orthonormalbasis (ONB)

$$\langle a, a \rangle = \langle b, b \rangle = \langle c, c \rangle = 1,$$

$$\langle a, b \rangle = \langle b, c \rangle = \langle c, a \rangle = 0 \text{ sind.}$$

Isometrie oder Bewegung

Abbildung φ mit der Eigenschaft:

$$\langle \varphi(a), \varphi(b) \rangle = \langle a, b \rangle \text{ für alle } a, b$$

Eine Isometrie liegt genau dann vor, wenn das Bild einer ONB wieder eine ONB ist.

A sei die Matrix einer Linearen Abbildung φ .

Dann sind äquivalent:

- φ ist eine Isometrie
- Die Spaltenvektoren bilden eine ONB
- Die Zeilenvektoren bilden eine ONB
- Parameterdarstellung:

$$= \begin{pmatrix} t^2 + u^2 - v^2 - w^2 & 2(tw + uv) & 2(uw - tv) \\ 2(uv - tw) & t^2 - u^2 + v^2 - w^2 & 2(vw + tu) \\ 2(uw + tv) & 2(vw - tu) & t^2 - u^2 - v^2 + w^2 \end{pmatrix}$$

- Es gibt ONB, für die die Matrix eine Diagonalmatrix ist, d.h. jede Koordinate wird nur mit einem Wert multipliziert.
- **Eigenwerte, Eigenvektoren.**
- Berechnung: $Dx = k \cdot x$ oder $(D - k \cdot E) = 0$
- nur dann lösbar, wenn Determinante = 0 ist, charakteristisches Polynom

$$x^3 - x^2(4t^2 - 1) + x(4t^2 - 1) - 1 = 0$$

1. Eigenwert: $x_1 = 1$

$E \cdot X = x_1 \cdot X$ hat die Gestalt

$$wx - uz = 0, wy - vz = 0, 0x + 0y + 0z = 0$$

Eigenvektor **[u,v,w], Drehachse.**

- 2.+3. Eigenwert konjugiert komplex
- 2.+3. Eigenvektor isotrop, normal zur Achse.
- Ist $P = p_1 \cdot EV_1 + p_2 \cdot EV_2 + p_3 \cdot EV_3$ dann ist der Bildpunkt
 $P' = p_1 \cdot EV_1 + x_2 p_2 \cdot EV_2 + x_3 p_3 \cdot EV_3$
- (mit $x_1 = 1$).

Bedeutung von t: legt den Drehwinkel fest.

- **Die durch $X' = D \cdot X$ mit vermittelte Affinität ist eine Drehung.**
- **Dabei ist $a = (u,v,w)$ ein Richtungsvektor der Drehachse (sie geht durch O), und**
- **$s = 2 \cdot \text{ArcCos}(t)$ der Drehwinkel.**

Mit dem Winkel s ist weiters:

$$x_2 = \exp(-i \cdot s), x_3 = \exp(i \cdot s)$$

Beispiel

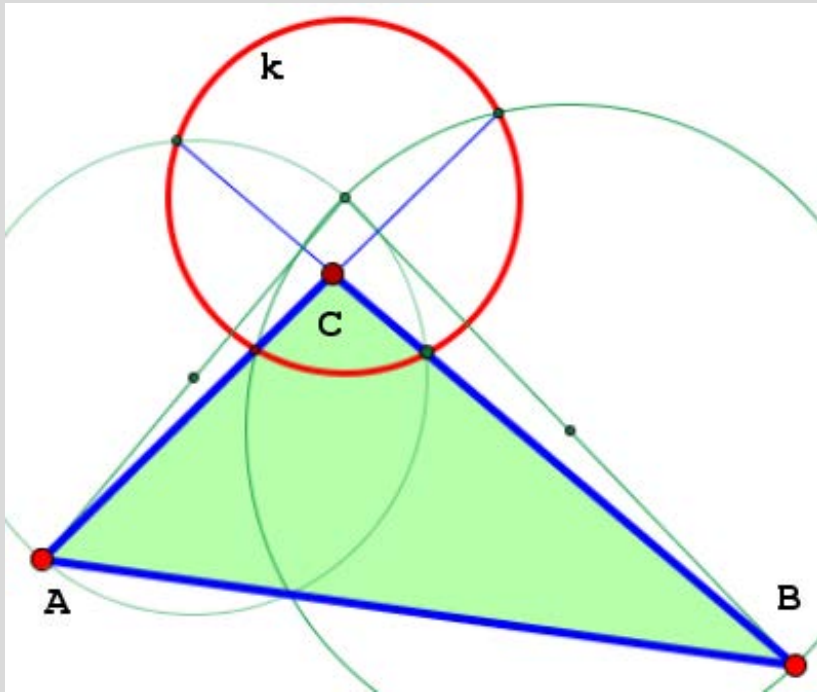
$$D = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{pmatrix}$$

$$25x^3 - 39x^2 + 39x - 25 = 0$$

$$EW_1 = 1, \quad EW_2 = 0.28 - 0.96i, \quad EW_3 = 0.28 + 0.96i$$

$$EV_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad EV_2 = \begin{pmatrix} -1 - 3i \\ -1 + 3i \\ 4 \end{pmatrix}, \quad EV_3 = \begin{pmatrix} -1 + 3i \\ -1 - 3i \\ 4 \end{pmatrix}$$

Euklidische ISOMETRIE und POLARITÄT an einem reellen Kreis



$$k \dots x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

$$a \dots a_1 x_1 + a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$$

$$b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 > 0 \text{ und } a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 = 0$$

$$b \dots b_1 x_1 + b_2 x_2 - b_3 x_3 = 0$$

$$c_1 = \begin{vmatrix} a_2 & -a_3 \\ b_2 & -b_3 \end{vmatrix}, c_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ -b_1 & b_3 \end{vmatrix}, c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & -b_2 \end{vmatrix}$$

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 - c_3 a_3 = 0 \text{ und } c_1 b_1 + c_2 b_2 - c_3 b_3 = 0$$

Orthonormalitätsrelationen für die LORENZ-MINKOWSKI-Metrik:

- $\text{Det}(D) = 1$

- Zeilen normiert:

$$a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 = 1, \quad c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 = -1$$

- Zeilen orthogonal:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_3 b_3 = b_1 c_1 + b_2 c_2 - b_3 c_3 = c_1 a_1 + c_2 a_2 - c_3 a_3 = 0$$

- Folgerung daraus: Spalten normiert

$$a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 = 1, \quad a_3^2 + b_3^2 - c_3^2 = -1$$

- Folgerung daraus: Spalten orthogonal

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 - c_1 c_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 - c_2 c_3 = a_3 a_1 + b_3 b_1 - c_3 c_1 = 0$$

- Rationale Parameterdarstellung

$$L = \frac{\begin{pmatrix} t^2 - u^2 + v^2 - w^2 & 2(tw - uv) & 2(uw - tv) \\ -2(uv + tw) & t^2 + u^2 - v^2 - w^2 & 2(vw + tu) \\ -2(uw + tv) & 2(ut - vw) & t^2 + u^2 + v^2 + w^2 \end{pmatrix}}{(t^2 - u^2 - v^2 + w^2)^3}$$

Beispiel:

$$L = \begin{pmatrix} 3/4 & -1 & 3/4 \\ 29/15 & 1/5 & 5/3 \\ 109/60 & -1/5 & 25/12 \end{pmatrix}$$

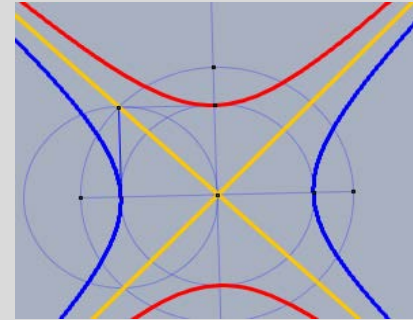
- $k_1 = 1$, $EV_1 = (4/-7/-8)$, Länge 1

- $k_2 = 5/6$, $EV_2 = (3/-4/-5)$, Länge 0, also C-Gerade

- $k_3 = 6/5$, $EV_3 = (5/-12/-13)$, Länge 0, also C-Gerade

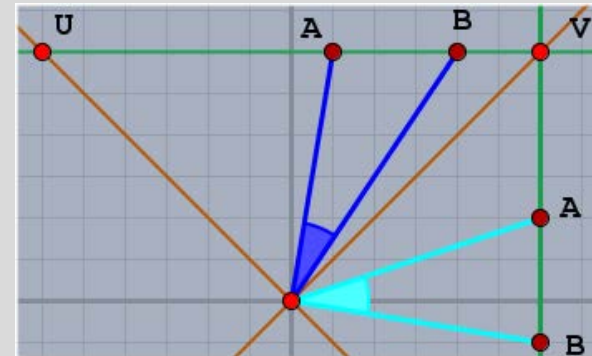
Winkelmessung

Doppelverhältnis der beiden Winkelschenkel mit den durch den Scheitel gelegten Lichtgeraden
Der Winkel zweier lichtartiger oder raumartiger Geraden ist reell, einer licht- und einer raumartigen imaginär.



Formel und Zahlenbeispiel

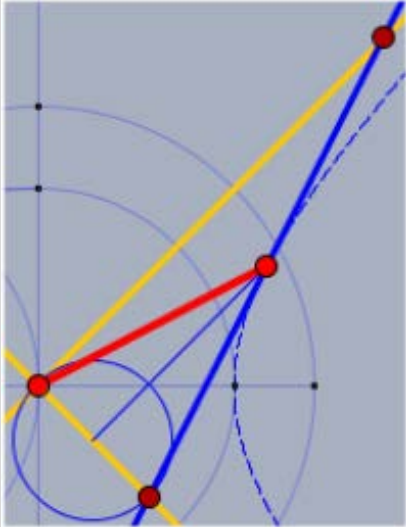
$$\alpha = \frac{1}{2} \ln DV(U, V, A, B) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{AU}{AV} : \frac{BU}{BV} \right)$$



$$= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{-7}{5} : \frac{-10}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{7}{25} \approx -0.6 \cong -36.5^\circ$$

Normalabstand Punkt-Gerade

Wie im euklidischen Fall Normale auf die Gerade, zum Lotfußpunkt, der Abstand ist der größtmögliche, alle anderen sind kleiner(!!!).



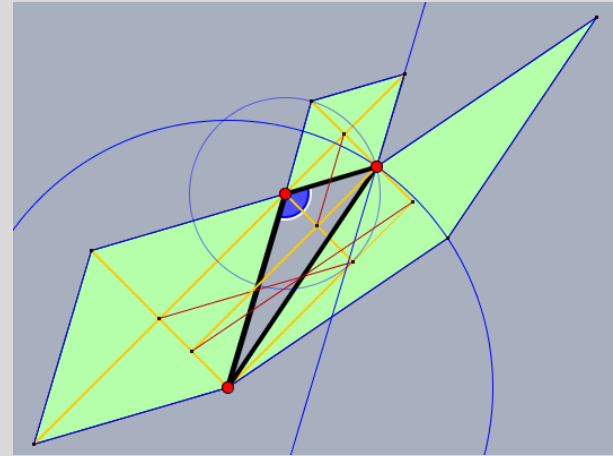
Quadrat

über der Strecke AB: ein Lichteck herum legen (grünlich), dessen andere Diagonale Winkel und Länge angibt (das i-fache)

Pythagoras

man stellt das Dreieck so auf, dass die Katheten auf der x- bzw. der t-Achse liegen, die Länge der Hypotenuse ist dann:

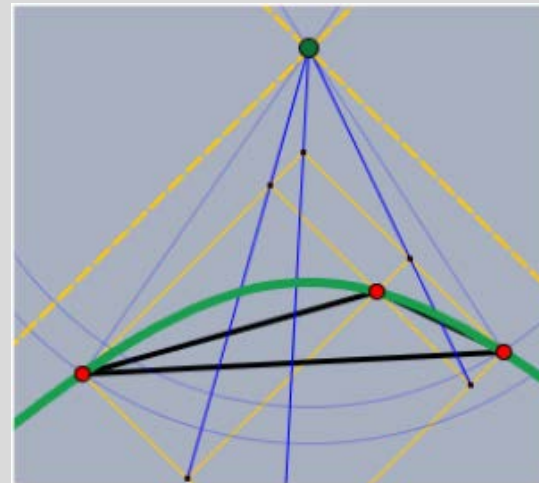
$$\text{Hyp}^2 = \text{Kath}_1^2 - \text{kath}_2^2$$



Peripheriewinkelsatz

A,B,C seien drei Punkte auf einem C-Kreis, A und B fest, C beweglich. Dann ist der C-Winkel bei C immer gleich.

Umkreismittelpunkt



Winkelsymmetrale

w zweier Geraden a, b und die beiden Lichtgeraden u, v durch den Scheitel.

Dann muss sein:

$DV(u, v, a, w) = DV(u, v, w, b)$, was man besser auf einer beliebigen Geraden realisiert, noch besser aber auf einer Geraden $//v$.

Dann kann man alles Unendliche „wegkürzen“ und die Bedingung reduziert

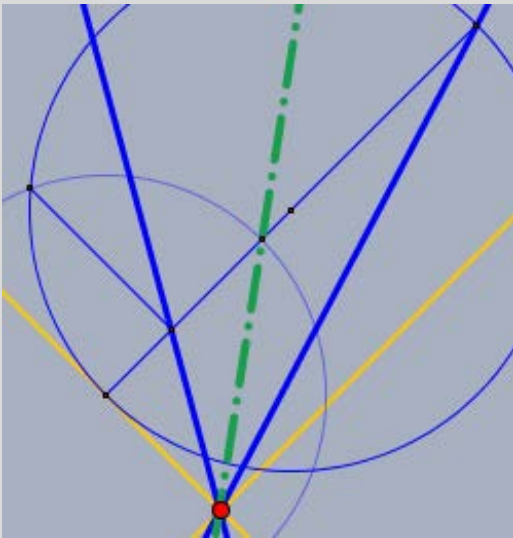
sich auf: $AU \cdot BU = WU^2$

und W kann einfach als geometrisches Mittel mit Hilfe des Kathetensatzes konstruiert werden. Die Geraden müssen beide zeitartig oder beide lichtartig sein.

Inkreis

Feuerbach (neun-Punkte)-Kreis

Wie im euklidischen Fall.



Lorentz-Geometrie – dreidimensional (C-Geometrie), Zyklographie.

Zyklographisches Bild eines Punktes

Einem Punkt $P(x, y, z) \Rightarrow$ **orientierter Kreis mit Mittelpunkt $P'(x, y, 0)$ und dem Radius z .**

(Übereinkunft über den Durchlaufsin, etwa $z > 0 \Rightarrow$ Uhrzeigersinn).

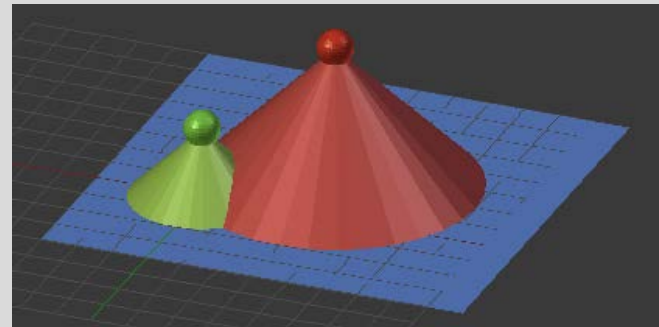
Dieser Kreis ist zugleich die Schnittlinie des 45° -Kegels mit z -paralleler Achse mit der x - y -Ebene (C-Kegel).

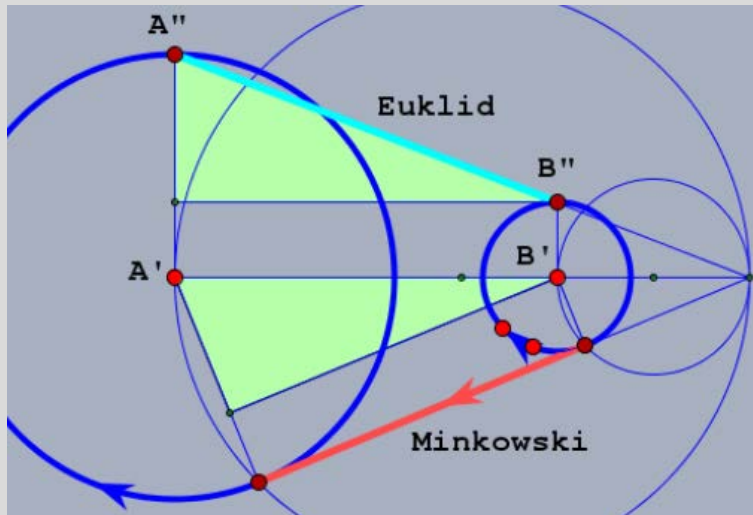
Entfernung zweier Punkte

- Minkowski Abstand = eine der beiden möglichen Tangentialentfernungen der Bildzykel.
- Ähnlichkeitszentrum der Zykeln ist für die Konstruktion erforderlich

Unten:

zwei Punkte (raumartige Verbindungsgerade) mit ihren projizierenden C-Kegeln und der Bildebene.





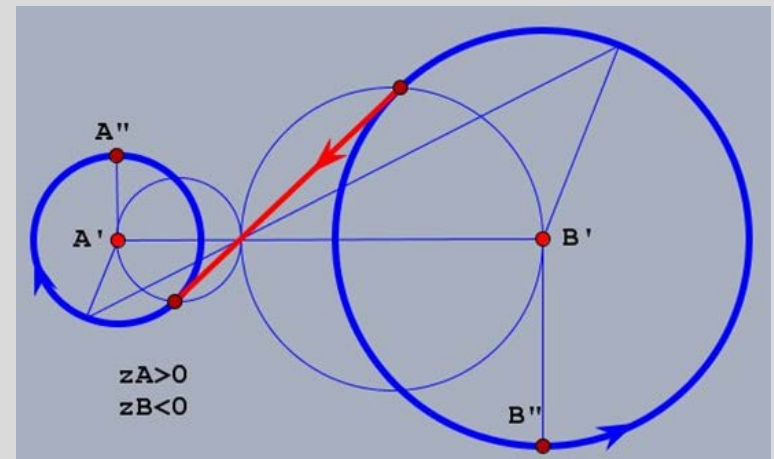
Die Entfernung zweier Punkte ist:

- Reell, wenn ihre Verbindungsgerade flacher als 45° ist (raumartige Gerade). Zwei gemeinsame Tangentenspeere
- $=0$, wenn sie 45° steil ist (Lichtgerade), die Zyklen berühren einander
- imaginär, wenn sie steiler als 45° ist (zeitartige Gerade), es gibt keine reellen berührenden Speere.

Reihen und Kongruenzen

Eine Menge

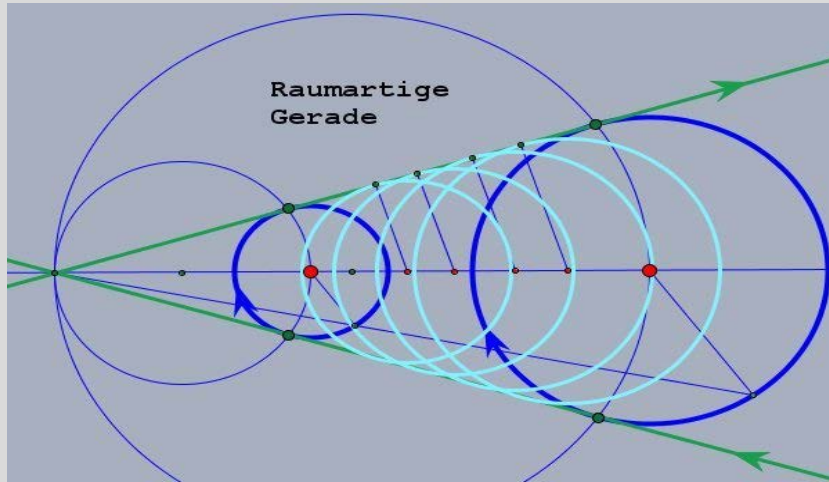
- von ∞^1 Zykeln heißt Zyklenreihe (Bild einer Kurve)
- von ∞^2 Zykeln Zyklenkongruenz (Bild einer Fläche)



Lineare Zyklenreihen

sind das Bild einer Geraden.

- raumartigen Geraden: Zyklen haben zwei gemeinsame Tangenten,
- Lichtgeraden sie fallen in eine Gerade zusammen
- zeitartigen Geraden: gemeinsame Tangenten sind imaginär.
- eine lotrechte Gerade hat als Bild konzentrische Kreise.



Kreisbüschel

besteht aus allen Kreisen durch zwei reelle, imaginäre oder reell zusammenfallende Punkte.

•Büschel mit reellen Grundpunkten

ist das Bild einer gleichseitigen Hyperbel mit Mittelpunkt in der x-y-Ebene und der reellen Achse parallel t (C-Kreis mit imaginärem Radius).

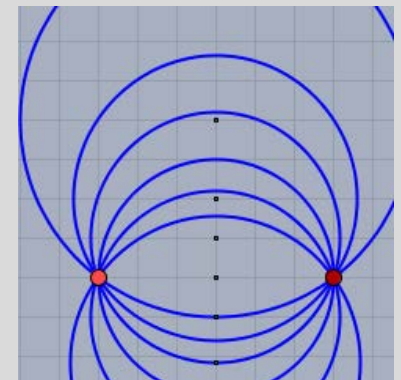
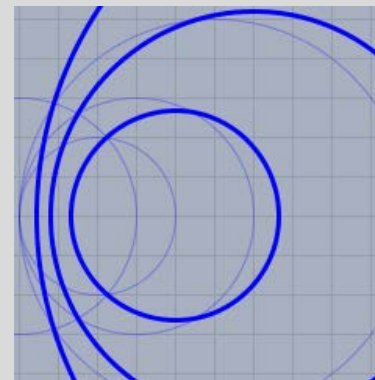
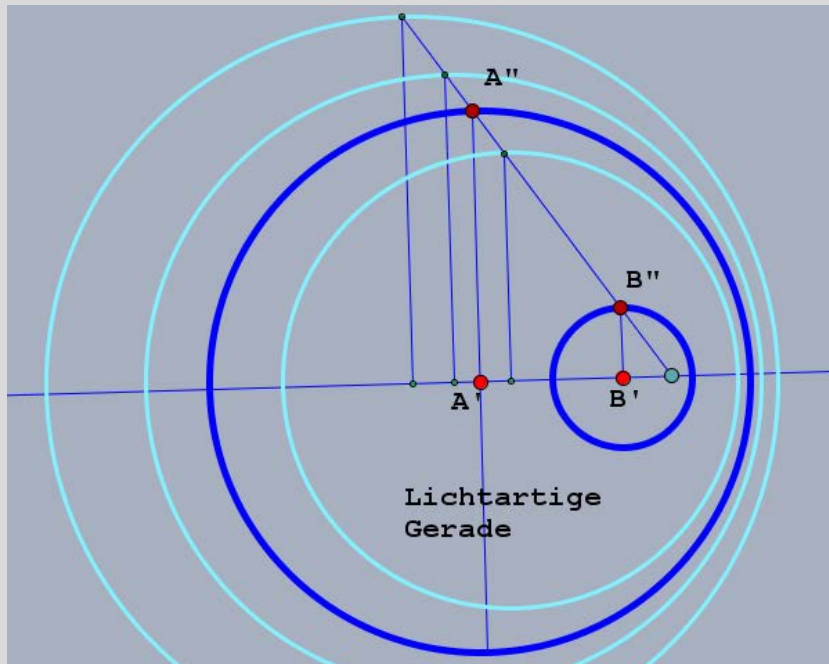
•Büschel mit imaginären Grundpunkten

ist das Bild einer gleichseitigen Hyperbel mit Mittelpunkt in der x-y-Ebene und der reellen Achse ebendort. (C-Kreis mit imaginärem Radius).

•Büschel mit reell zusammenfallenden Grundpunkten

ist das Bild eines Paares von C-Geraden

•Alle Zykeln, die zwei feste Kreise berühren, sind das Bild eines C-Kreises, dessen Spur die Chordale beider Kreise ist (verschiedene Fälle möglich)



Kugeln, C-Kegel und Kreise und ihr zyklographisches Bild

- Alle X mit $OX=1$ liegen auf der C-Kugel $x^2+y^2-z^2 = 1$, einem einschaligen Drehhyperboloid ($M=O$, Achse t)
- Zyklographische Bilder: Zykeln, die ihren (reellen) Spurkreis rechtwinklig schneiden
- Alle X mit $OX=i$ liegen auf der C-Kugel $x^2+y^2-z^2 = -1$, einem zweischaligen Drehhyperboloid ($M=O$, Achse t)
- Zyklographische Bilder: Zykeln, die ihren (nullteiligen) Spurkreis rechtwinklig schneiden bzw. seinen reellen Vertreterkreis in diametralen Punkten,
- Alle X mit $OX=0$ liegen auf dem C-Kegel $x^2+y^2-z^2 = 0$, ($S=O$) dem Asymptotenkegel der beiden Hyperboloide.
- Zyklographische Bilder: alle Zykeln durch O

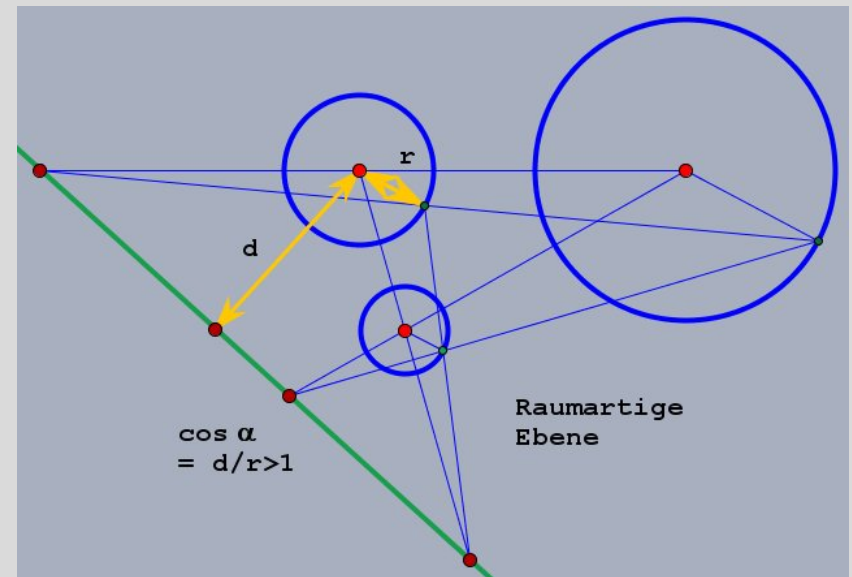
C-Kreise

Schnitt C-Kugel \cap Ebene,

- ist diese raumartig, so ergeben sich Ellipsen,
- ist sie waagrecht, euklidische Kreise
- ist sie zeitartig Hyperbeln oder Geradenpaare,
- ist sie lichtartig Parabeln.

Das zyklographische Bild einer Ebene

- Alle Zykeln, die einen Speer unter festem Winkel schneiden, sind Bilder der Punkte einer Ebene.
 - Cosinus < 1 : raumartige Ebene
 - Cosinus > 1 : lichtartige Ebene
 - Cosinus $= 1$: (Berührung): C-Ebene
- Die Spur der Ebene ist die Ähnlichkeitsachse von drei beliebigen Zykeln



Transformationen

Affinitäten

Lassen die Fernebene insgesamt fix

Ähnlichkeiten

Lassen den absoluten Kegelschnitt fest und damit auch die jeweilige Winkelmessung.

Zyklographie:

Transformationen, die Speere in Speere und Zykel in Zykel überführen (Laguerre Transformation)

Isometrien (Bewegungen und Umlegungen)

Lassen die Abstände fest (Lorentz Transformationen)

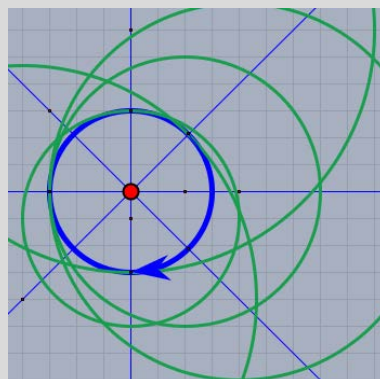
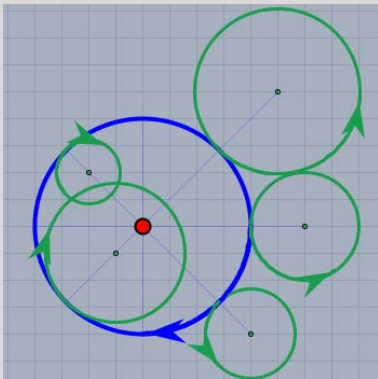
Zyklographie: Zykeldistanzen fix

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$ ist eine Invariante

Vergangenheit und Zukunft eines

Ereignisses

(Orientierung kompatibel mit Ereignis!!)



Anwendungen von Raum und Zeit

Die Verhältnisse in der x-y-Ebene (oder auch nur der x-Achse allein) werden mit 3. Koordinate Zeit beschrieben

Ereignis

Punkt (x,y) zu einem bestimmten Zeitpunkt t , also $E(x,y,t)$, oder auch nur $E(x,t)$

Ordnungsrelation

Ereignisse $P(x_1, y_1, t_1), Q(x_2, y_2, t_2)$

(Abstand imaginär oder $=0$, also auf einer zeit- oder lichtartigen Geraden liegend).

• **$P \leq Q$, wenn $t_1 \leq t_2$** ist.

• Man sagt, Q ist durch P kausal beeinflussbar.

Reflexiv: $P \leq P$

Identitiv: $P \leq Q$ und $Q \leq P \Rightarrow P=Q$

Transitiv: $P \leq Q$ und $Q \leq R \Rightarrow P \leq R$

Monoton: $P \leq Q \Rightarrow P+R \leq Q+R$

$P \leq Q \Rightarrow k \cdot P \leq k \cdot Q$ für $k \geq 0$ bzw. $k \cdot P \geq k \cdot Q$ für $k < 0$

Kausalautomorphismus (Orthochronie)

Bijektion $f: R_3 \rightarrow R_3 : P \leq Q \Leftrightarrow f(P) \leq f(Q)$

Zeitumkehr: $P \leq Q \Leftrightarrow f(P) \geq f(Q)$

Lorentztransformation: eines von beiden

Zukunft/ Vergangenheit

Ereignis S gegeben.

$V(S) := \{X \mid X \leq S\}$, $Z(S) := \{X \mid X \geq S\}$,

Vergangenheit (grün) und Zukunft (blau)

eines Ereignisses

Alle von einem Ereignis kausal beeinflussbaren Ereignisse liegen im oberen Teil des Lichtkegels, alle, von denen es beeinflusst hätte werden können im unteren.

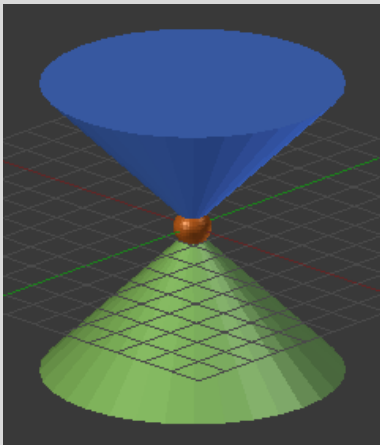
Weltlinie

Gegeben Bewegung in der x-y-Ebene

Bahnkurve $[x(t), y(t)]$, Zeit t als Parameter.

Die Kurve $[x(t), y(t), t]$ ist ihre Weltlinie.

- Geradlinige, gleichmäßige Bewegung: Weltlinie = eine Gerade,
- Kreisbewegung: Schraublinie,
- gleichmäßig beschleunigte Bewegung: Parabel



Postulate

➤ Trägheitsgesetz (Galilei – Newton)

Ein kräftefreier Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung.

Inertialsystem (Galilei KooSyst GK)

➤ System, in dem das Trägheitsgesetz gilt. Ist K' ein anderes System, das sich gegenüber K gleichförmig bewegt, so ist auch K' ein GK.

➤ Relativitätsprinzip:

„alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt“ oder „es gibt kein ausgezeichnetes Inertialsystem“.

Jede Geschwindigkeit ist immer nur Relativgeschwindigkeit in Bezug auf ein anderes IS.

➤ Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit:

Die Lichtgeschwindigkeit c hat in jedem IS denselben Wert ($c=1$), unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle und Beobachter.

Damit besteht also eine Unvereinbarkeit des Relativitätsprinzips mit dem Ausbreitungsgesetz des Lichtes.

Galilei – die absolute Zeit.

Fahrplan

Beispiel: Bewegung entlang der x-Achse.

Ereignis: ein Punkt (x, t)

➤ Ruhenden Körper (also $x = \text{konst.}$) Parallele zur t-Achse

➤ Parallele zur x-Achse parallelen Geraden ($t = \text{konst.}$): alle gleichzeitigen Ereignisse.

➤ Bewegtes Objekt: schräge Gerade

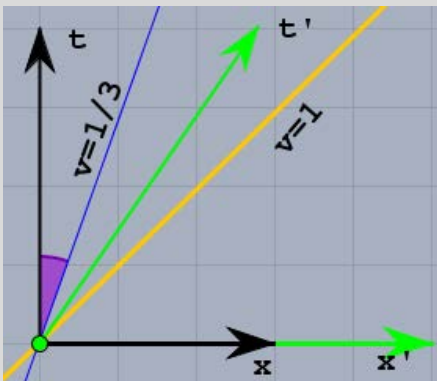
➤ Je rascher sich der Körper bewegt, desto flacher (!) ist die Weltlinie w , dabei ist $v = \tan(\text{Winkel } t, w)$.

➤ $v=1$ oder -1 : 45° -Geraden.

➤ Das ruhende System S und das bewegte S' haben dieselbe x-Achse ($x = x'$)

➤ die Weltlinie des im System ruhenden Ursprunges ist die t-Achse, und zwar in beiden Systemen.

- Das $x't'$ -Koordinatensystem ist schiefwinkelig.



Galilei Transformation (GT)

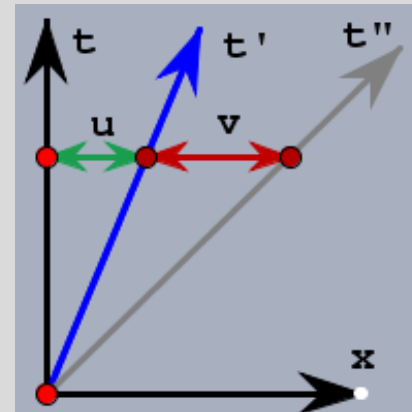
Beschreibt den Zusammenhang der Koordinaten eines Ereignisses E im (x,t) -System S bzw. im (x',t') -System S' bei einer gleichförmige Bewegung entlang der x -Achse

$$x' = x - v^*t$$

$$t' = t$$

Hintereinanderausführung – Geschwindigkeitsaddition im Galilei Modell

- Alle GT bilden eine Gruppe.
- wie man aus der Zeichnung entnimmt:
 $S' = GT(u)S$ und $S'' = GT(v)S'$
 $\Rightarrow S'' = GT(u+v)S$, also
- und die $GT(v)$ wird durch die $GT(-v)$ rückgängig gemacht.



Festlegung der Einheiten

System Σ und ein gegen dieses mit v bewegtes System Σ' .

x' -Achse: $t'=0$, $=x$ -Achse

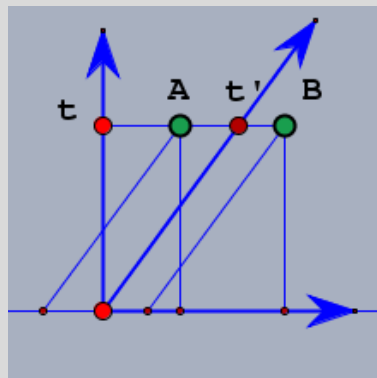
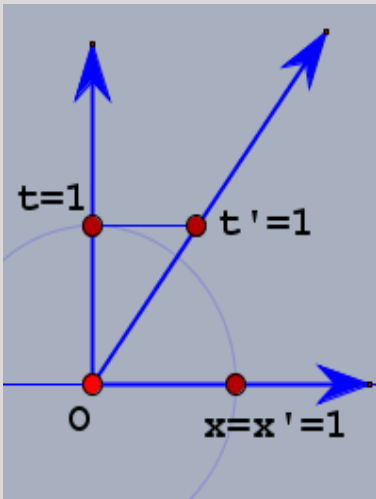
t' -Achse: $x'=0$, also in Σ durch $x = v t$, Gerade mit der Steigung v

Einheiten: in Σ willkürlich fest.

Wegen $t'=t$: gleichzeitige Ereignisse auf Parallelener zu $x'=x$ -Achse.

Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse A und B in Σ und Σ'

A und B müssen auf einer Parallelen zu $x=x'$ liegen, sie sind in beiden Systemen gleichzeitig



Längenmessung eines bzgl. Σ' ruhenden Stabes,

Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt des Stabes werden gleichzeitig Σ und Σ' bestimmt.. Man sieht sofort, daß die Länge des Stabes in beiden Bezugssystemen gleich ist.

Zeitunterschied zweier in Σ gleichortiger Ereignisse A,B.

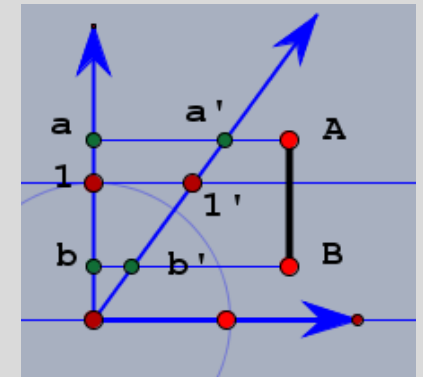
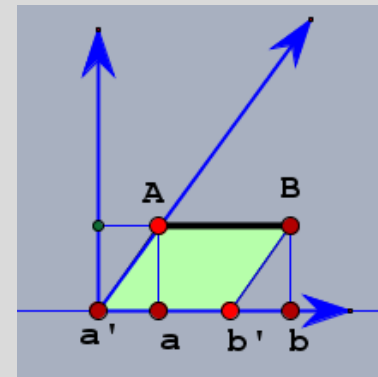
Strahlensatz: $(a-b)/1 = (a'-b')/1'$

Ereignisse in beiden Systemen gleichzeitig, nicht aber gleichortig.

Problem:

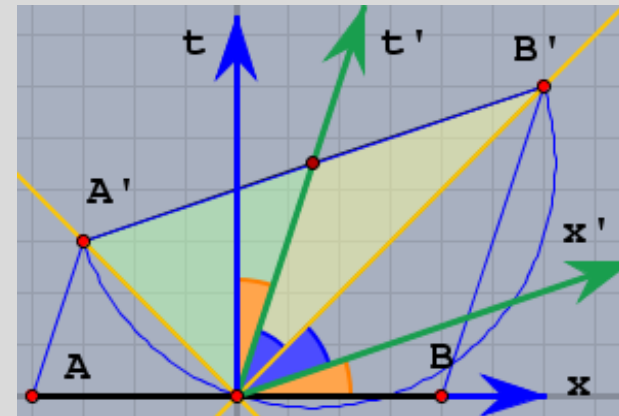
Widersprüche zu Beobachtungen,

- c ist die maximal mögliche Geschwindigkeit
- c überlagert sich nicht mit anderen Geschwindigkeiten

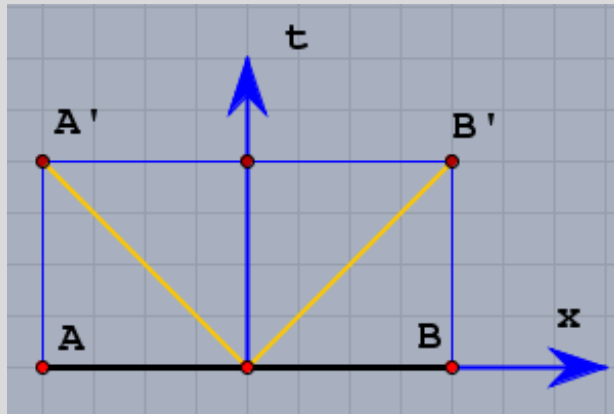


Die Relativität der Zeit

Zwei Lichtstrahlen im ruhenden System von M nach A und B: sie treffen dort zum selben Zeitpunkt ein (bzw. nach Reflexion treffen sie im selben Zeitpunkt in M ein), d.h. für einen Beobachter sind die Ereignisse A und B gleichzeitig.



- Zu beachten sind die Winkelgleichheiten: auch in S' sind die Lichtgeraden Winkelsymmetralen der Achsen, i.e. Lichtgeschwindigkeit hat ist auch im bewegten System den $c=1$
- Daher anderes Koordinatensystem
- Im folgenden Bild sind drei bewegte Systeme (Inertialsysteme), daneben auch noch die Eichkurven (C-Kreise = gleichseitige Hyperbeln) zur Festlegung der Einheiten (siehe später).



zwei Lichtstrahlen im bewegten System: Schnittpunkte A' und B' mit den Lichtstrahlen, müssen im bewegten System gleichzeitig sein (wegen der Konstanz von c), sind es aber nicht im ruhenden System. $A'B'$ ist also eine Linie der Gleichzeitigkeit in S' , es muss daher parallel zur dortigen x' -Achse sein.

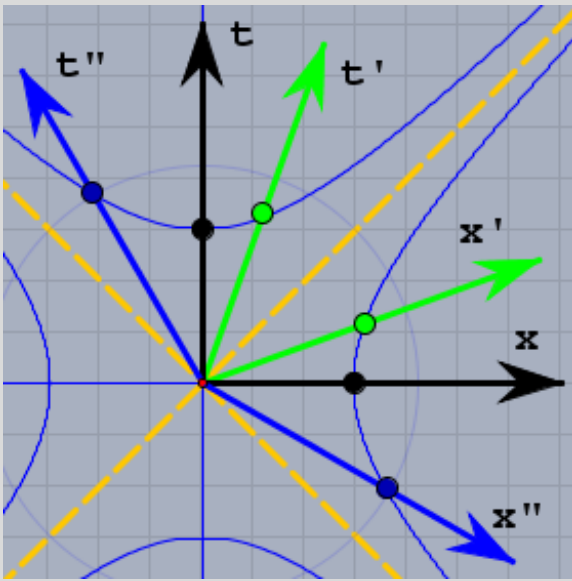
Herleitung der Umrechnungsformeln

Die Erklärung folgt der Herleitung von A. Einstein. Die Umrechnungsformeln der Koordinaten eines Ereignisses von S zu S' oder umgekehrt müssen anders lauten als die GT:

$$x' = x - v \cdot t$$

$$t' = t$$

Aber sie müssen linear bleiben wegen der Gleichberechtigung aller Inertialsysteme.



$$t' = a t + \beta x$$

$$x' = \rho (x + vt)$$

Ein Lichtstrahl pflanze sich auf der x-Achse fort,
dann ist (mit $c=1$)
 $x=t$,
da er im bewegten System S' ebenfalls mit $c=1$
unterwegs ist, existiert dort eine analoge
Gleichung
 $x'=t'$
bzw. $x-t=0$ und $x'-t'=0$
bzw. $x-t=r(x'-t')$

Sinngemäß dasselbe für einen Lichtstrahl in
Richtung der negativen x-Achse:
 $x=-t$ und $x'=-t'$
bzw. $x+t=s(x'+t')$

Man kann also x' und t' aus dem folgenden
Gleichungssystem lösen:

$$x-t=r(x'-t')$$

$$x+t=s(x'+t')$$

was im Endeffekt ergibt

$$x' = ax - bt,$$

$$t' = at - bx$$

mit $a=(r+s)/2$, $b=(r-s)/2$

a und b müssen noch bestimmt werden.

Löst man nach x, t auf ergibt sich:

Für den Anfangspunkt von S' ist dauernd $x'=0$,
also $ax=bt$ und $x=bt/a=v \cdot t$,
 $b/a=v$, die Relativgeschwindigkeit von S' zu S .

Als nächstes betrachtet man die Einheitsstrecken.
Wegen des Relativitätsprinzips muss eine in K'
ruhende Einheitsstrecke von K aus gesehen
dieselbe Länge haben wie eine in K ruhende von
 S' aus.

Von S aus gesehen:

zum Zeitpunkt $t=0$ ist $x'=ax$ und zwei Punkte auf
der x' -Achse mit Abstand 1 haben in S eine
Streckendifferenz von $\Delta x = 1/a$.

Umgekehrt:

Von S' aus gesehen:

zum Zeitpunkt $t'=0$ ist $at=bx$ und $t=bx/a$, was

wiederum eingesetzt ergibt:

$$x' = ax - bt = ax - b^2x/a = ax(1 - b^2/a^2) = ax(1 - v^2)$$

also $\Delta x' = a(1 - v^2)$

$\Delta x = \Delta x'$ ergibt nun schließlich

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$
$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Das ist die Lorentz Transformation für Ereignisse auf der x-Achse.

Zusammenhang mit der C-Geometrie und der Lorentz-Transformation

Sie genügt der Gleichung

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2$$

ist also „wirklich“ eine Lorentztransformation (im Sinn der projektiven Geometrie) und eine Isometrie in der pseudoeuklidischen Metrik.

Umbau der Formel

Die Koeffizienten

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \text{ und } \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Haben die Quadratdifferenz 1, können also gedeutet werden als cosh und sinh

$$\cosh(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \sinh(w) = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \quad \text{mit} \quad \tanh(w) = v$$

$$x' = \cosh(w) * x - \sinh(w) * t$$
$$t' = -\sinh(w) * x + \cosh(w) * t$$

Und da $\tanh(w) = \sinh(w)/\cosh(w) = v$ ist, kann man w interpretieren als pseudoeuklidischen Winkel zwischen den x- bzw t-Achsen.

Also noch einmal:

Die Zeit ist keine Invariante, gleichzeitige Ereignisse im System S sind nicht gleichzeitig in S' und umgekehrt.

Einheiten

Für beide Systeme sind die Kurven

$$x^2 - t^2 = x'^2 - t'^2 = \pm 1$$

Eichkurven

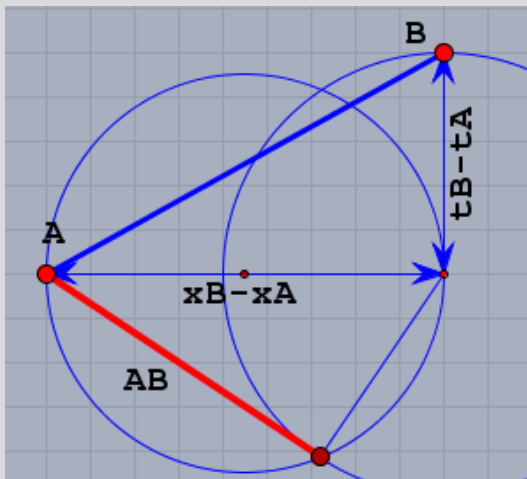
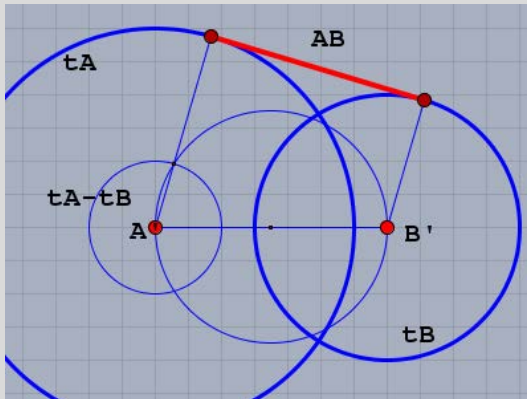
(gleichseitige Hyperbeln)

Beispiel

$A'(0,0)$ und $B'(x'=1, t'=0)$ sind in S' gleichzeitig, in S nicht:
 $A(0,0)$ und $B[\cosh(w), \sinh(w)]$

Konstruktion des C-Abstandes zweier Ereignisse

Im x - y - t -Raum bzw. der x - t -Ebene



Andere Herleitung der Transformationsformeln

Auch diese Erklärung folgt der Herleitung von A. Einstein.

Vom Nullpunkt in S wird ein Lichtsignal (wieder mit $c=1$) ausgesendet, nach t ist es in $[x,y,z]$, es ist also $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = t$
bzw. $x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$

Konstanz von c und Relativitätsprinzip \Rightarrow
analoge Verhältnisse in S'

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - t'^2 = 0$$

Die Transformation der Koordinaten von S nach S' ist eine lineare Abbildung, erhält sie den Abstand 0.

Dazu gibt es einen spektakulären Satz von A. D. Alexandrow, nämlich:

Eine Bijektion des R^n , die in beiden Richtungen den Lorentz-Minkowski Abstand 0 erhält, ist eine Lorentztransformation (allenfalls kombiniert mit einer positiven Streckung).

Diese Herleitung ist an Eleganz kaum zu übertreffen, die Voraussetzungen liegen ja hier vor.

Geschwindigkeitsaddition

Ruhendes (x,t) - Σ (rechtwinkelig)

bewegtes System (x',t')

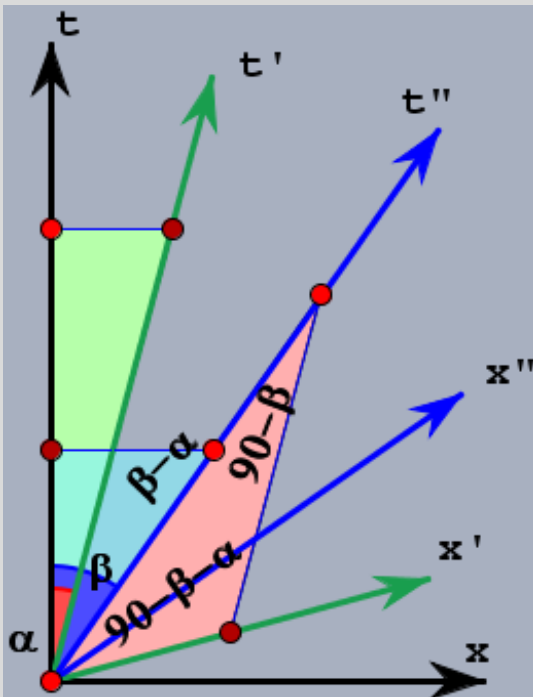
in dem sich wieder $\Sigma''(x'',t'')$ bewegt.

Gesucht ist der Zusammenhang zwischen den drei Relativgeschwindigkeiten.

u von $\Sigma(x,t)$ zu (x',t') $u = \Delta x / \Delta t = \tan(\alpha)$

v von $\Sigma(x,t)$ zu $\Sigma''(x'',t'')$ $v = \Delta x / \Delta t = \tan(\beta)$

w von $\Sigma'(x',t')$ zu (x'',t'') $w = \Delta x / \Delta t$, was die Auflösung in einem schiefwinkligen Dreieck mit Seiten parallel x', t' und t'' erfordert (rot)



$$\frac{\Delta x}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{\Delta t}{\sin(90 - \beta - \alpha)}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\cos(\beta + \alpha)}$$

was nach wenig unterhaltsamer Rechnung das Additionstheorem für Geschwindigkeiten ergibt:

$$u \oplus v = \frac{u + v}{1 + u * v}$$

Beachte die Ähnlichkeit mit der Summenformel für den hyperbolischen Tangens:

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh(x) + \tanh(y)}{1 + \tanh(x) * \tanh(y)}$$

Zeitdilatation

Lichtuhr: zwei Spiegel, zwischen denen ein Lichtsignal reflektiert wird,

Ruhende Uhr:

Zeitspanne t (Eigenzeit der Uhr).

Bewegte Uhr:

für den mit der Uhr verbundenen Beobachter t ,
nicht aber für den ruhenden, da sich die Uhr in
der Zeit ein Stück weiterbewegt hat.

Die

resultierende Geschwindigkeit wäre

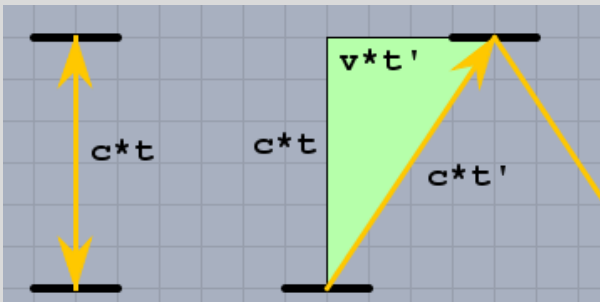
$$\sqrt{c^2 + v^2} > c$$

Was nicht geht, also muss eine andere Zeit
 t' vergangen sein.

$$t^2 + v^2 t'^2 = t'^2$$

Und daraus

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1 - v^2}}$$



- es ist also im bewegten System mehr Zeit vergangen als im ruhenden,
- d.h. die Zeit im bewegten System läuft langsamer ab.
- Für einen Beobachter im bewegten System gilt dasselbe, für ihn läuft die Zeit im ruhenden System langsamer.

Die Relativität der räumlichen Entfernung

Ein ähnliches Problem wie oben: im bewegten System wird eine Strecke $A'B'$ vermessen, welches Ergebnis erhält ein ruhender Beobachter?
 $A'(0,0)$, $B'(1,0)$

Wo sind sie zu einer bestimmten Zeit $t=0$ relativ zu S ?

In $A(0,0)$ und $B(\sqrt{1-v^2}, 0)$

Bewegte Längen sind also kürzer.

Umgekehrt:

Vom bewegten System aus ist eine ruhende Länge kürzer.

Dopplereffekt

Ein Signal ($c=1$) wird von einem ruhenden Σ in regelmäßigen Zeitabständen ($t=0, 1, 2, \dots$) zu einem längs der x-Achse mit der Geschwindigkeit v bewegten Σ' gesendet und wieder reflektiert.

Die Intervalle, in denen das Signal und das reflektierte Signal ankommen sind \neq den ursprünglichen. Mit der Frequenz ändert sich auch die Wellenlänge.

Rein geometrisches Problem .

Der Schnittpunkt der Weltlinie

$x=v*t$ mit dem Lichtstrahl

$x=t-1$ hat in Σ die Koordinaten

$x=v/(1-v)$ und $t=1/(1-v)$

t' - x' -Koordinaten in Σ' :

Einheitspunkt auf t' als Schnittpunkt mit der

Eichhyperbel $x^2-t^2=-1$:

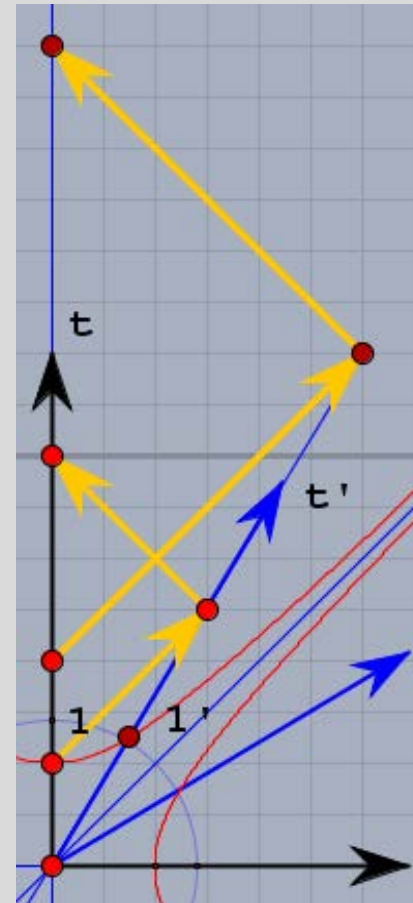
$x'=v/\sqrt{1-v^2}$ und $t'=1/\sqrt{1-v^2}$

und das t von oben in t' -Einheiten gemessen ist

$$\frac{t}{t'} = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}$$

die Änderung von Frequenz/ Wellenlänge

Im Beispiel der Zeichnung ist $v=0.6$,
Signalabstand in Σ 1 ($t=0,1,2\dots$),
Einheitsstrecke in Σ' 1.5, Signalabstand 2.
Vorkommen z.B. bei der Rot/Blauverschiebung
von Lichtsignalen



A und B sind Ereignisse die zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten stattfinden.

Zueinander raumartige Ereignisse

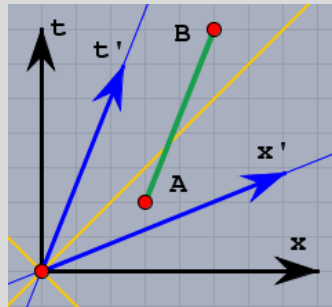
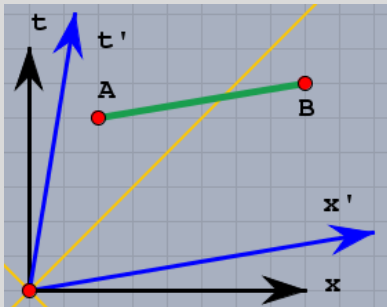
Können bei geeigneter Wahl von v in S' gleichzeitig stattfinden.

z.B. $A(2,5)$, $B(8,6)$: $\Delta x^2 - \Delta t^2 = 35$, $v=1/6$

Zueinander zeitartige Ereignisse

Können bei geeigneter Wahl von v in S gleichortig stattfinden.

z.B. $A(3,2)$, $B(5,7)$: $\Delta x^2 - \Delta t^2 = -21$, $v=2/5$



Paradoxa

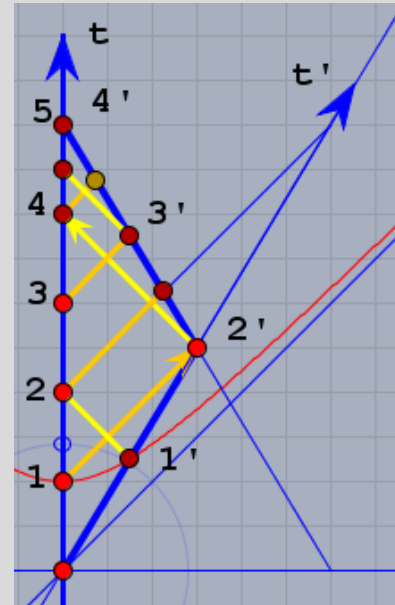
Das Garagenparadoxon

paßt ein 4m langes Auto Σ' in eine 2m lange Garage Σ ?

Es sei mit $v=\sqrt{3}/2$ unterwegs, dann erscheint es von Σ verkürzt auf gerade 2m, das Auto kann durchfahren und ist für einen Augenblick tatsächlich verschwunden; stehenbleiben kann es allerdings nicht, und damit ist der Witz der Fragestellung auch schon wieder vorbei.

Zwillingsparadoxon

Ein reisender Zwilling altert langsamer



Einsteins Gedanken zum Universum

Zum Abschluss seiner Schrift

„Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie“

äußert Einstein noch verschiedene Spekulationen.

- Die Unendlichkeit des Universums führt auf verschiedene Spannungen und wird abgelehnt.
- Ebenso wie die Kugel für 2d-Wesen endlich aber unbegrenzt ist, kann man auch eine derartige dreidimensionale Welt definieren.
- Durch Messungen können 2d-Wesen feststellen, in welcher Art von Geometrie (elliptisch, hyperbolisch, euklidisch) sie leben bzw. ggf. den Radius ihrer Kugel bestimmen.
- Ebenso 3d-Wesen im Raum
- Die ART gestattet eine Antwort
 - Das Universum könnte flach sein mit gewissen Störungen, quasieuklidisch und unendlich. Die mittlere Masse ist dann $=0$
 - Ist sie aber nur minimal größer, liegt ein elliptischer, endlicher Raum vor.

Zwei interessante Diplomarbeiten verfolgen die Ergebnisse der ART weiter:

Gudrun Weisz:

The Geometry and Topology of the Universe,
Wien 2012

Und

Eric Martin

Die acht Modellgeometrien von William Thurston
für dreidimensionale Mannigfaltigkeiten
Tübingen 2007

- Ein Hausdorffraum M mit abzählbarer Topologie ist eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, falls jeder Punkt p aus M eine offene Umgebung besitzt, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge von \mathbb{R}^n ist.
- Die Familie dieser Homöomorphismen nennt man Atlas, die einzelnen Karten.
- Ist zusätzlich ein Skalarprodukt vorhanden und damit eine Metrik wird daraus eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Für den räumlichen Teil kommen in Frage:

Der Euklidische R^3

Die dreidimensionale Sphäre S^3 als Teilraum des R^4 (euklidischer Radius=1)

Die dreidimensionale C-Kugel H^3 als Teilraum des R^4 (einschaliges Drehhyperboloid, C-Radius=i)

Zwei weitere $S^2 \times E$ und $H^2 \times E$

Und drei weitere eher seltsame Geometrien

Auf der Seite der Physik scheint man sich die Frage nach der Geometrie nicht zu stellen.

Das heute herrschende Paradigma des „Big Bang“ scheint die Frage der Geometrie nicht zu stellen.

Der französische Astrophysiker **Jean-Marc Bonnet-Bidaud** stellt in seinem Buch

Le big bang n'est pas une théorie comme les autres

sechs Schwachpunkte der Theorie vor, als erstes gleich:

Il y a tout d'abord la géométrie du cosmos et l'outil que l'on utilise pour y mesurer les distances. Un changement même mineur de cette mesure change totalement l'évolution de l'Univers