

# ABBILDUNGEN

- Lineare Abbildungen, Affinitäten, homogene Koord.
- Kollineation (perspektive K., optische Abbildung)
- Reliefperspektive, Zylinderp., Scheinarchitekturen
- Abbildung des  $R^4$  in  $R^3$  und  $R^2$ , Konstruktion und Beispiele
- Abbildung durch (komplexe) holomorphe Funktionen
- Inversion,  $w=z^2$ , Schukowski Abbildung (Tragflügel)
- Möbius Abbildungen
- Flächenverzerrung, Jacobi Matrix, konforme Abbildungen (einfache Herleitungen!)
- Kartenprojektionen, insbes. Mercatorentwurf (normal und transversal)
- Geo Koordinatensysteme (Gauß-Krüger, UTM)

# Lineare Abbildungen

Abbildung des Raumes, die jedem Ur-Punkt  $P(x,y,z)$  einen Bildpunkt  $P'(u,v,w)$  zuordnet durch lineare Funktionen, z.B.:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y-2z \\ 2x+6y+4z \\ -x-2y \end{pmatrix}$$

Fragen dazu:

- Gibt es eine einfachere Darstellung (ggf. durch Änderung des Koordinatensystemes (ja)
- Welche Punkte  $P$  werden einfach auf der Geraden  $OP$  verschoben  $\mathbf{P}' = \mathbf{k} * \mathbf{P}$  (Fixgerade = „**Eigenvektor**“).
- Faktor: „**Eigenwert**“
- Bleibt die Dimension des Ur-Raumes erhalten

# Eigenwerte, Eigenvektoren

Eigenwerte (k) / Eigenvektoren:

$P' = A * P = k * E * P$  bzw.  $A - k * E = N$  bzw.  **$\text{Det}(A - k * E) = 0$**

Erhalt der Dimension: kein  $k=0$

$$\begin{vmatrix} 1-k & -2 & 2 \\ 2 & 6-k & 4 \\ -1 & -2 & -k \end{vmatrix} = -k^3 - 7k^2 - 16k + 12 = (3-k)(k-2)^2 = 0 \quad k_1=3, k_2=k_3=2$$

$$\begin{pmatrix} x & -2y & -2z \\ 2x & 6y & 4z \\ -x & -2y & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad EV_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, EV_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, EV_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lll} -2x - 2y - 2z = 0 & y + 2z = 0 & x = -t \\ 2x + 3y + 4z = 0 & \Leftrightarrow -y - 2z = 0 & \Leftrightarrow y = 2t \\ -x - 2y - 3z = 0 & -x - 2y - 3z = 0 & z = -t \end{array} \Leftrightarrow EV_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

# Lin. Abb $\Leftrightarrow$ Projektion

Satz von Pohlke

Lin. Abb. des  $R_3 \rightarrow R_2$ , die durch die Bilder der Einheitspunkte im  $R_2$  festgelegt ist = Projektion + affine Transformation

- $k_1=0, k_2 \neq 1 \vee k_3 \neq 1$   
der erste Eigenvektor gibt die Projektionsrichtung an
- Sonderfall Projektion:  $k_1=0, k_2=1 \wedge k_3=1$   
der erste Eigenvektor gibt die Projektionsrichtung an  
die beiden anderen spannen die Bildebene auf.
- Militärriss (Sonderfall  $p=0$ : Grundriss)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + pz \\ 0 \end{pmatrix} \quad EV_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ -1 \end{pmatrix}, EV_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, EV_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Homogene Koordinaten

Ein Punkt des  $\mathbb{R}^2$   $\mathbf{P}(x,y) \rightarrow \mathbf{P}(x \cdot t, y \cdot t, t)$ , zB:  
 $P(2,3) \rightarrow P=(2,3,1)=(4,6,2)=(6,9,3)=(-2,-3,-1) \dots$

Umkehrung:  $\mathbf{P}(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \mathbf{P}(x=x_1/x_3, y=x_2/x_3)$

- Endliche Punkte:  $x_3 \neq 0$ , Fernpunkte:  $x_3 = 0$   
zB: Fernpunkt der x-Achse:  $X(1,0,0)$
- Geradengleichung:  $ax+by=c \rightarrow ax_1+bx_2=cx_3$   
Ihr Fernpunkt:  $x_3=0, x_1=bt, x_2=-at$ , also zB.  $(b,-a,0)$
- Eine lineare Abbildung in drei inhomogenen Koordinaten ist eine LinAbb (im Sinn der Algebra)
- In homogenen Koordinaten eine Kollineation (LinAbb i.S. der Geometrie, nicht der Algebra)

# Kollineation

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -3 & -6 & -9 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 + 9x_3 \\ -3x_1 - 6x_2 - 9x_3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{x_1}{x_3} = \frac{3x_2 + 9x_3}{2x_1 - x_2 + 3x_3}, y' = \frac{x_2}{x_3} = \frac{-3x_1 - 6x_2 - 9x_3}{2x_1 - x_2 + 3x_3}$$

$$x' = \frac{3y + 9}{2x - y + 3}, y' = \frac{-3x - 6y - 9}{2x - y + 3}$$

Die Gerade  $2x - 3y + 3 = 0$  ist Verschwindungs-Gerade, die Bilder aller ihrer Punkte sind Fernpunkte.

# Beispiel

Man erhält folgende Eigenwerte/ Eigenvektoren; diesen entsprechen hier die drei Fixpunkte.

$$k_1 = -3, k_2 = 6, k_3 = -6$$

$$E = E' = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}, F = F' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, G = G' = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad EV_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, EV_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, EV_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Umkehrabbildung:

$$x = \frac{-9x' - 6y' + 9}{5x' + 2y' + 3}, y = \frac{-3x' - 6y' - 9}{5x' + 2y' + 3}$$

Fluchtgerade:  $5x + 2y + 3 = 0$   
(Bilder aller Fernpunkte)

# Beispiel

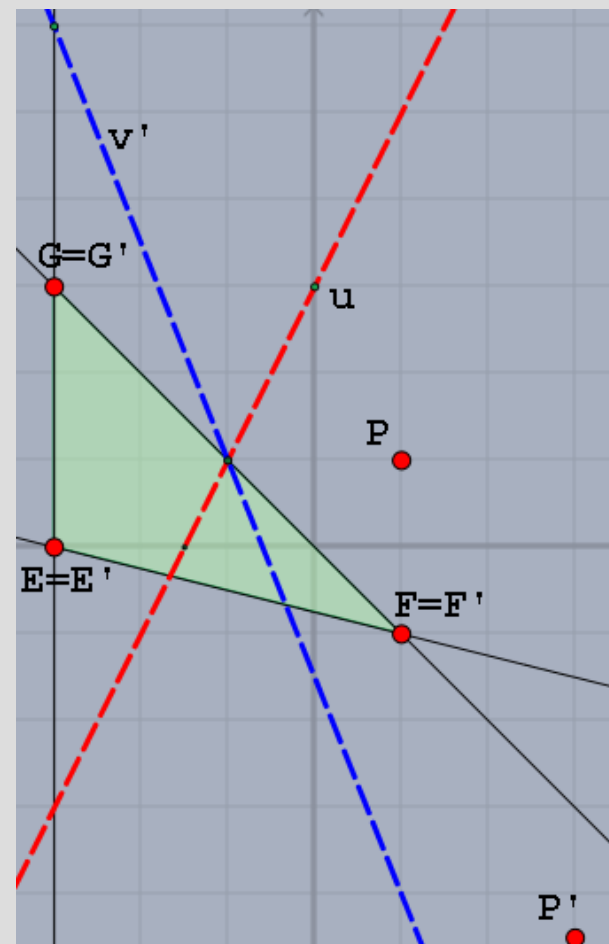
Fixgerade EF: Attraktor F, EG: Attraktor G, E: Repeller.  
Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ -3 & -6 & -9 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

strebt jeder Punkt  $P(r,s) \rightarrow P_\infty(-s,s)/\dots$ ,  
d.h. sie liegen auf der Geraden  $x+y=0$

Cinderella:

Projektive Abbildung, festgelegt durch  
E, F, G,  $P(1,1) \rightarrow P'(3,-4.5)$

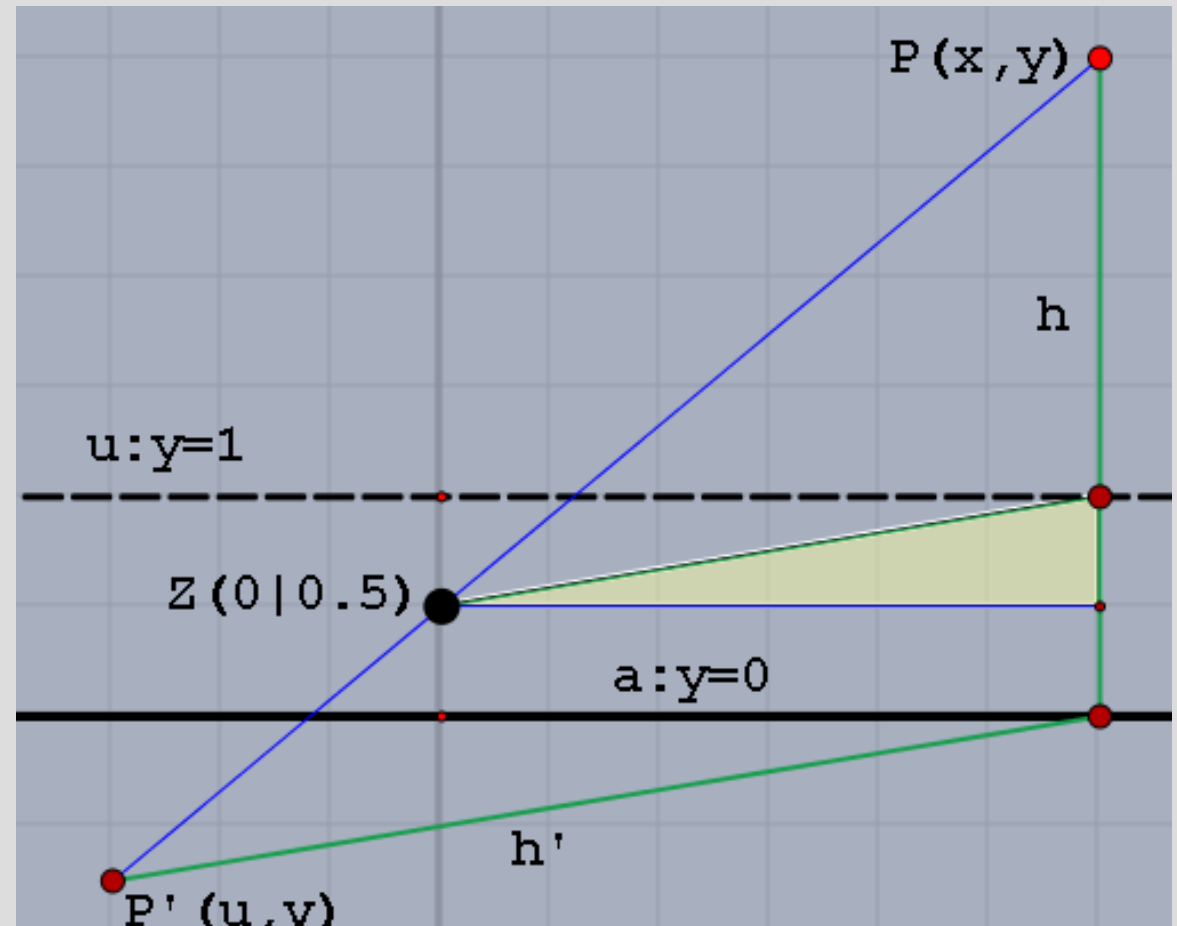




# Perspektive Kollineation

## Beispiel:

- Zentrum  $Z(0|0.5)$ ,
- Verschwindungsger.  $y=1$ ,
- Kollineationsachse  $y=0$ .
- Um zu einem Urpunkt  $P(x,y)$  den Bildpunkt zu bestimmen: Kollineationsstrahl  $PZ$  und (bel.) Hilfsgerade  $h$  verwenden.



# Perspektive Kollineation

Nachrechnung der Konstruktion (Wald- & Wiesen-Analytische Geometrie):  $P(x,y) \rightarrow P'(u,v)$  ergibt (inhomogen/ homogen):

$$u = \frac{x}{1-y}, v = \frac{0.5 y}{1-y}$$

Abbildungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

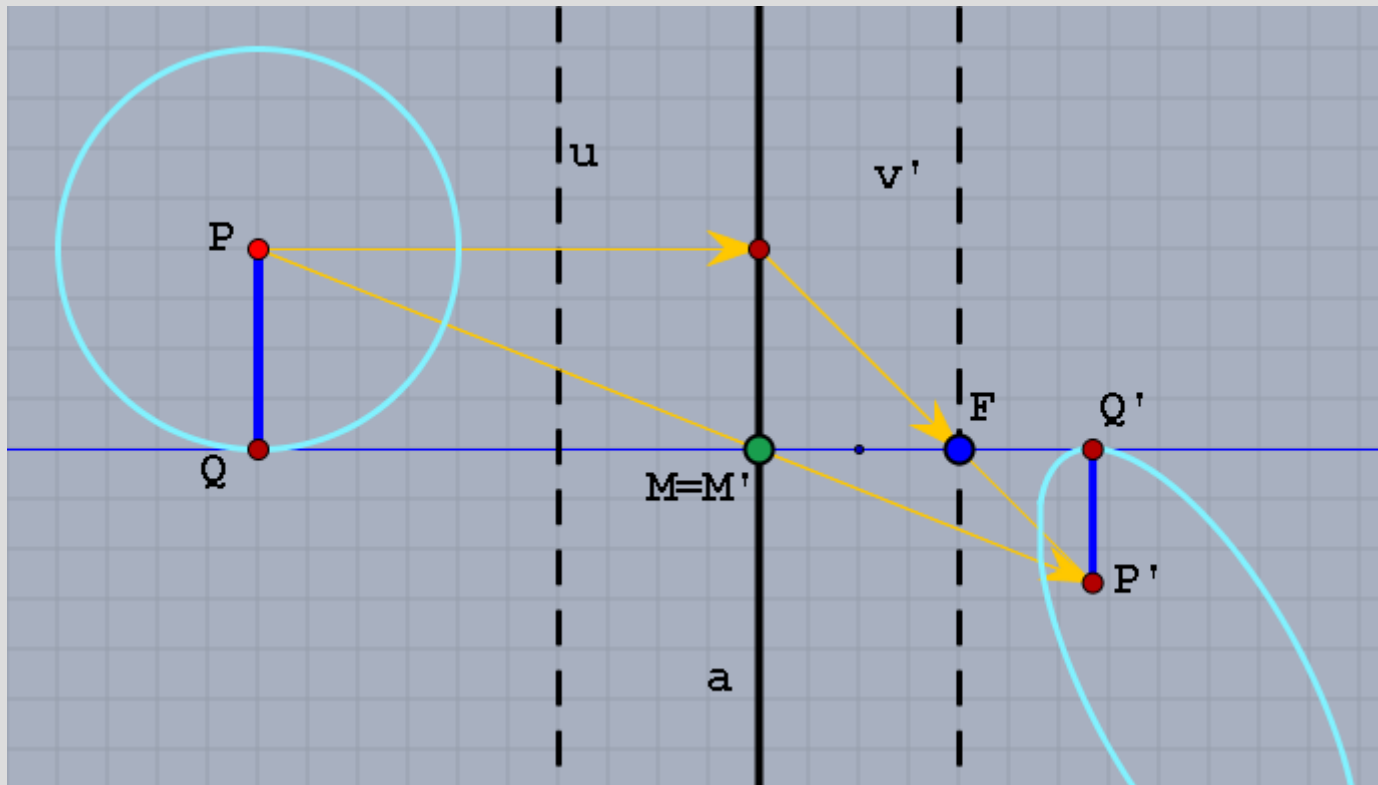
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0.5 x_2 \\ -x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Jede Matrix dieser Bauart erzeugt eine perspektive Kollineation:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Abbildung durch eine optische Linse

- Strahlen durch optische Mitte  $M$  der Linse  $a$ : Fixgerade
- Strahlen parallel zur optischen Achse  $a$  werden durch den Brennpunkt  $F$  abgelenkt.



# Abbildung durch eine optische Linse

$P(x,y)$ ,  $P'(u,v)$ ,  $M(0,0)$ ,  $F(f,0)$ :

$$u = \frac{f * x}{x + f}, v = \frac{f * y}{x + f}$$

$x$  = Gegenstandsweite  $g$ ,  $u$  = Bildweite  $b$ ,  $f$  = Brennweite  
so erhält man die Linsengleichung:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{g} = \frac{1}{f}$$

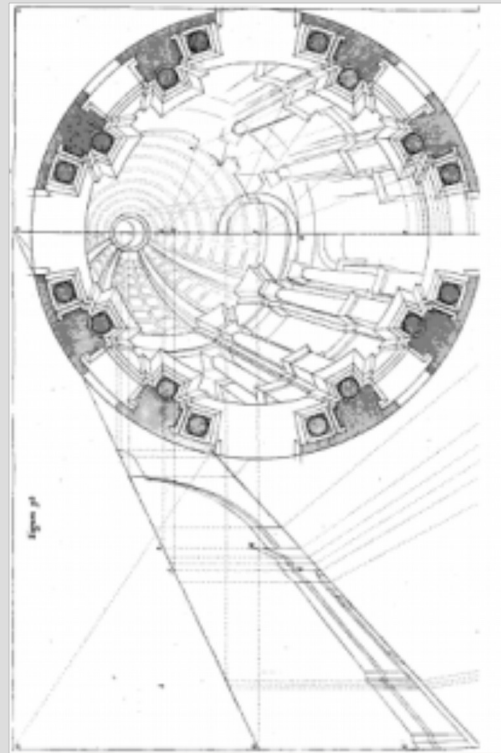
Der Halbraum links von der Verschwindungsgeraden wird auf den Halbraum rechts von der Fluchtgeraden abgebildet, ein „scharfes“ Bild erhält man nur für die Punkte einer Parallelebene

# Anwendungen der perspektiven Kollineation bzw. Zentralprojektion

- Persp. Koll. **R2**  $\Rightarrow$  **R2**: Thema der Projektiven Geometrie
- Persp. Koll. **R3**  $\Rightarrow$  **R2**: im Bereich der Kunst seit Jahrhunderten ein prominentes Thema. Die Perspektive mit Zentrum Z vermittelt von Z aus gesehen ein perfektes Bild des Objektes
- Persp. Koll. **R3**  $\Rightarrow$  **R3** (Reliefpersp.): detto, räumliches Bild
- ZentrProj. **R3**  $\Rightarrow$  **Zylinder** (z.B. Tonnengewölbe): Vortäuschung riesiger himmlischer Architekturen (z.B. Andrea Pozzo, Jesuitenkirche Wien)
- ZentrProj. **R3**  $\Rightarrow$  **Zylinder**  $\Rightarrow$  **Abwicklung**  
Zylinderperspektive

# Beispiel: Andrea Pozzo

Scheinkuppel auf Tonnengewölbe (Jesuitenkirche, Wien),  
Andeutung der Konstruktion



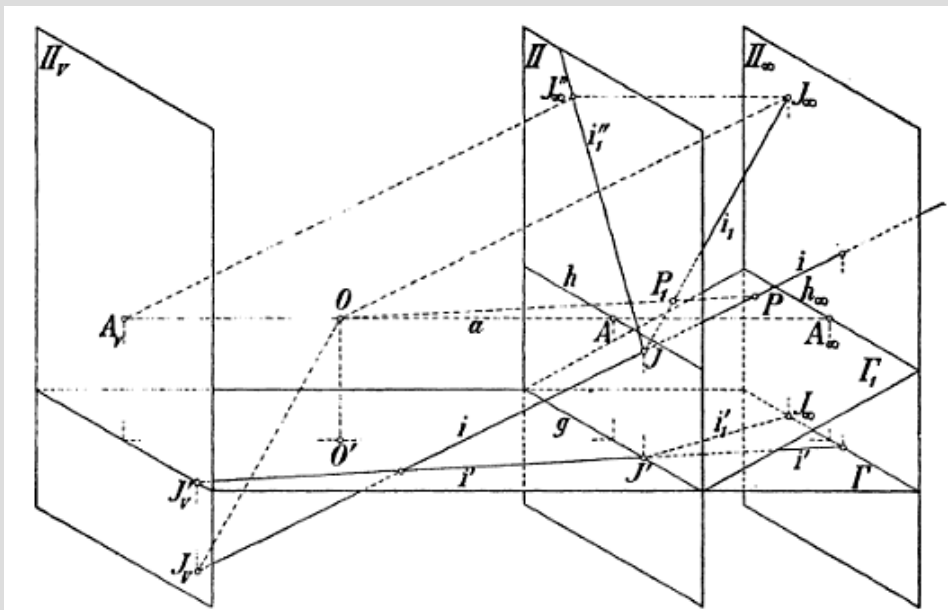
# Reliefperspektive

- Seit der Renaissance werden in Reliefs Architekturelemente nicht nur bildlich sondern auch räumlich (verzerrt) dargestellt.
- Das Relief wird dabei so auf einen Augpunkt hin konstruiert, dass die Objekte dem dort befindlichen Betrachter unverzerrt erscheinen.
- Geometrische Grundlage der Reliefkonstruktion im 19. Jahrh. im Rahmen der Projektiven Geometrie entwickelt.
- **Perspektive Kollineation** (Zentralkollineation) im Raum: Urraum = Bildraum =  $\mathbb{R}^3$ .
- Ludwig Burmester: Grundzüge der Reliefperspektive... 1883

# Konstruktion

$\beta$ ) Der Grundriß des Reliefs geht aus dem des Gegenstandes durch eine Centralprojektion in der Grundebene  $\Gamma$  hervor; ihr Centrum ist der Grundriß  $O'$  des Auges, ihre Achse ist die Grundlinie  $g$  und ihre Fluchtlinie  $\Gamma \times \Pi_\infty$ .

$\alpha$ ) Die in der Ebene  $\Pi$  aus dem Augpunkte  $A_v$  entworfene Perspektive des Objektes ist mit dem Aufriß seines Reliefs identisch.

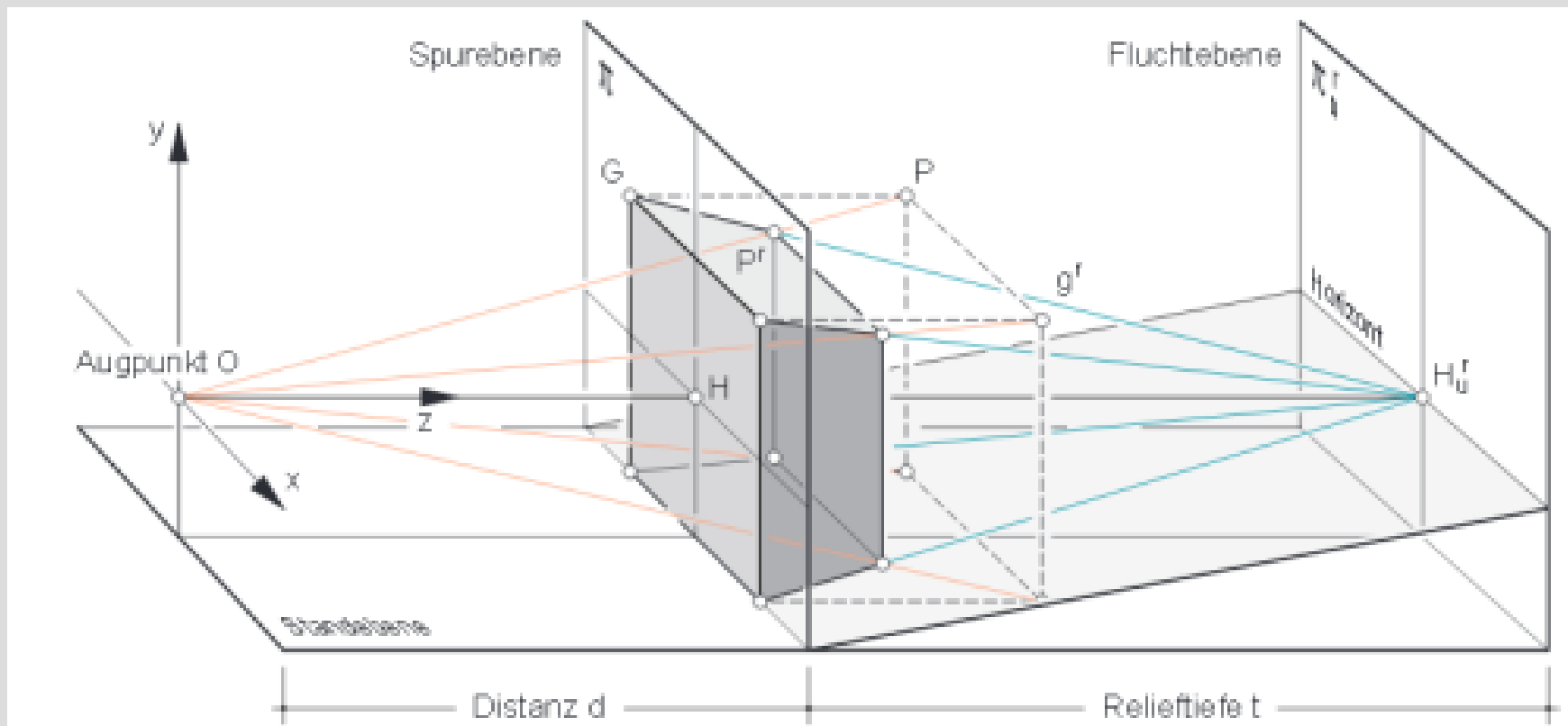


Lehrbuch der  
Darstellenden Geometrie:  
2. Band von Karl Rohn,  
Erwin Papperitz (1901)



# Konstruktion

In moderner Ansicht (Daniel Lordick, TU Dresden)  
<http://lordick.darstellende-geometrie.de/docs/Lordick-Relief-IBDG-1-2005-JG-24.pdf>



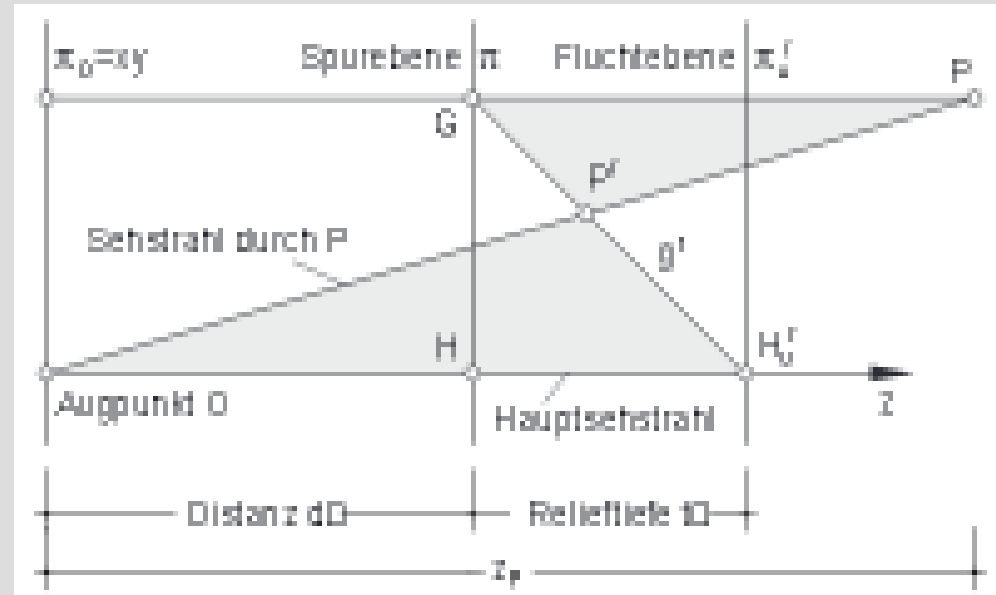
# Berechnung

Konstruktion eines Bild-Punktes mit Hilfe einer zu p normalen Hilfsgeraden (Schnittp. mit p bleibt fix, geht durch Haupt Fluchtpunkt

$$PP_r:(z_p-d)=OP_r:(d+t)$$

Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} x^r \\ y^r \\ z^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d+t}{z+t} * x \\ \frac{d+t}{z+t} * y \\ \frac{d+t}{z+t} * z \end{pmatrix}$$



(man sollte aber y und z vertauschen, um gewohnte Verhältnisse zu haben)

# Beispiele

S. Maria presso S. Satiro, vor-  
getäuschter Chor (Bramante):  
der Chor ist max. 2m tief



# Teatro Olimpico, Vicenza

Palladio, 1580

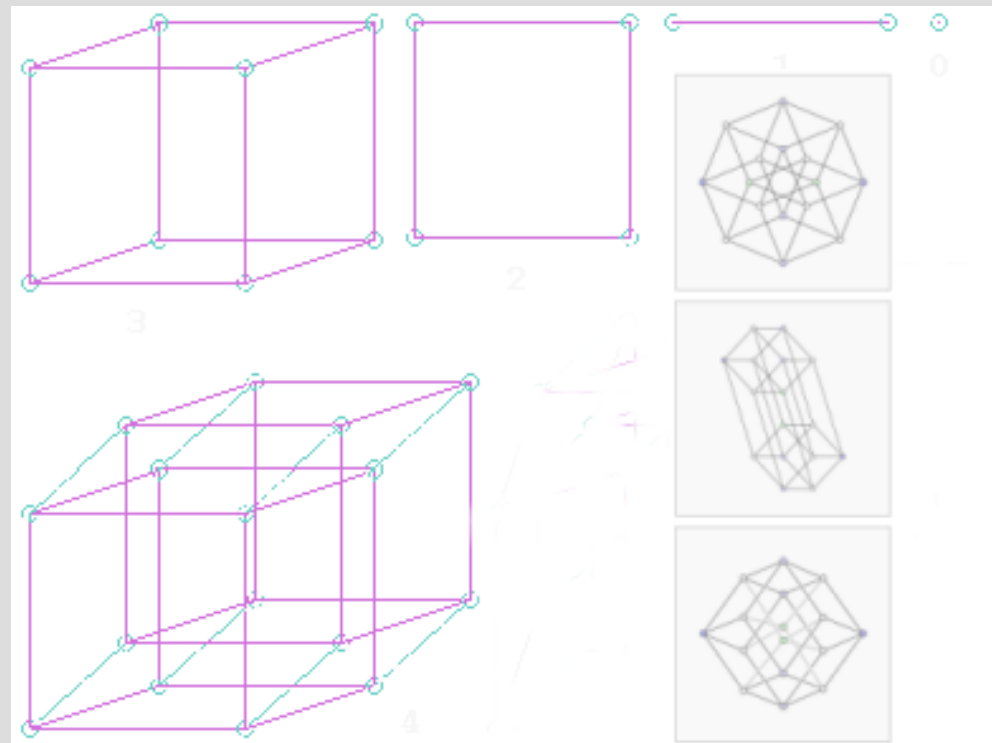
Bühnenwand gibt durch drei Portale Blick auf eine Kulissenstadt frei. Der Bühnenboden steigt an, die Häuser sind perspektivisch verkleinert. Die Szenerie wirkt, bei einer Tiefe von nur 12 Metern, 100–200 Meter tief.



# R4 – anschaulich (?)

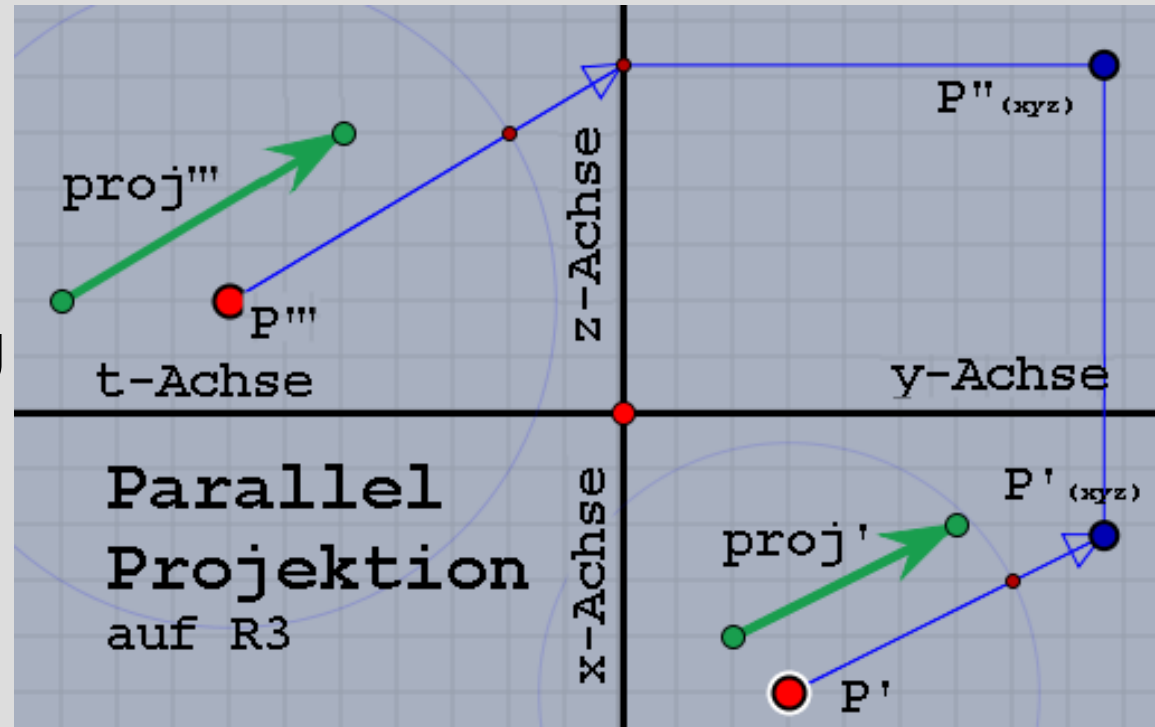
Durch Analogien kann man sich vom  $R0 \Rightarrow R1 \Rightarrow R2 \Rightarrow R3$  zum R4 empor bewegen.

Im Bild die Genese  
Eines vierdimensionalen  
Würfels und einige  
Skizzen davon



# Parallelprojektion $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^3$

- Wahl eines Projektionsvektors (eine Gerade genügt nicht wegen der fehlenden Zuordnung der Punkte)
- Vervollständigung mit Teilverhältnisübertragung
- Ergebnis: Punkt des  $\mathbb{R}^3$





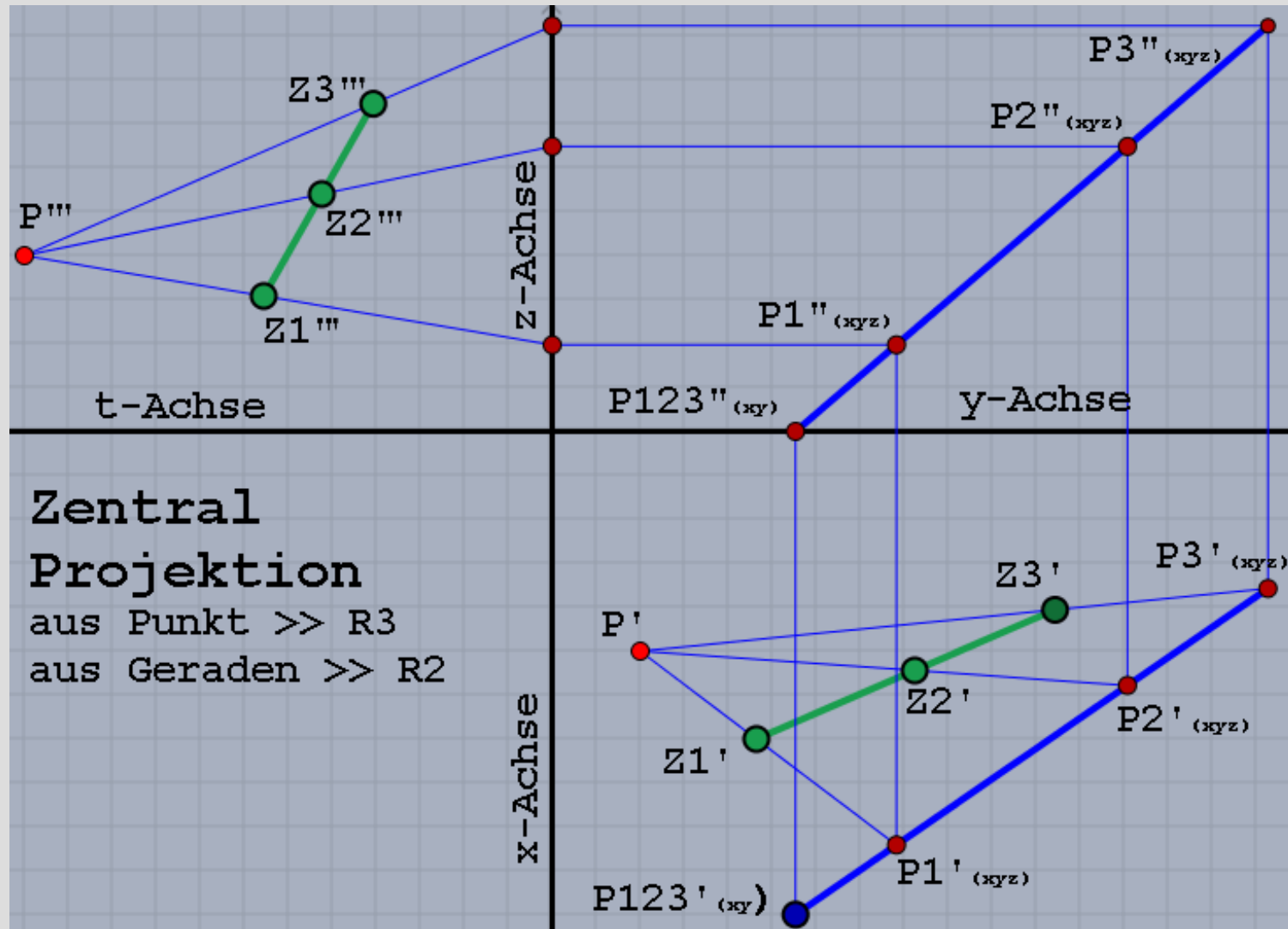
# Zentralprojektion aus einem Punkt ( $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ ) / einer Geraden ( $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ )

- Konstruktion im Prinzip gleich, der Projektionsstrahl wird mit dem Unterraum  $t=0$  geschnitten (Kreuzriss), das Ergebnis ist ein Punkt des  $\mathbb{R}^3$ .
- Wandert das ProjZentr. auf einer Geraden, so bewegt sich das Bild ebenfalls auf einer Geraden. Schneidet man diese mit  $z=0$ , hat man eine Art Grundriß der Projektion
- Deutungsmöglichkeit daher:

**Projektion aus Punkt  $\Rightarrow$  Punkt des xyz- $\mathbb{R}^3$**

**Projektion aus einer Geraden  $\Rightarrow$  Punkt des xy- $\mathbb{R}^2$**

# Konstruktion





# Festlegung

Angabe der Bilder der vier Einheitsvektoren auf den Koordinatenachsen.

Die Abbildungsmatrix erhält man durch Zusammenfassung der vier Bildvektoren.

Abbildung  $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^3$ :  $(3,4)$ -Matrix

Abbildung  $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^2$ :  $(2,4)$ -Matrix

$P=(x,y,z,t)=x*e_x+y*e_y+z*e_z+t*e_t \Rightarrow$

$P_s=x*Bild(e_x)+y*Bild(e_y)+z*Bild(e_z)+t*Bild(e_t)$

# Rechenbeispiel $R4 \Rightarrow R3$

Abbildung:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y+t \\ -y+z \end{pmatrix}$$

Alle Punkte, die auf den Nullpunkt abgebildet werden:

$$\begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+y+t \\ z-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w * \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

„Faser“ der Abbildung,  
eine Art Projektionsrichtung

# Rechenbeispiel $R4 \Rightarrow R2$

Abbildung:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x+y+t \end{pmatrix}$$

Alle Punkte, die auf den Nullpunkt abgebildet werden:

$$\begin{pmatrix} x+2y+z \\ 2x+y+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u * \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v * \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

„Faser“ der Abbildung,  
eine Art Projektionsrichtung

# Zylinderperspektive

## Linearperspektive:

Proj. Fläche = Ebene, Nachteil: starken Randverzerrungen (in Richtung Fluchtpunkt Objekte passsenderweise immer kleiner, in Gegenrichtung immer größer, sehr unschön)

## Zylinderprojektion

Proj. Fläche ein Halbzylinder,  $r=1$ , Achse  $z$ , Höhe unbegrenzt, Projektionszentrum  $Z$  ein Achsenpunkt  
Seitlich gelegene Teile werden kleiner, Abnormitäten in der Höhe bleiben

Anschließend: Abwicklung in die Ebene.

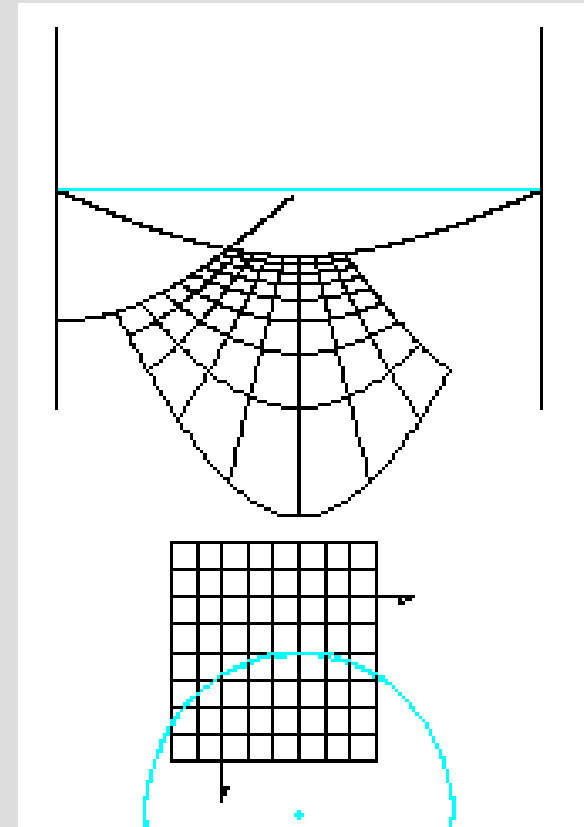
$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow P^c = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad u = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), v = h + \frac{z-h}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

# Zylinderperspektive

## Fluchtpunkte, Horizonte

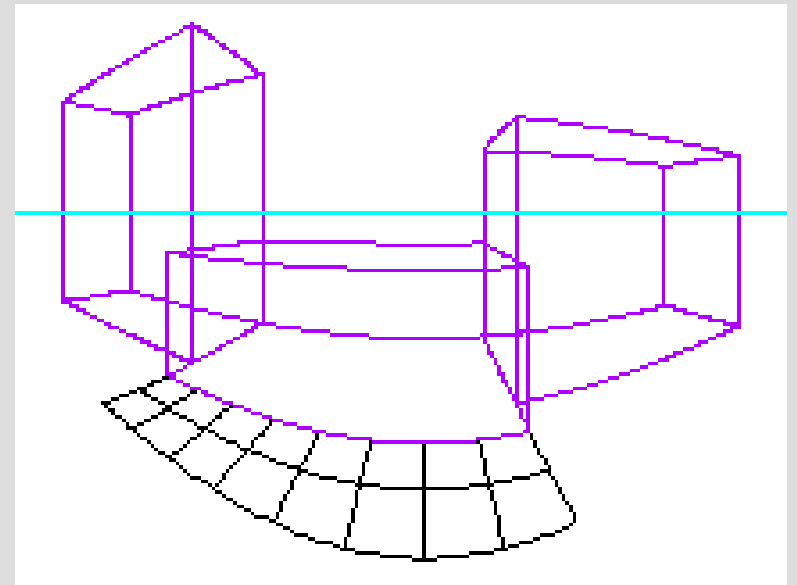
Fluchtpunkte aller Waagrechten auf dem waagrechten Horizont in der Höhe  $z=h$ .

- Fluchtpunkte aller Geraden  
|| zur  $y$ - $z$ -Ebene auf zwei  
Parallelen Geraden  $u=\pm\pi/2$
- $F_x=Z''$ ,  $F_y(\pm\pi/2, h)$



# Zylinderperspektive: Gerade

- $gZ$  = Ebene, Schnitt mit Bildflächenzylinder ergibt Ellipse. Abwicklung = Sinuskurve.
- Gerade parallel  $z$ : Bild ist eine lotrechte Gerade.
- Gerade parallel  $x$ : Projektionsebene ist zweitprojizierend, Abwicklung: halbe Periode einer Sinuskurve, von einem Extremwert zum nächsten, Wendepunkt  $Z''$ .
- Gerade parallel  $y$ : die Projektionsebene ist Pultebene, Abwicklung: halbe Periode einer Sinuskurve von einem Wendepunkt zum nächsten



# Abbildungen im Komplexen

Eine holomorphe (früher: reguläre) Funktion einer komplexen Variablen bildet ein Gebiet der  $z$ -Ebene auf ein Gebiet der  $w$ -Ebene ab:  $w=f(z)$ .

Beispiele:

- **ganze rationale** Funktionen

$w = f(z) = z + k$ : Parallelverschiebung:

$w = f(z) = k \cdot z$ : Drehstreckung, Drehwinkel  $\arg(k)$ , Streckfaktor  $\text{abs}(k)$ .

- **rational-gebrochene** Funktionen

$w = 1/z$ : Inversion am Einheitskreis und Spiegelung an der  $x$ -Achse. Parallelen zu  $x, y \rightarrow$  Kreise von parabolischen Büscheln

# Holomorphe Funktionen und Konforme Abbildung

- Gegeben: Kurve  $k$  der  $z$ -Ebene,  $a \in k$ ,  $\langle z_n \in k \rangle$  eine Folge von Punkten auf  $k$  mit  $\lim z_n = a$
- Anwendung von  $f(z)$ :  $\langle z_n \in k \rangle \rightarrow \langle f(z_n) \in f(k) \rangle$  mit  $\lim f(z_n) = f(a)$ .
- $f(z)$  holomorph  $\Leftrightarrow$  1. Ableitung in  $f(a)$  existiert

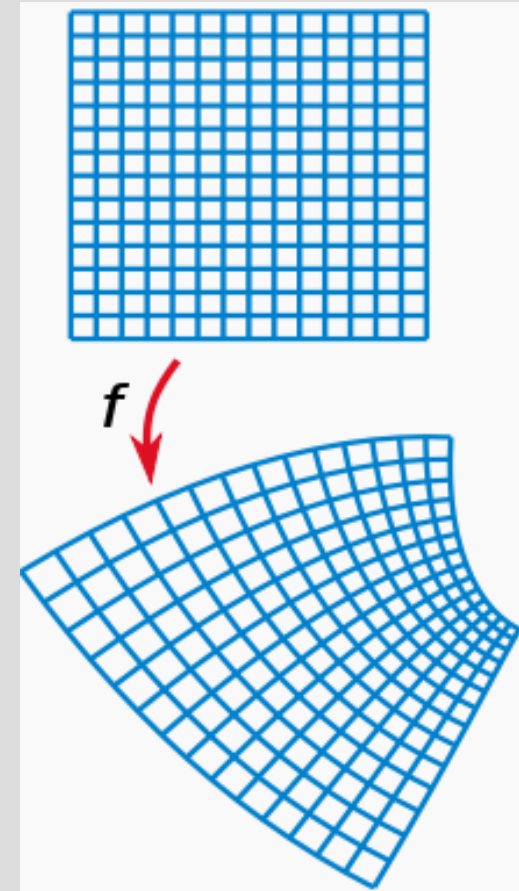
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{w_n - f(a)}{z_n - a} \right) = f'(a)$$

- Argument(linker Seite)  $\rightarrow$  Argument(rechte Seite)  
 $\arg(w_n - f(a)) - \arg(z_n - a) \rightarrow \arg(f'(a))$   
d.h. die **Tangente der Kurve und ihrer Bildkurve bilden den Winkel  $\arg(f'(a))$**



# Holomorphe Funktionen und Konforme Abbildung

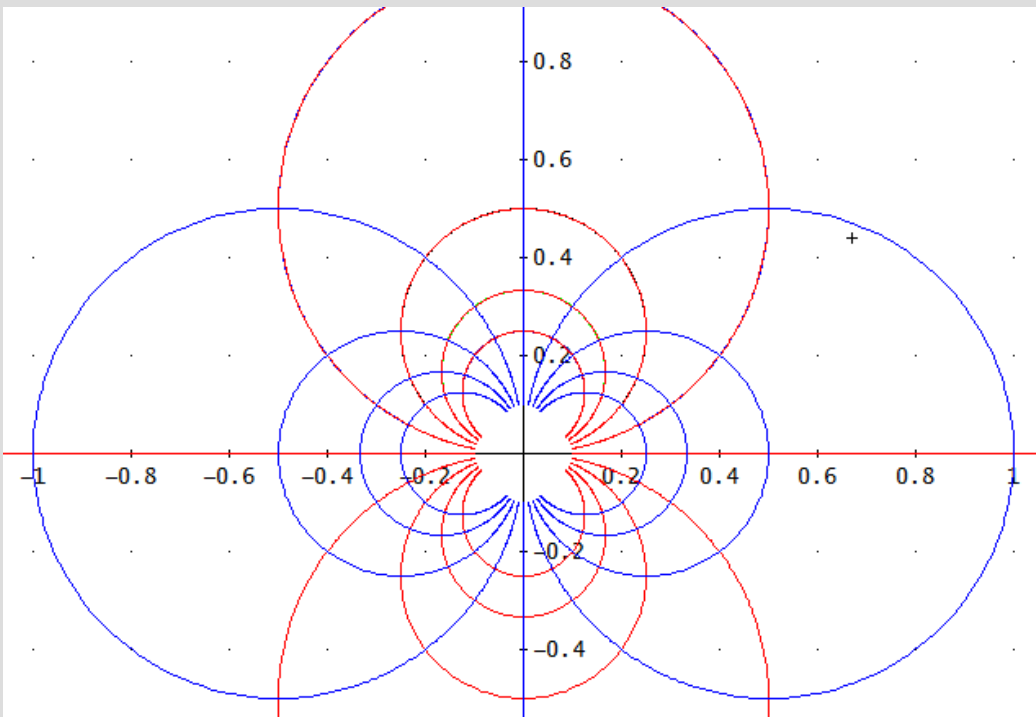
- Eine analoge Überlegung für die Beträge ergibt insgesamt:
- Die Abbildung  $w=f(z)$  ist lokal eine **Drehstreckung**.
- Überall wo  $f'(z)=0$  ist die Abbildung nicht konform
- Beweis nach Konrad Knopp, Elemente der Funktionentheorie, 1937)



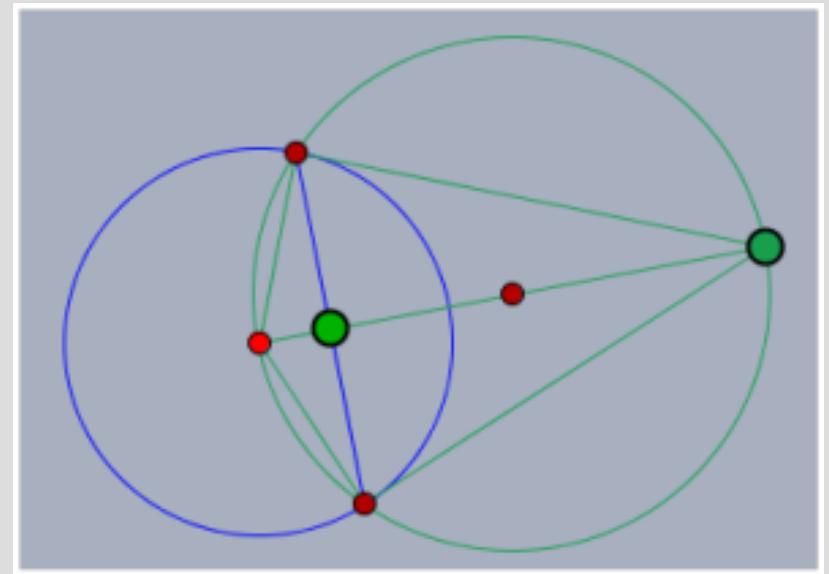
# Inversion

$$w(z) = \frac{1}{z'}$$

Bilder der x- bzw. y-Parallelen  
(rot bzw. blau)

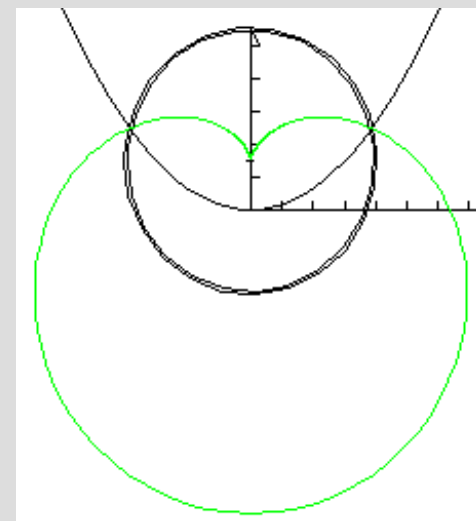
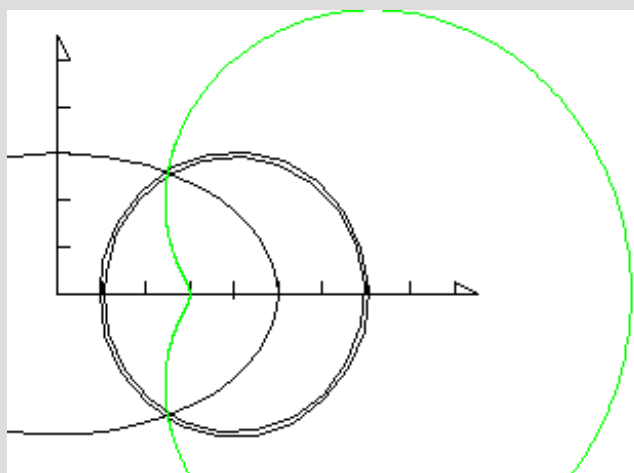
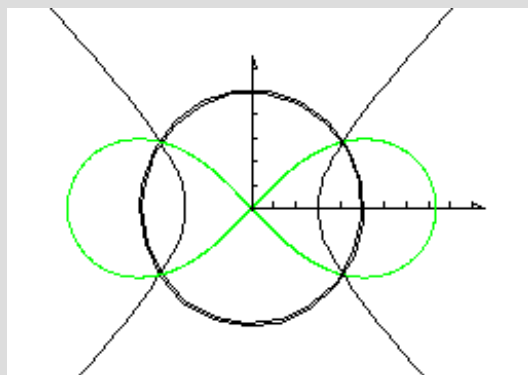
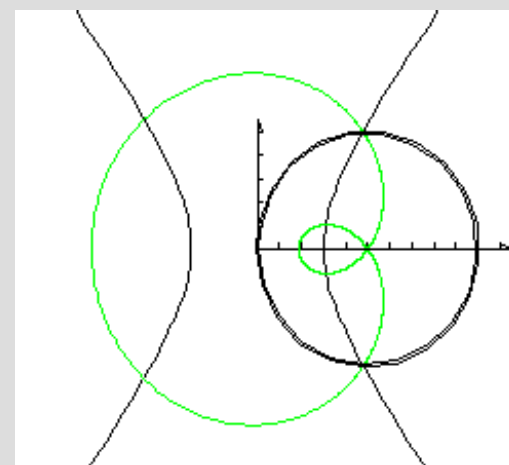
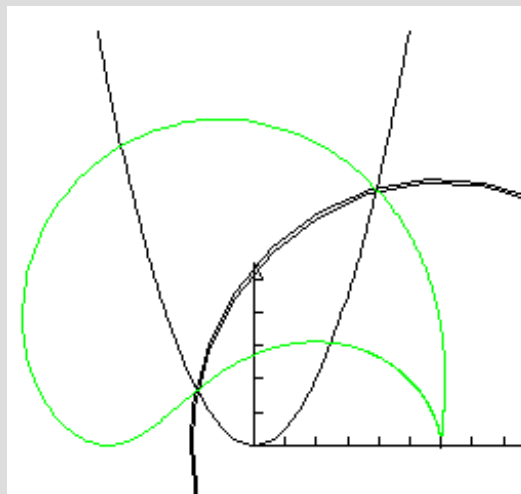
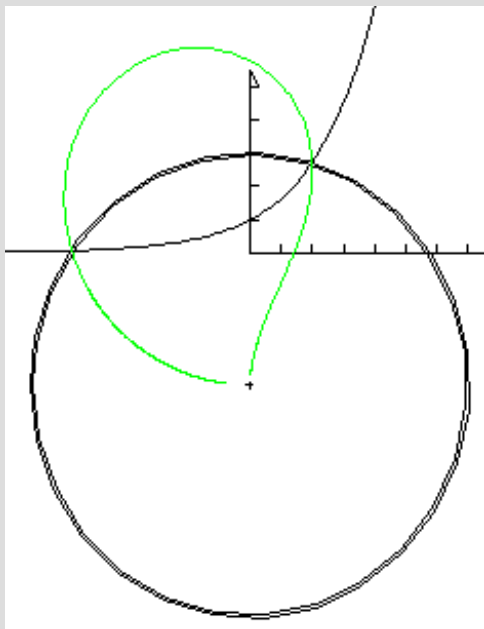


## Konstruktion



Sie ist eine  
Kreisverwandtschaft:  
Kreise (inkl. Geraden)  $\leftrightarrow$   
Kreise (inkl. Geraden)

# Inversion: Beispiele



# Möbius Transformation

Wird durch einen linear gebrochenen Term dargestellt

$$w(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

## Eigenschaften:

- konform (winkeltreu)
- Kreistreue: Kreise (inkl. Geraden)  $\leftrightarrow$  Kreise (inkl. Geraden)
- Doppelverhältnistreue (wie in der proj. Geometrie)
- zwei hintereinander ausgeführt Transformationen ergeben wieder eine MT, sie bilden eine Gruppe
- die inverse Lage zweier Punkte zu einem Kreis bleibt erhalten
- Festlegung: drei Paare Ursprung - Bildpunkt.

# Möbius-T: Beispiel 1

Kreis  $|z|=2 \rightarrow$  Kreis  $|z+1|=1$  abzubilden, außerdem

$$z_1=-2 \rightarrow w_1=0, z_2=0 \rightarrow w_2=i$$

der zu  $z_2=0$  bez. des ersten Kreises spiegelbildliche Punkt ist  $z_3=\infty$ , sein Bildpunkt  $w_3$  muß daher spiegelbildlich zu  $w_2$  bez. des zweiten Kreises sein  $w_3=0.5+0.5i$ .

Die Dreipunkteformel:

$$\frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3} = \frac{w-w_2}{w-w_3} : \frac{w_1-w_2}{w_1-w_3}$$

Ergebnis:

$$w(z) = \frac{-z-2}{(1+i)z+2i}$$

# Möbius-T: Beispiel 2

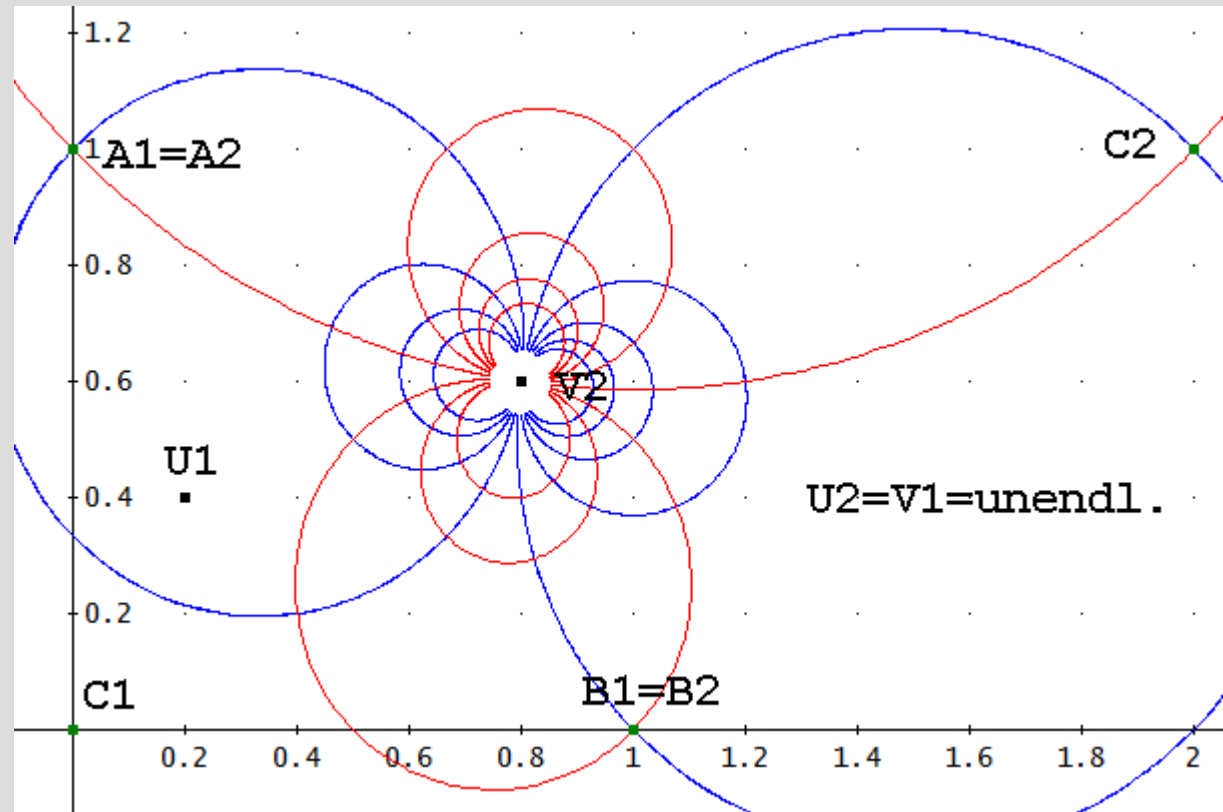
$$w(z) = \frac{5z - (3+4i)}{(4-3i)z - (2+i)}$$

Fixwerte:  $w(z)=z$ :  $z=1$  und  $z=i$

FluchtPkt:  $V_2=f(\infty)=0.8+0.6i$

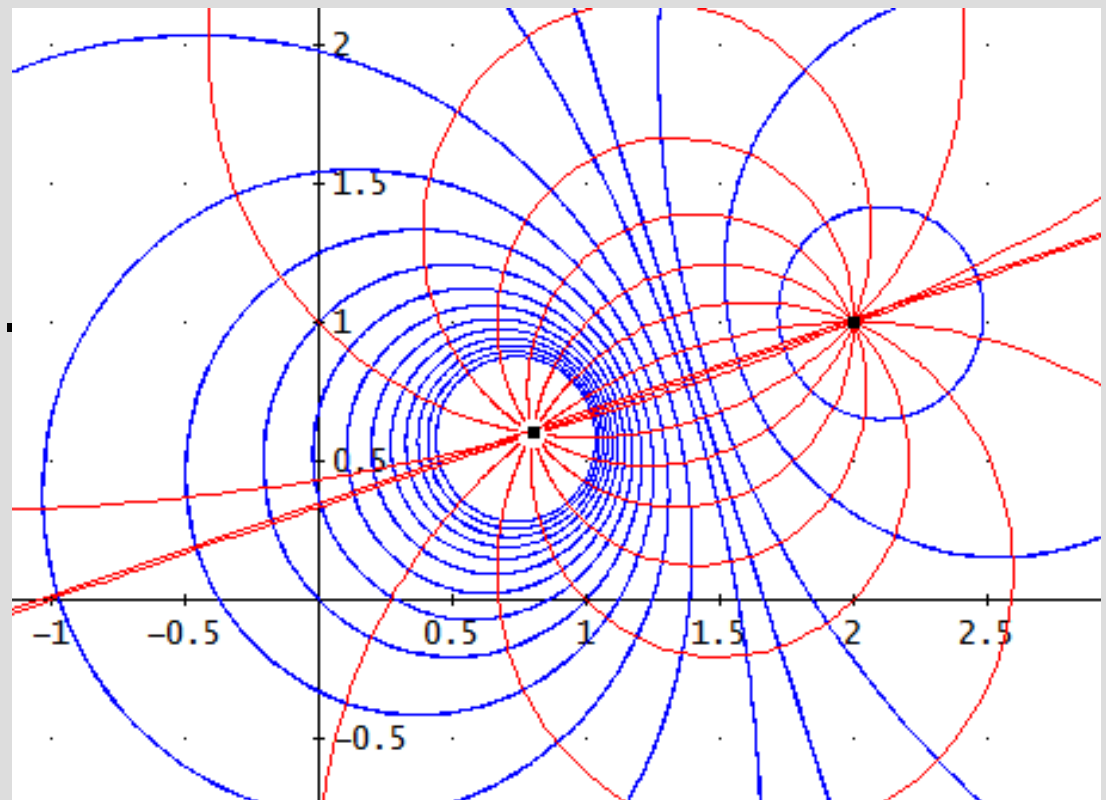
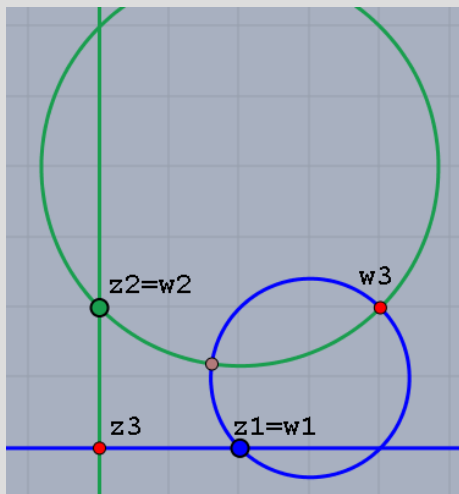
VerschwindungsPkt  $U_1=0.2+0.4i$

Parallele  
zu x und y:  
Orthogonale Kreise  
durch Fluchtpunkt  
(zwei rechtwinkelige  
parabolische  
Kreisbündel).



# Möbius-T: Beispiel 2

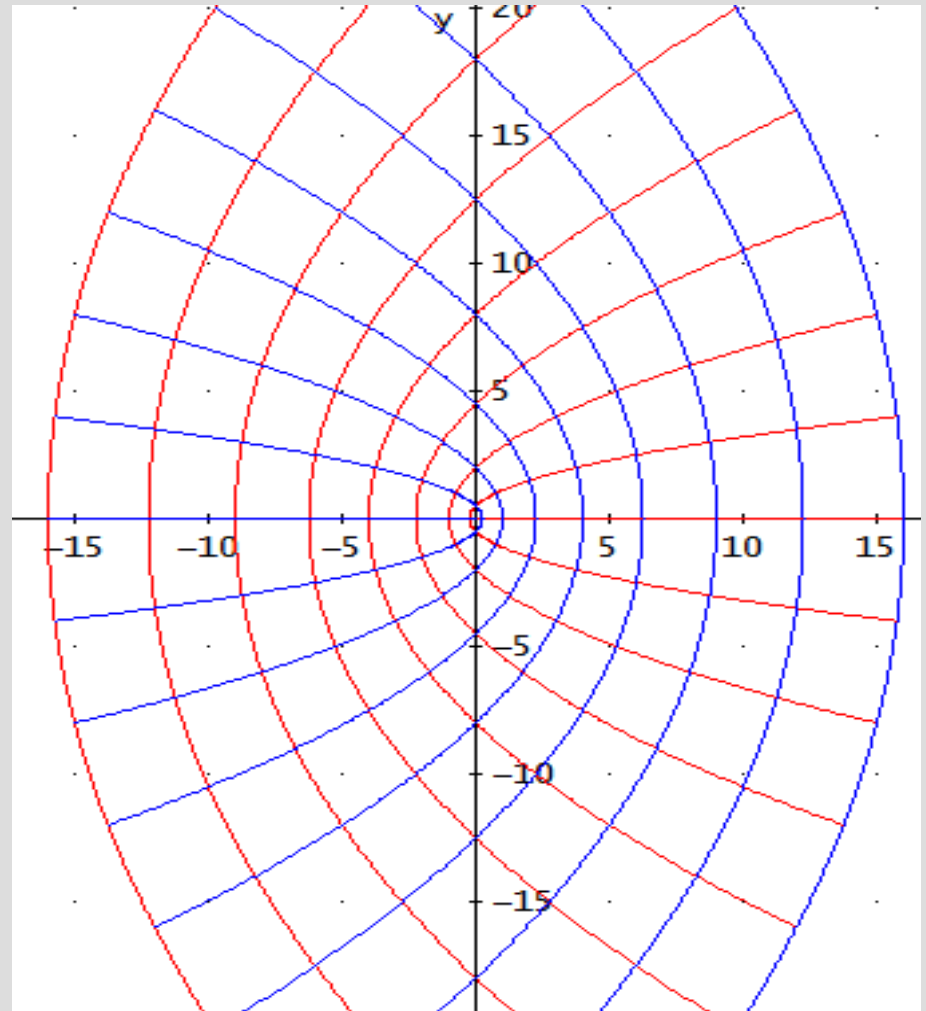
- Bilder der Radien und konzentrischen Kreise um 0:
- Elliptisches Kreisbündel mit den Grundpunkten  $v_2$  und  $f(0)=2+i$
- Besondere Rolle von Strahl und Kreis durch  $U_1$ :  $\rightarrow$  Gerade durch GrundPkte und Ssymm.



# Die Abbildung $w=z^2$

x-Parallele, rot  
 $u(t) := a \cdot i + t$   
Parabeln mit Achse x,  
nach rechts offen,  
Brennpunkt in O  
Winkel mit y:  $45^\circ$

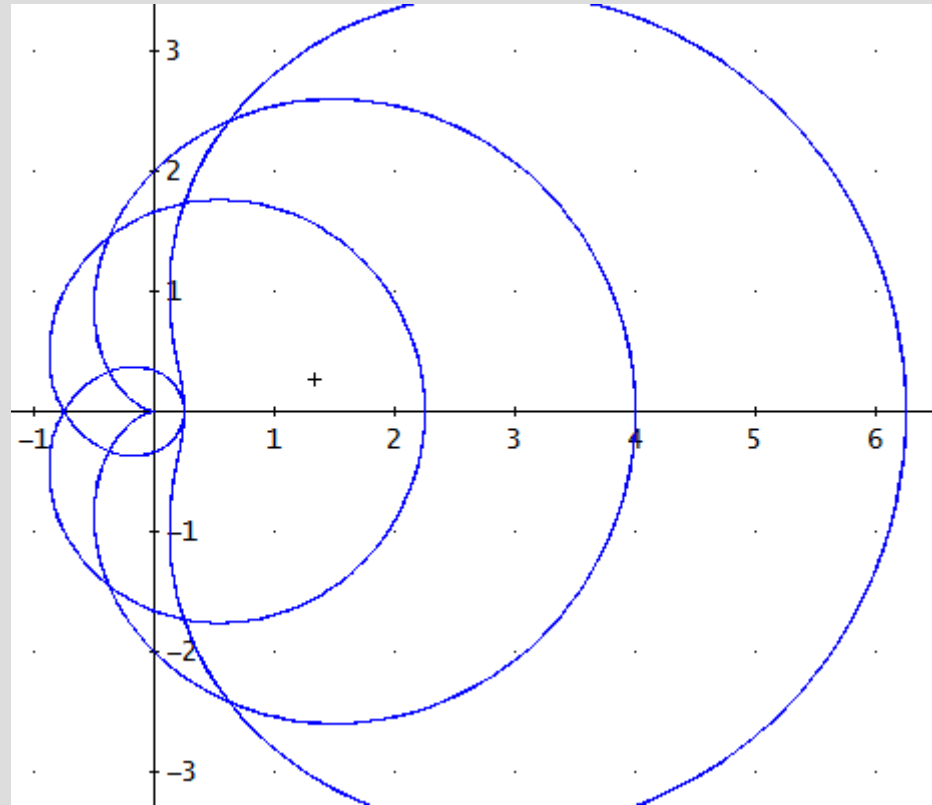
y-Parallele, blau  
 $v(t) := a + t \cdot i$   
Parabeln mit Achse x,  
nach links offen,  
Brennpunkt in O  
Winkel y:  $45^\circ$





# Die Abbildung $w=z^2$

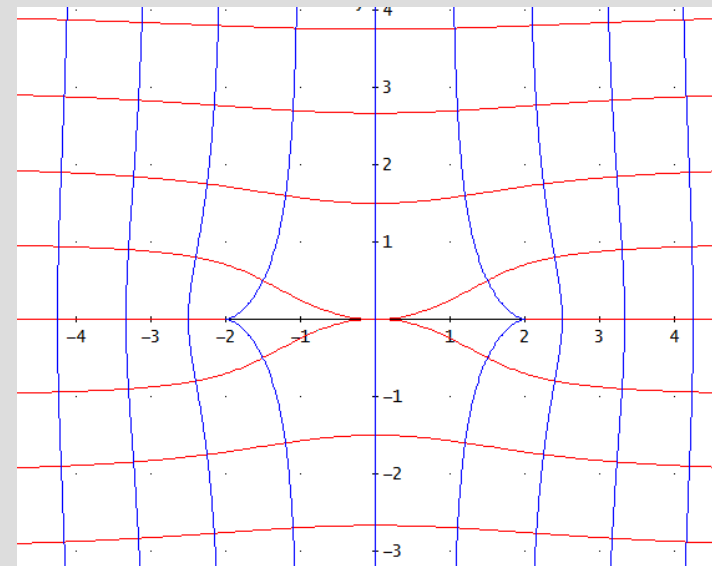
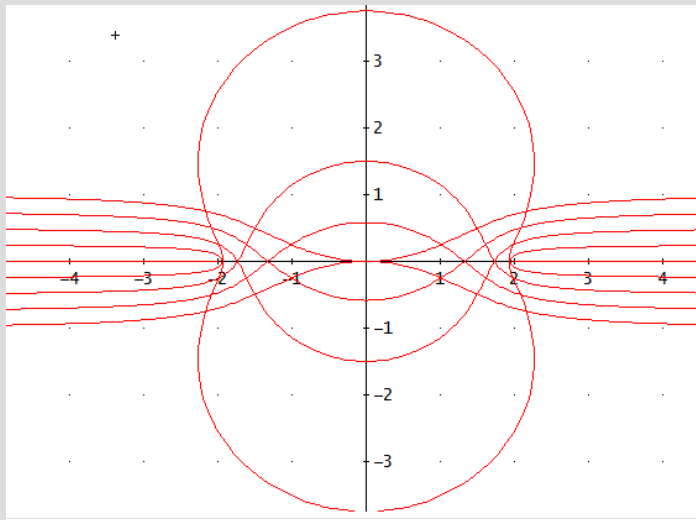
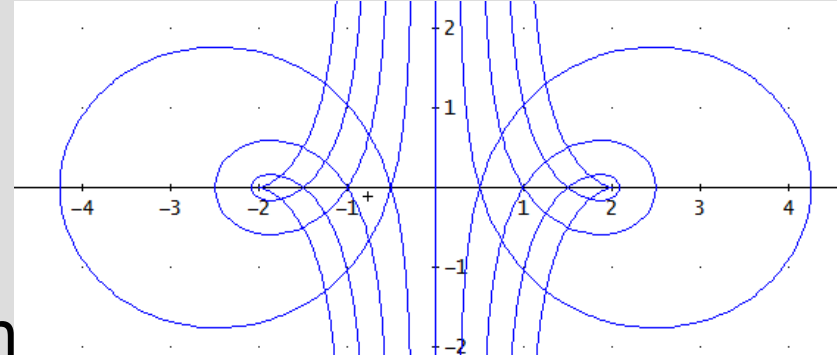
- Allgemeine Gerade: schräge Parabel (der Achsenwinkel wird zur Parabelachse verdoppelt)
- Die Abbildung ist in  $z=0$  nicht konform wegen  $f'(z)=0$
- Bilder von Kreisen:  
Pascal Schnecken  
 $r=1$ ,  
 $M=(0|0.5$   
bzw. 1 bzw. 1.5)



# Die Schukowski-Transformation (Жуковский)

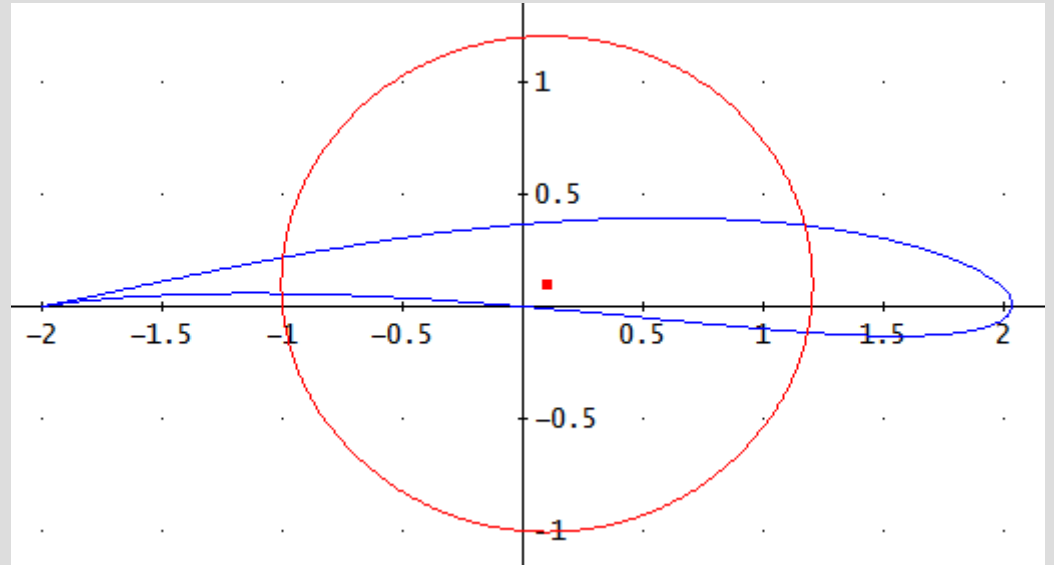
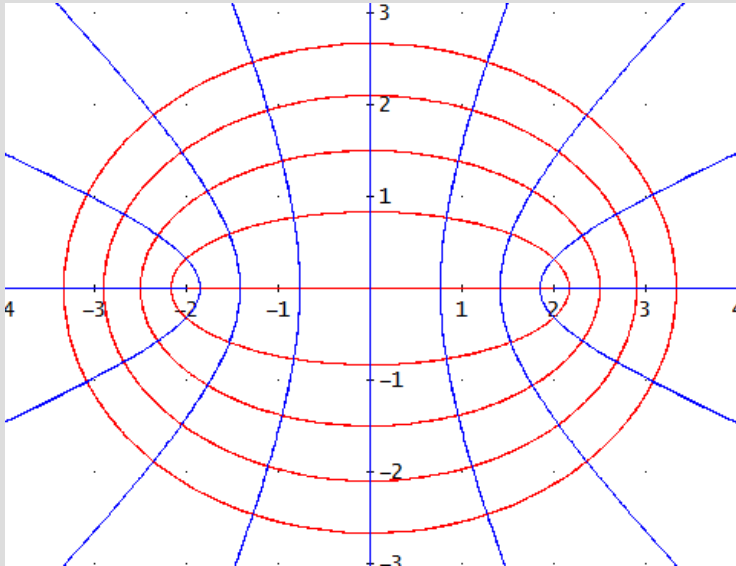
$$w(z) = z + \frac{1}{z}$$

- Fixwerte:  $z = \infty$
- Verschwindungspunkt:  $z = 0$
- Bilder der x- bzw. y-Parallelen (zuerst für  $|x| < 1, |y| < 1$ ):



# Die Schukowski-Transformation (Жуковский)

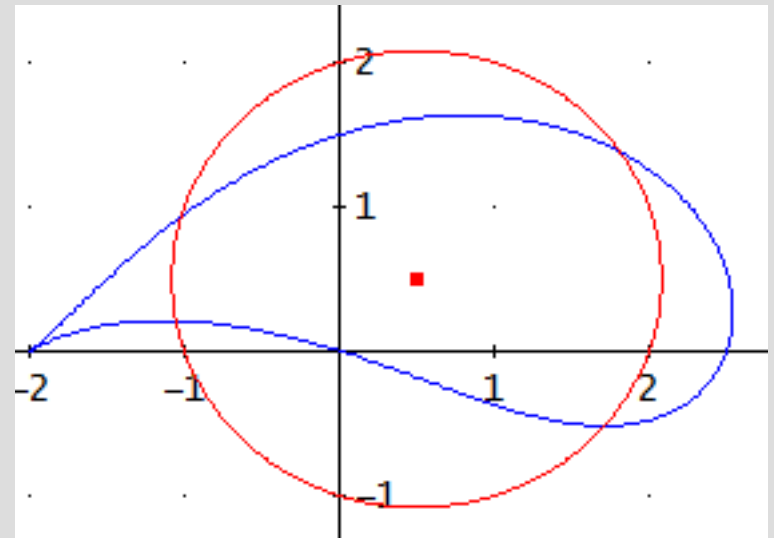
Bild der Radien durch und  
konzentrischen Kreise  
um O



Profil eines Tragflügels  
(Bild des Kreises mit  
 $M=0.1+0.1i$  und  $r=\sqrt{0.82}$ )

# Die Schukowski-Transformation (Жуковский)

- Bild eines Kreises mit  $M=0.5+0.5i$  und  $r=\sqrt{2.5}$  (Tragflügel eines Flugzeuges).
  - Spitzen erhält man, wenn der Kreis durch 1 oder -1 geht
  - Geht er durch 0: Asymptote
- 
- Viele Anwendungen der k.Z. in der Strömungslehre



# Flächenverzerrung, Längenverzerrung

Beispiel

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 0.5 y \\ 1.5 y \end{pmatrix} \quad \left| \begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix} \right| = 1.5$$

$$k_1 = 1, k_2 = 1.5$$

$$EV_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, EV_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Die Fläche des von  $EV_1$  und  $EV_2$  aufgespannten Parallelogrammes wird bei der Abbildung ver-  $k_1 * k_2$ -facht (ver-1.5-facht)
- $\text{Det}(A) = k_1 * k_2$  ist der Flächenverzerrungsfaktor.
- Ist  $\text{Det}(A) = k_1 * k_2 = 1$ , so ist die Abbildung flächentreu.

# Tissot'sche Indikatrix

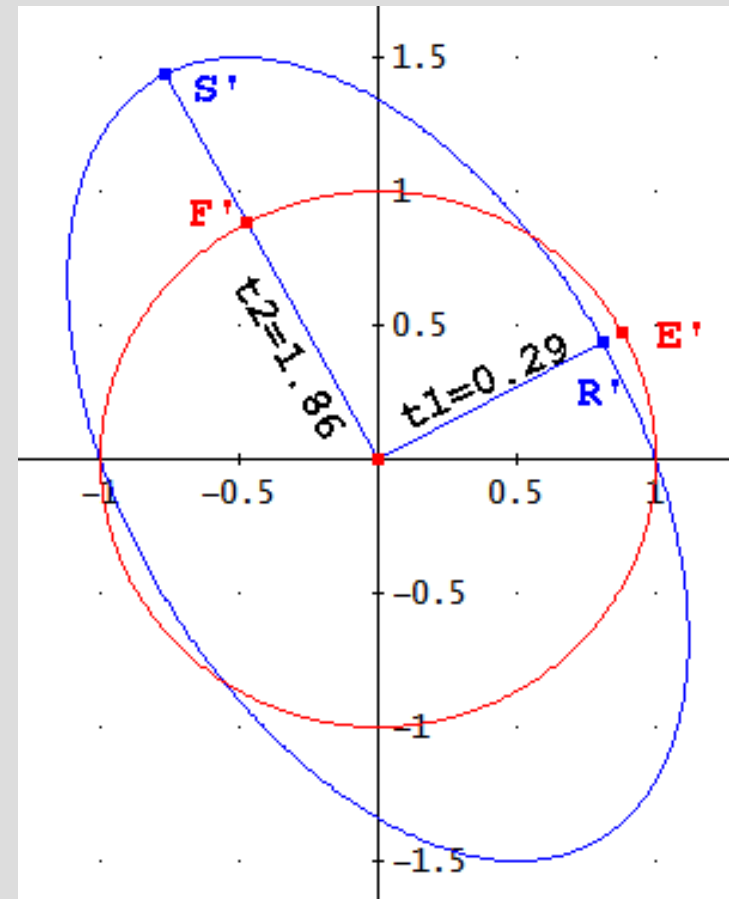
- Die Punkte des Einheitskreises (rot) der x-y-Ebene

$$P(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$P'(t) = A * \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) - 0.5 \sin(t) \\ 1.5 \sin(t) \end{pmatrix}$$

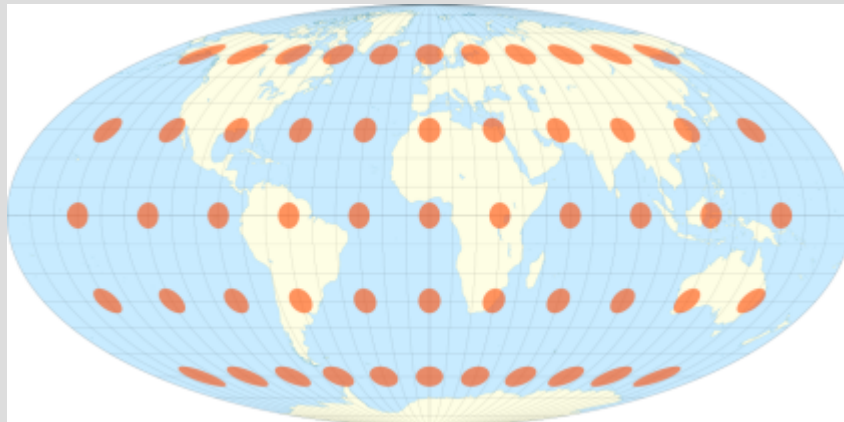
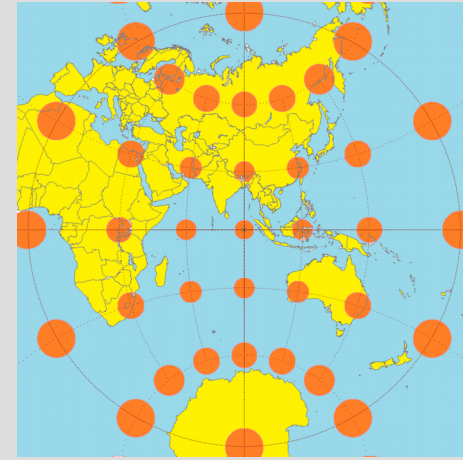
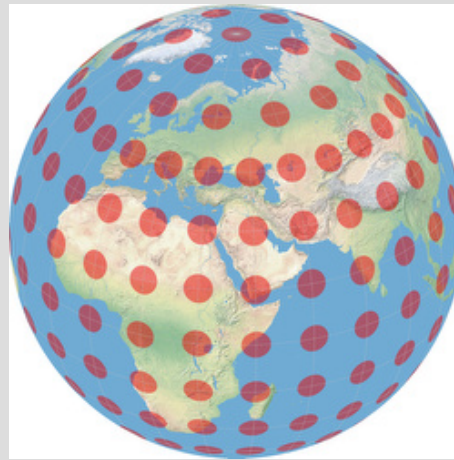
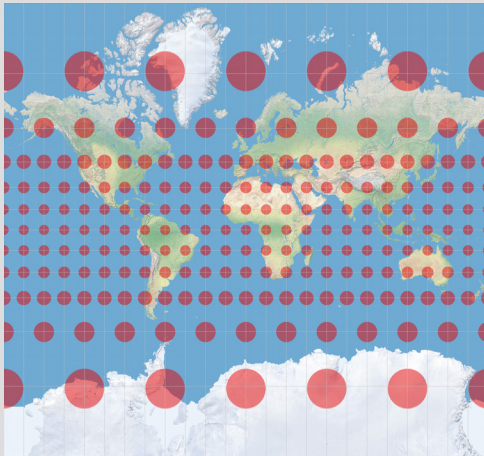
→ Ellipse (Tissot-Indikatrix).

- Rechtwinkelige Kreis-Ø  
→ konjugierte Ellipsen-Ø
- Achsen: Durchmesser mit der größten bzw. kleinsten Längenverzerrung Ø = **Hauptverzerrungsrichtungen**



# Tissot'sche Indikatrix und Kartenprojektionen

Mercator-Projektion - orthographische Projektion, - stereographische Projektion - Entwurf von Mollweide.



# Jacobi Matrix

Lineare Approximierung einer Funktion  $p(x,y)$ :

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}+\mathbf{dx},\mathbf{y}+\mathbf{dy})=\mathbf{p}(\mathbf{x},\mathbf{y})+\mathbf{p}_x(\mathbf{x},\mathbf{y})*\mathbf{dx}+\mathbf{p}_y(\mathbf{x},\mathbf{y})*\mathbf{dy}$$

Gegeben Abbildung der x-y-Ebene auf sich durch:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P'\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

Re PQRS (Seiten dx und dy || x bzw. y, Fläche dx\*dy)

$\Rightarrow$  Parallelogramm (Ecke P', Seitenvektoren bzw. Fläche

$$\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} f_x(x,y)*dx \\ g_x(x,y)*dx \end{pmatrix}, \overrightarrow{P'S'} = \begin{pmatrix} f_y(x,y)*dy \\ g_y(x,y)*dy \end{pmatrix}$$

$$FL' = \begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} dx*dy = (f_x*g_y - f_y*g_x) dx*dy$$



# Jacobi Matrix

Die Determinante (bzw. ihre Matrix) heißen **Jacobi-Determinante**, sie gibt die Flächenverzerrung an.

- Eine Affinität ist

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P'\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A*x+B*y \\ C*x+D*y \end{pmatrix}$$

- **Flächentreu:**  $\text{Det} = AD-BC = 1$
- **umkehrbar:**  $\text{Det} \neq 0$ :
- Ist  $\overrightarrow{P'Q'} * \overrightarrow{P'R'} = f_x f_y + g_x g_y = 0$   
werden die x-y Parallelen  
**winkeltreu** auf die entsprechenden u-v  
Geraden abgebildet

# Konforme Affinitäten

Gegeben: Affinität, Gerade  $g$ , Bildgerade  $g'$

$\angle g, x = \varepsilon$ ,  $\angle g', u = \phi$ .

Abbildung konform  $\Rightarrow \phi = \varepsilon + \gamma$  mit konstantem  $\gamma$

$$\tan \varepsilon = \frac{y}{x}, \tan \varphi = \frac{v}{u} = \frac{C*x + D*y}{A*x + B*y} = \frac{C + D*\left(\frac{y}{x}\right)}{A + B*\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{C + D*\tan \varepsilon}{A + B*\tan \varepsilon}$$

$$\varphi = \varepsilon + \gamma, \tan(\varepsilon + \gamma) = \frac{C + D*\tan \varepsilon}{A + B*\tan \varepsilon} = \frac{\tan \varepsilon + \tan \gamma}{1 - \tan \varepsilon * \tan \gamma} = \frac{\sin \gamma + \cos \gamma * \tan \varepsilon}{\cos \gamma - \sin \gamma * \tan \varepsilon}$$

Bestimmung von  $\gamma$ :  $\gamma = 0$ ,  $\varepsilon = 0$

$$\tan \gamma = \frac{C}{A}, \sin \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + C^2}}, \cos \gamma = \frac{A}{\sqrt{A^2 + C^2}}$$

Einsetzen und alles bis auf  $\varepsilon$  eliminieren

# Konforme Affinitäten

- Ergebnis: Gleichung in  $\varepsilon$ , die identisch erfüllt sein muss:

$$\tan^2 \varepsilon * (A * B + C * D) + \tan \varepsilon * (A^2 - A * D + C^2 - B * C) = 0$$

- daher: Bedingungen Winkeltreue:  
 $A * B + C * D = 0$  und  $A^2 + C^2 = A * D - B * C$
- Auflösung ergibt:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A * x + B * y \\ -B * x + A * y \end{pmatrix}$$

- Und das ist eine Drehstreckung,  
Winkel  $\varepsilon = \text{ArcTan}(-B/A)$ , Faktor  $\sqrt{A^2 + B^2}$

# Berührende Affinität einer Abbildung

Gegeben eine Abbildung, P ein Punkt und Q ein weiterer:

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \quad Q = P + \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \rightarrow Q' = P' + \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x+dx, y+dy) \\ g(x+dx, y+dy) \end{pmatrix}$$

Relativ zu P': Approximierung mit Totalem Differential:

$$Q' = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x * dx + f_y * dy \\ g_x * dx + g_y * dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

**Beispiel:**

Für P(2,1)  $P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ xy \end{pmatrix}, \text{ JacobiMatrix} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

## Berührende Affinität: Beispiel

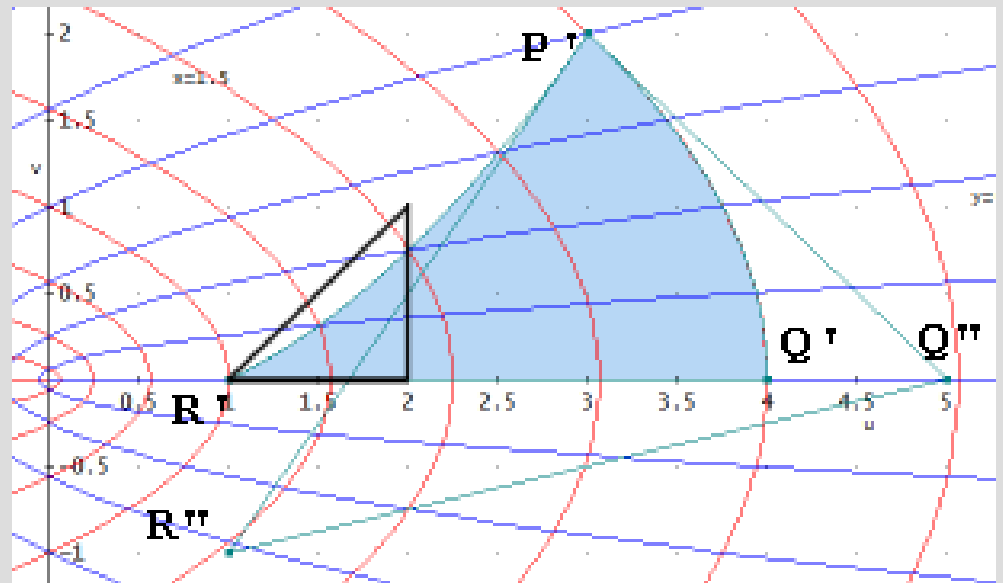
Dreieck  $P(2,1)$  ,  $Q(2,0)$ ,  $R(1,0)$  ... schwarz

$\Rightarrow P'(3,2), Q'(4,0), R'=R$  bzw. für

- Q:  $dx=0, dy=-1, du=2, dv=-2, r$   
R:  $dx=-1, dy=-1, du=-2, dv=-3,$

- Für die Approximationen:  
 $Q'' = P' + (2, -2) = (5, 0)$   
 $R'' = P' + (-2, -3) = (1, -1)$

- Konstruktion:  
Bild des Dreieckes PQR  
unter dem Original (blau)  
und unter der  
berührenden Affinität



# Cauchy-Riemann'sche DiffGl.

Beliebige Abbildung  $\Rightarrow$  berührende Affinität bzw.

Original  $\Rightarrow$  lineare Vereinfachung:

$$Q' = \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x * dx + f_y * dy \\ g_x * dx + g_y * dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

Die Affinität

Ist genau dann konform,

wenn gilt:  $A = D$ ,  $B = -C$ , also wenn

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow P' \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A * x + B * y \\ C * x + D * y \end{pmatrix}$$

$$f_x = g_y \wedge f_y = -g_x$$

# Kugel: Fundamentalgrößen

Gleichung:

$$X(u=Länge, v=Breite) = \begin{pmatrix} \cos(u) * \cos(v) \\ \sin(u) * \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$
$$X_u = \begin{pmatrix} -\sin(u) * \cos(v) \\ \cos(u) * \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}, X_v = \begin{pmatrix} -\cos(u) * \sin(v) \\ \sin(u) * \sin(v) \\ \cos(v) \end{pmatrix}$$

$$E = X_u^2 = \cos^2 v, F = X_u X_v = 0, G = X_v^2 = 1, W^2 = E * G - F^2$$

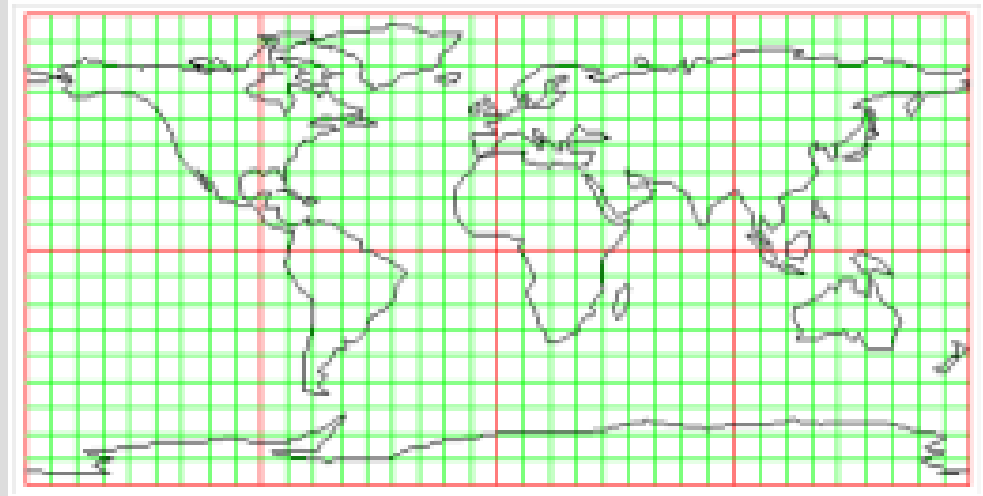
E und G sind die Längenelemente von Breiten- und Längenkreisen, F der Cos des Winkels (90°) und W die Fläche einer Gittermasche.

# Normale Zylinderprojektion

Format: Rechteck

Abbildungsgleichungen:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Lg}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{f}(\mathbf{Br})$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f'(Br) \end{pmatrix}$$



Isometrie: am Äquator

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = f'(Br)^2, \quad W = f'(Br)$$

Flächenverzerrung:  $f'(Br) = \cos(Br)$

Längenverzerrungen:

$L_1 = 1 / \cos(Br)$ ... Breitenkreis,  $L_2 = f'(Br)$ ... Meridiane

Ausnahmen: N, S  $\rightarrow$  obere/ untere Seite der Karte  
(Bild: Plattkarte)



# Beispiele

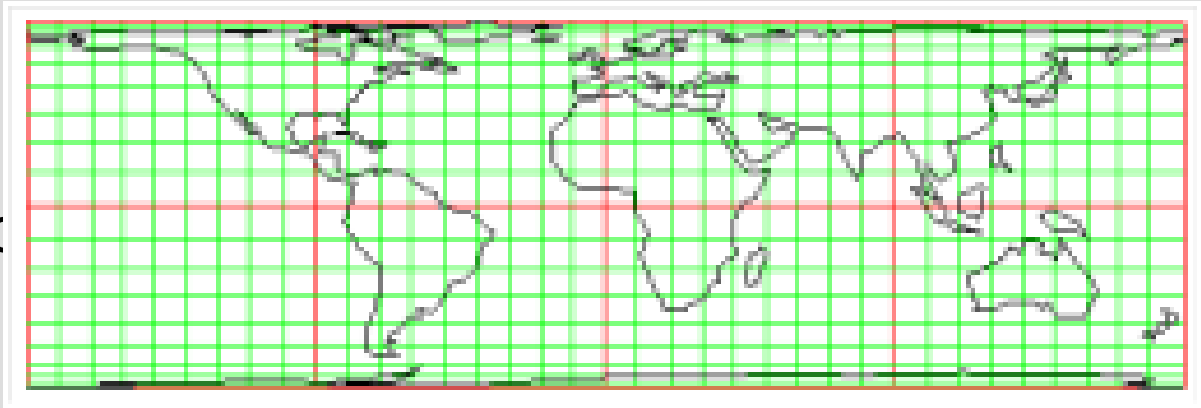
## Flächentreue Zylinderprojektion (Archimedes)

$$W(\text{Kugel}) = W(\text{Karte})$$

$$\Rightarrow f'(Br) = \cos(Br)$$

$$\Rightarrow f(Br) = \sin(Br)$$

Waagrechte Projektion  
aus z-Achse auf  
Berührzylinder



Elementargeometrie: Fläche einer Kugelzone = Fläche ihrer  
Projektion auf Berührzylinder

## Plattkarte (Marinus von Tyros)

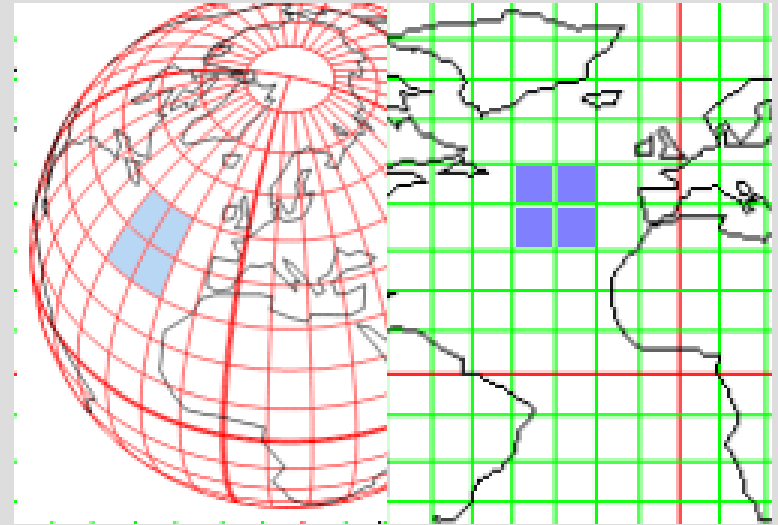
Abbildungsgleichungen:

$$u = Lg, v = Br$$

$$E = 1, F = 0, G = 1, W = 1, \text{Flächenverzerrung: } 1/\cos(Br)$$

# Abbildungsgleichung der Mercatorprojektion

- „Rechteck“ auf der Kugel  
Seiten  $d Lg * \cos Br, dBr$
- $\Rightarrow$  Rechteck auf der Karte  
 $du = d Lg, dv = f(Br) * dBr$
- Winkeltreue  $\Rightarrow$  ähnlich mit Faktor  $1/\cos Br$  (erste Seite)  
 $\Rightarrow$  zweite Seite =  $dBr/\cos Br$



- Jacobi Matrix daher

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos Br} \end{pmatrix} \quad f_u = 1, f_v = 0, g_u = 0, g_v = \frac{1}{\cos Br}$$

- und durch Integration  $u = Lg, v = \ln\left(\tan\left(\frac{Br}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

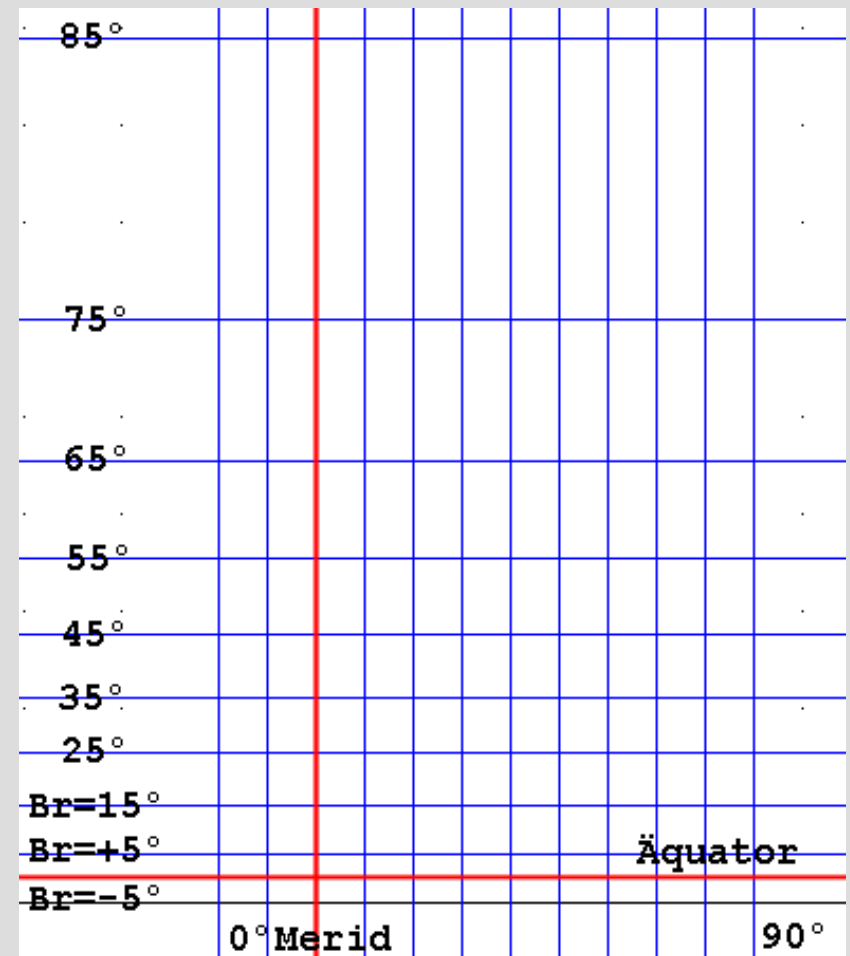
# Mercator Projektion

- Seit dem 16. Jh. die wichtigste Kartenprojektion bis heute (google maps, openstreetmap, amtliche Kartenwerke vieler Staaten).
  - Ausgangspunkt: fehlerhafte Kurse in der Schifffahrt, basierend auf der Karte von Marinus
  - Mercator erkannte die Notwendigkeit, den Maßstab mit steigender Breite anzupassen.
  - Alle Methoden der modernen Mathematik waren noch unbekannt (Integration, Logarithmen, Trig. Fkt)
- Vergl. [http://www.wilhelmkruecken.de/Summary\\_D\\_E.pdf](http://www.wilhelmkruecken.de/Summary_D_E.pdf)



# Verfahren von Mercator

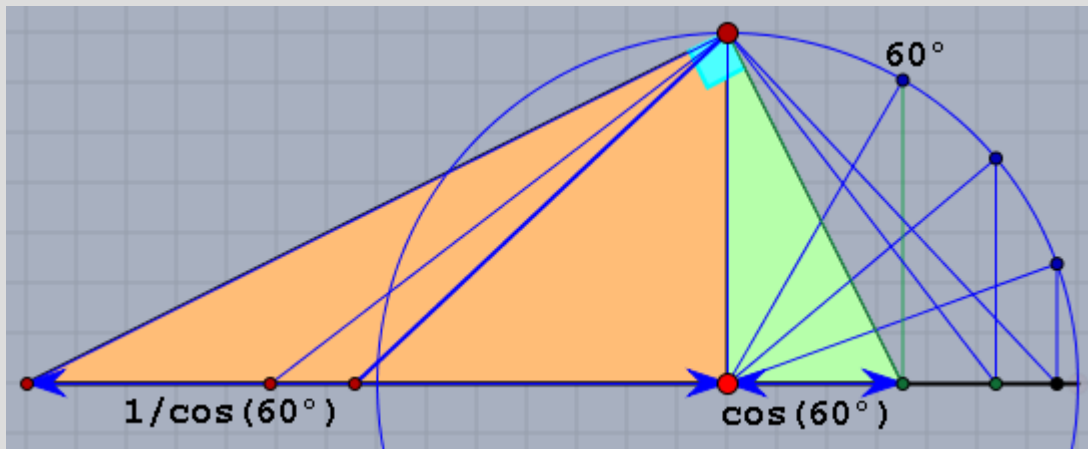
- Rechtecke auf der Kugel (hier: Breitenabstände  $10^\circ$  ab  $-5^\circ$ ), die dann mit Faktor  $1/\cos(\text{Br})$  vergrößert werden.
- 1. Rechteck von  $-5^\circ$  bis  $5^\circ$ , Streckung mit  $1/\cos 0^\circ = 1$ .
- 2. Rechteck von  $5^\circ$  bis  $15^\circ$ , Streckung mit  $1/\cos 10^\circ$
- 3. Rechteck von  $15^\circ$  bis  $25^\circ$ , Streckung mit  $1/\cos 20^\circ$



$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
1	1.015	1.064	1.154	1.305	1.555	2	2.923	5.758

# Verfahren von Mercator (sinngemäß)

- Heute würde man die Faktoren so konstruieren:

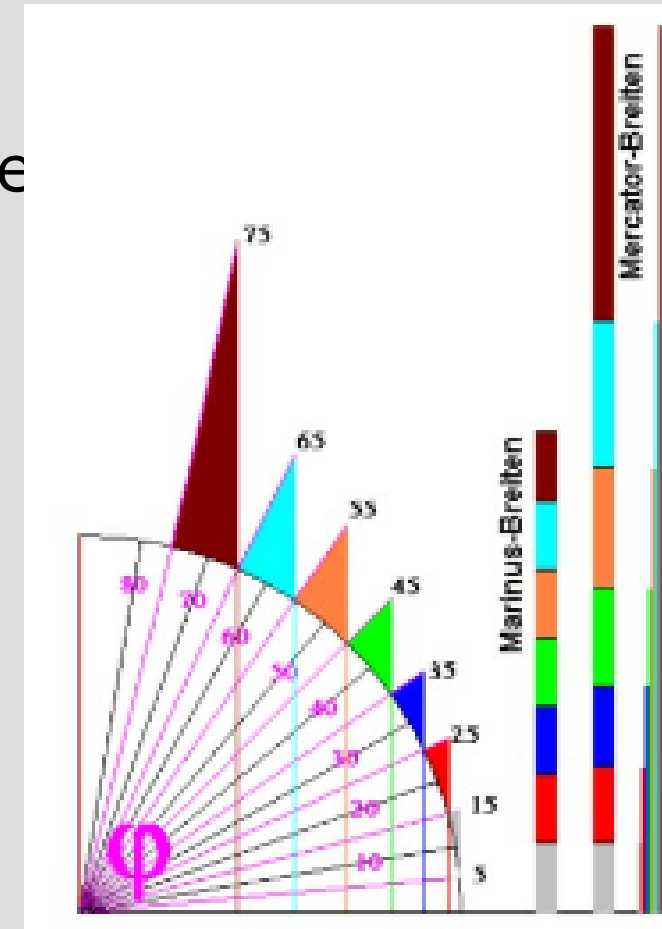
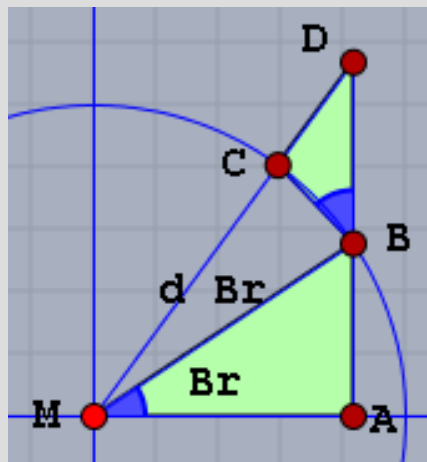


- Unterschiede zu den „richtigen“ Werten: bis  $30^\circ$  minimal, bis  $60^\circ$  noch immer gut (niemand kam weiter nach Norden)

$0^\circ$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
0	0.1754	0.3563	0.5493	0.7629	1.010	1.316	1.735	2.436
0	0.1772	0.3629	0.5644	0.7923	1.063	1.412	1.923	2.928

# Verfahren von Mercator (tatsächlich)

- Wegen der Kleinheit der Streifen (bei M.  $1^\circ$ ) sind die beiden Dreiecke „so gut wie ähnlich“
- $MA : MB = BC : BD = \cos Br$ ,  
und  $BD = BC / \cos Br$
- Geht man von einem  $1^\circ$  Raster aus, sind BC und BD Seiten des Rechteckes auf der Karte



# Transversale Mercatorprojektion

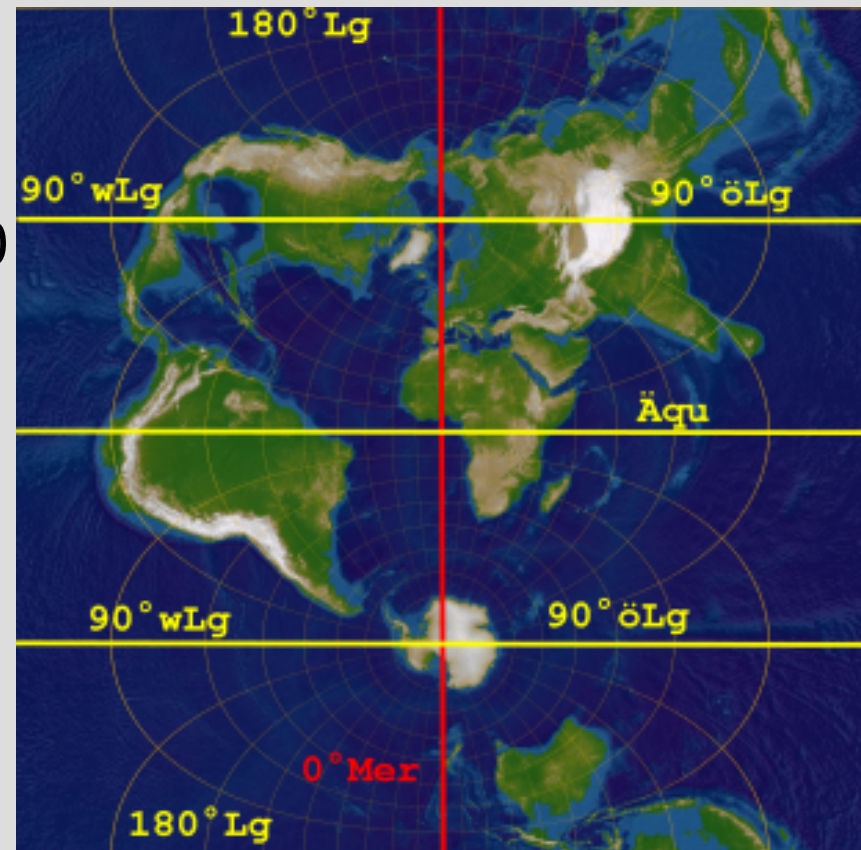
[https://geo.tuwien.ac.at/fileadmin/editors/VGI/VGI\\_199515\\_Bretterbauer.pdf](https://geo.tuwien.ac.at/fileadmin/editors/VGI/VGI_199515_Bretterbauer.pdf)

- Zwischengeschalteter Zylinder berührt die Kugel längs eines Meridiankreises (z.B. 0°-Meridian)
- Formeln wie für normale Lage, Koordinaten der Kugelpunkte  $P(Lg=u, Br=v)$  müssen auf ein neues KooSyst umgerechnet werden, („Äquator“ = 0°-Meridian, N-S-Pol: Schnittpunkte der Zylinderachse mit der Kugel)
- Dazu ist das (gegenüber P) rechtsseitige sphärische Dreieck  $P - N-Pol_{alt} - N-Pol_{neu}$  aufzulösen.
- Ergebnis:  
$$\sin(Br_{neu}) = \cos(v) * \sin(u)$$
$$\tan(Lg_{neu}) = \tan(v) / \cos(u)$$

# Transversale Mercatorprojektion

$$X \text{ (Hochwert)} = \arctan \frac{\tan v}{\cos u}, Y \text{ (Rechtswert)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin u * \cos v}{1 - \sin u * \cos v}$$

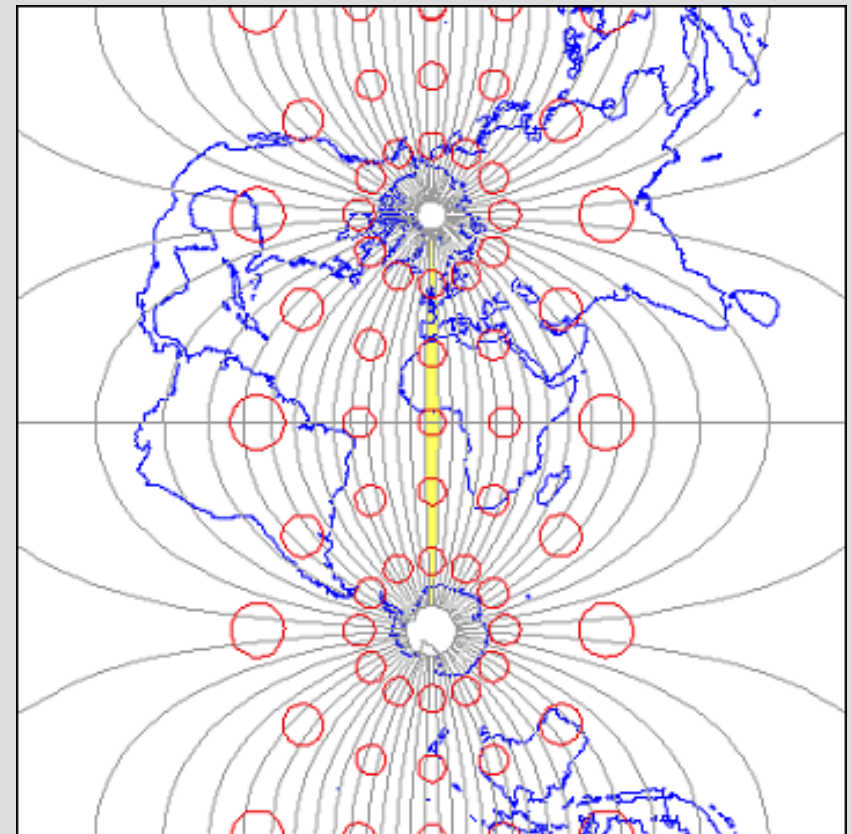
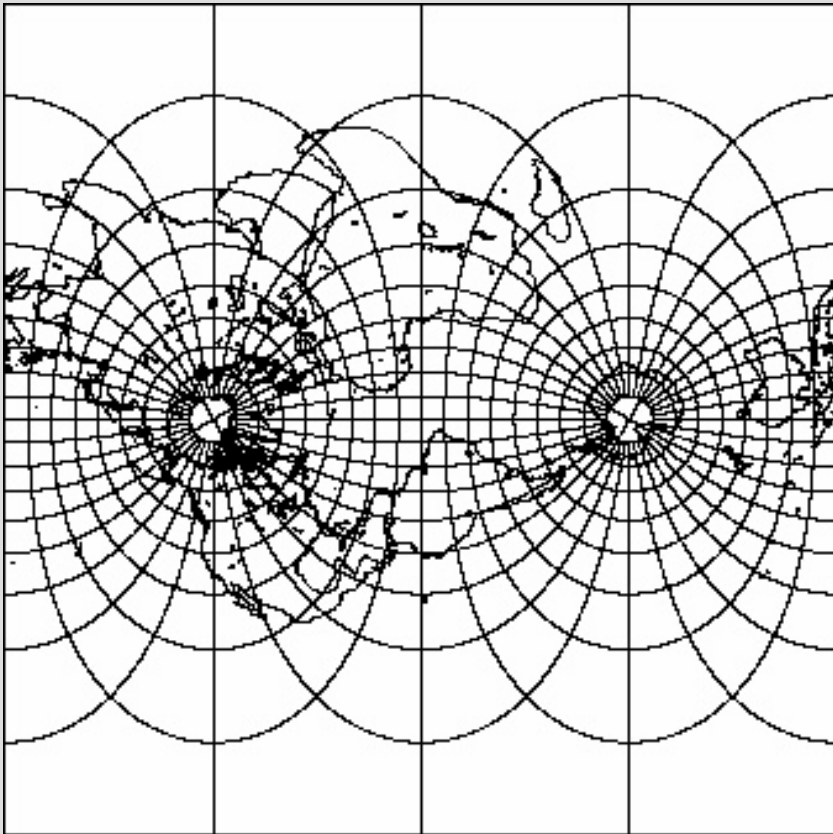
- Format; waagr. Streifen, Hochw.  $\pm\pi$
- Äquator: Hochw. 0
- Pole: Hochw.  $\pm\pi/2$ , Rechtsw. 0
- $\pm 90^\circ$  Mer: Hochw.  $\pm\pi/2$
- $\pm 180^\circ$  Mer: Hochw.  $\pm\pi$
- Breitenkreise: Ovale um N,S
- Meridiane: sinusartig, durch N,S
- Lg  $90^\circ$ , Br  $0^\circ$ : Fernpunkt





# Gradnetz

Gradnetz: Berührungsmer.  $30^\circ\text{W}$  und  $0^\circ$ , Tissot-Indikatrix

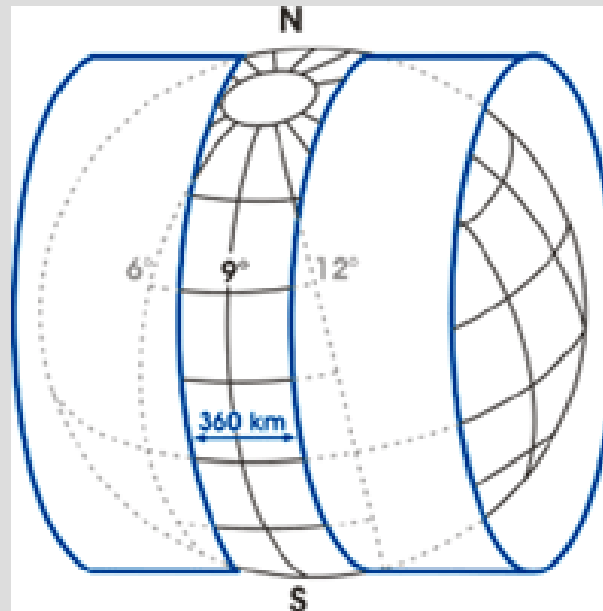
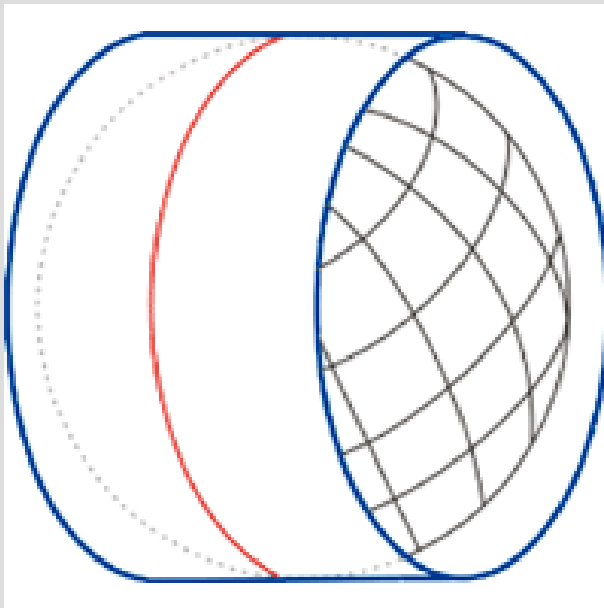


# Gauss-Krüger Koordinaten

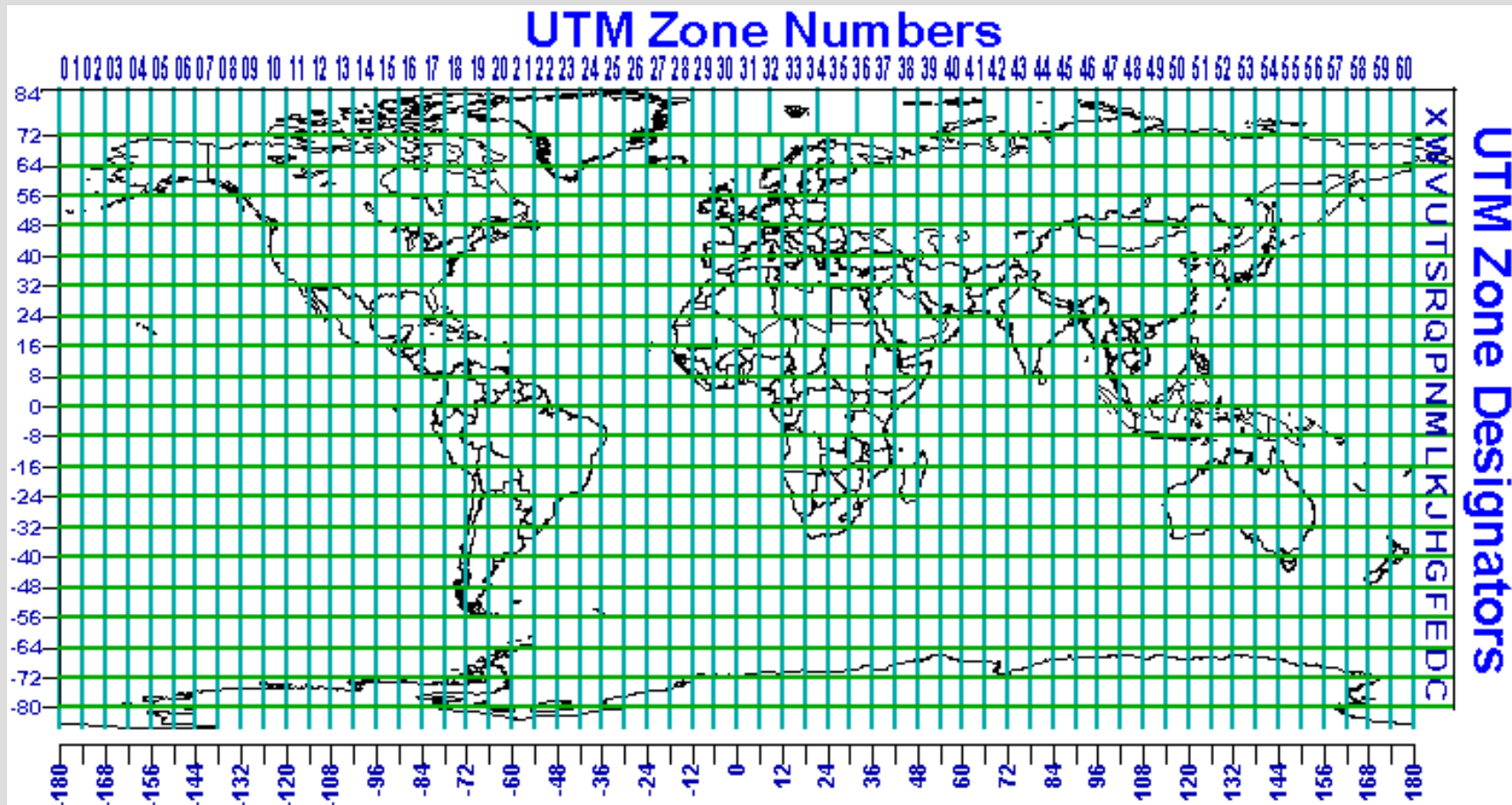
- Aufteilung der Erde 3° breite Meridianstreifen aufgeteilt, Mittelmeridiane 0°, 3°, 6°
- jeder Streifen  $\Rightarrow$  transversale Mercator Abbildung (Mittelmeridian als Berührungskreis)
- PunktKoord: X- und Y-Werte in Metern wie in kart. KoordSyst (Achsen Bild von Äquator und Mittelmeridian)
- ABER: der X-Wert gibt die Entfernung zum Äquator (Hochwert) und der Y-Wert die Entfernung zum Mittelmeridian (Rechtswert);
- Rechtswert immer +500.000m (keine Werte < 0)
- Zusätzliche Festlegungen sind für das Verständnis nicht relevant

# UTM

- Universale Transverse Mercatorprojektion
- Der Zylinder berührt nicht sondern schneidet die Kugel in zwei Kreisen
- Verzerrung auf Mittelmeridian: max. 40cm/km, an den Rändern 15cm



## Bezeichnung der UTM Zonen



**Beispiel:** Südturm des Stephansdomes in Wien

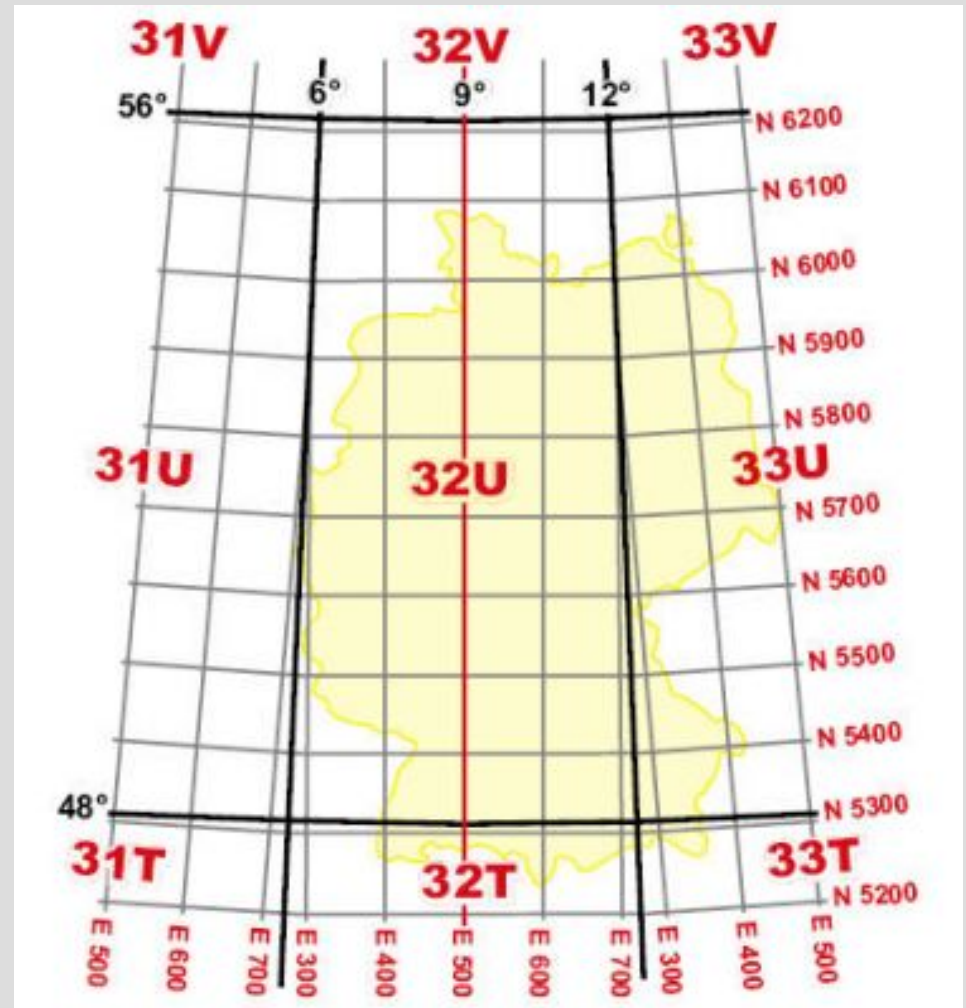
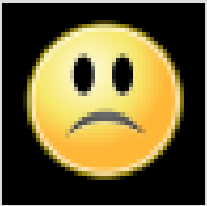
<http://www.deine-berge.de/Rechner/Koordinaten/Dezimal/48.207576,16.371458>

- geographische Länge und Breite
- Der Turm liegt in der Längenzone 33 (von 12° bis 18° Länge)
- der Breite nach in der Zone U
- Entfernung 5 340 360m (5340km 360m) vom Äquator
- Entfernung von 602 012m-500 000m = 102 012m (102km 012m) vom Mittelmeridian (nach O).

Breitengrad / Latitude / Nord	Längengrad / Longitude / Ost	
<b>Suche nach Adresse, Ort oder POI</b>		
<input type="text" value="Wien-Oesterreich Stephansdom Südturm"/>		<input type="button" value="Suchen"/>
<b>Dezimalgrad (WGS84)</b> N 48.208263 E 16.373089		
Lat: <input type="text" value="48.208263"/> ° (N)	Lon: <input type="text" value="16.373089"/> ° (E)	<input type="button" value="Rechnen"/>
Eingabe / Beispiele: Nord 47.018711°   Ost 12.34256°		
<b>Grad Dezimalminuten (WGS84)</b> N 48° 12.495780 E 16° 22.385340		
Lat: <input type="text" value="48"/> ° <input type="text" value="12.495780"/> ' (N)	Lon: <input type="text" value="16"/> ° <input type="text" value="22.385340"/> ' (E)	<input type="button" value="Rechnen"/>
Eingabe / Beispiel: Nord 47°1.122   Ost 12° 20.553'		
<b>Grad Minuten Dezimalsekunden</b> N 48° 12' 29.7468 E 16° 22' 23.1204		
Lat: <input type="text" value="48"/> ° <input type="text" value="12"/> ' <input type="text" value="29.7468"/> " (N)	Lon: <input type="text" value="16"/> ° <input type="text" value="22"/> ' <input type="text" value="23.1204"/> " (E)	<input type="button" value="Rechnen"/>
Eingabe / Beispiel: Nord 47° 1' 7.359"   Ost 12° 20' 33.216"		
<b>CH1903</b>		
y: <input type="text"/> (E)	x: <input type="text"/> (N)	<input type="button" value="Rechnen"/>
Eingabe / Beispiel: y (Ost) = 783009   x (Nord) = 223568		
<b>UTM-Koordinaten (WGS84)</b> 33U 602012 5340360		
Z: <input type="text" value="33U"/> E: <input type="text" value="602012"/>	N: <input type="text" value="5340360"/>	<input type="button" value="Rechnen"/>
Eingabe / Beispiel: Zone 32U   Ostwert 691831   Nordwert 5337164		

# Karten größerer Gebiete

Was mit den Spalten  
bzw. den Überlappungs-  
Zonen passiert war nicht  
Zu eruieren



# Einige Internetseiten

<https://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad/klassische-fachgebiete.html>

## **Vierdimensionale Geometrie**

Literatur: <https://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad/klassische-fachgebiete/nichteuklidische-und-mehrdimensionale-geometrie.html>

Diplomarbeit 4D: <http://www.ub.tuwien.ac.at/dipl/2007/AC05034559.pdf>

## **Geometrie und Kunst**

Übersicht: <https://www.schule.at/portale/raumgeometrie-gz-dg-cad/klassische-fachgebiete/geometrie-und-kunst.html>

[http://geometrie.eduhi.at/data/AK/Vortrag\\_Strobl.pptx](http://geometrie.eduhi.at/data/AK/Vortrag_Strobl.pptx)

<http://lordick.darstellende-geometrie.de/docs/Lordick-Relief-IBDG-1-2005-JG-24.pdf>

## **Kartenprojektionen**

[http://www.wilhelmkruecken.de/Summary\\_D\\_E.pdf](http://www.wilhelmkruecken.de/Summary_D_E.pdf)

[https://geo.tuwien.ac.at/fileadmin/editors/VGI/VGI\\_199515\\_Bretterbauer.pdf](https://geo.tuwien.ac.at/fileadmin/editors/VGI/VGI_199515_Bretterbauer.pdf)