

POLY – Schüler konstruieren und bauen Polyeder

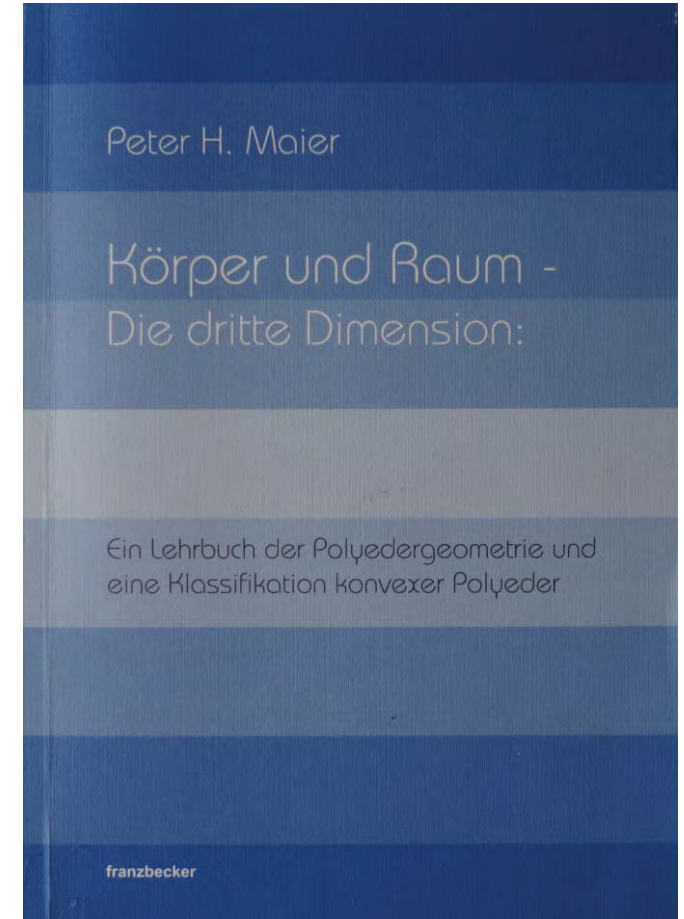
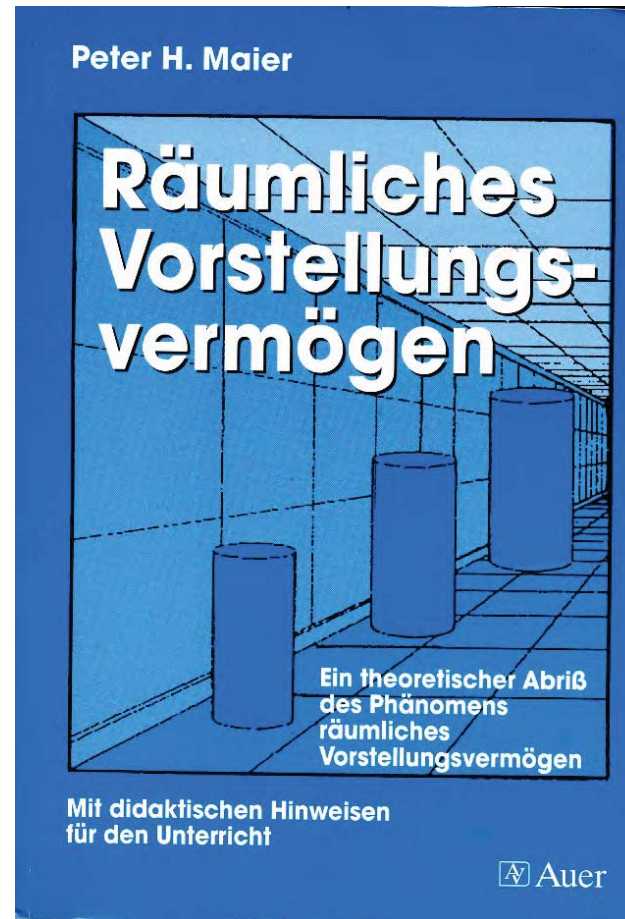
Prof. Dr. Peter Herbert Maier

Pädagogische Hochschule Karlsruhe
Institut für Mathematik und Informatik

11.11.2017



Monografien



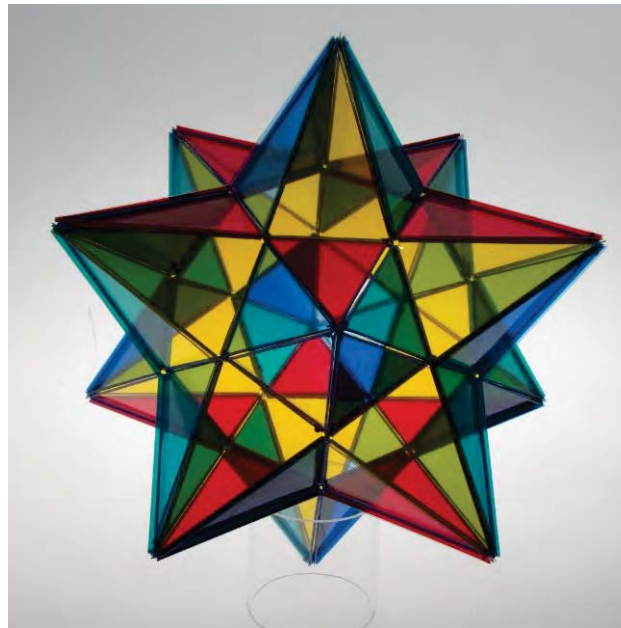
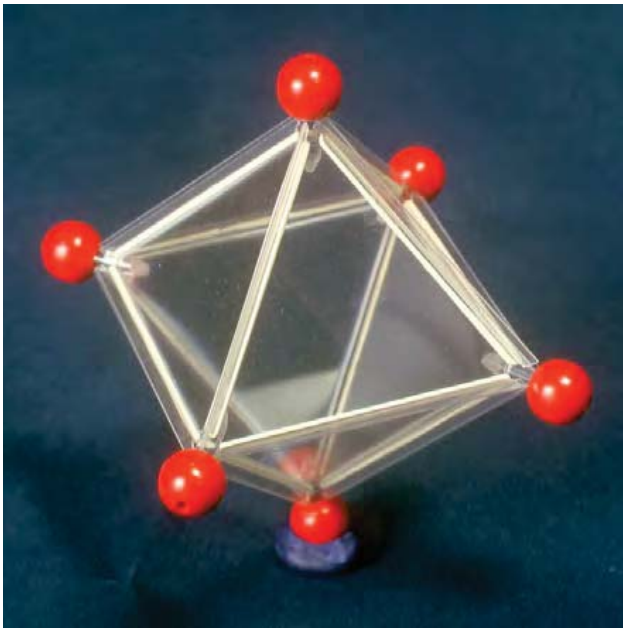
Deltoidikositetraeder
Pentagonhexakontaeder
Firma: Tom Dixon
Victoria and Albert Museum
Museum of Modern Art
Centre Georges-Pompidou



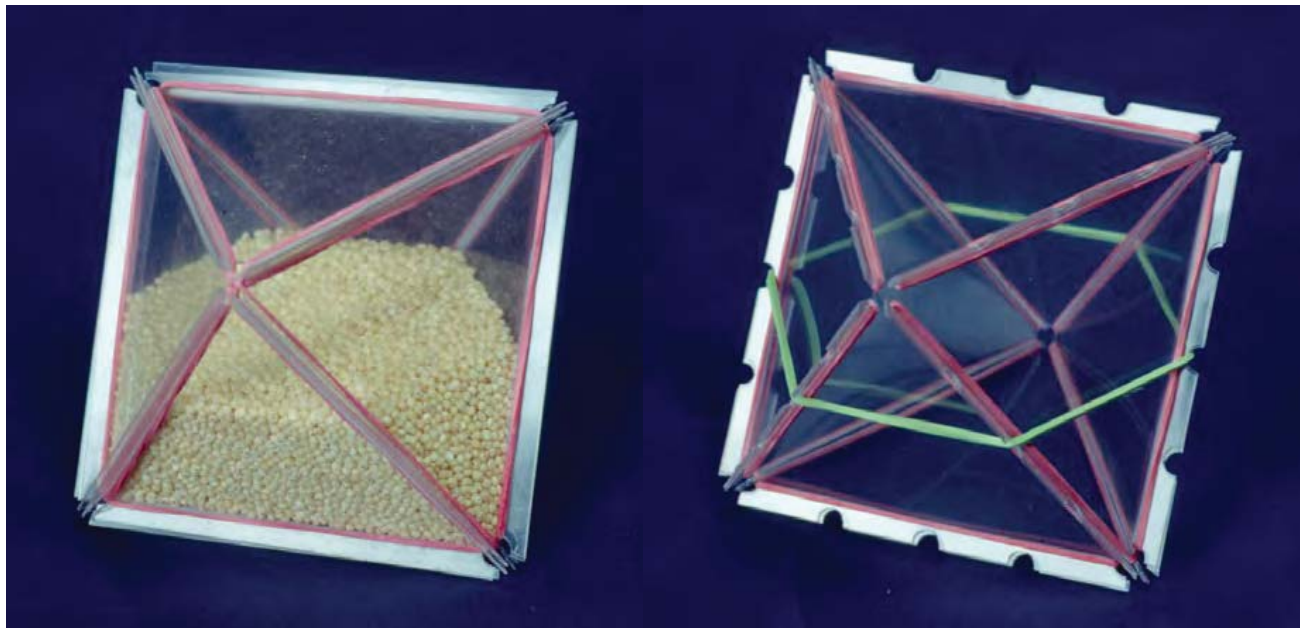
effekt

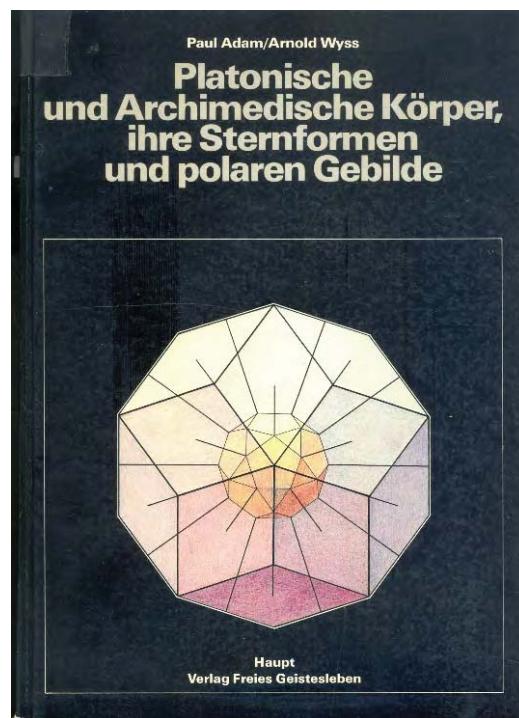
Baukastensystem

effekt - Eckenmodell, Flächenmodell und Kantenmodell in einem



Körperschnitte mit dem effekt-system



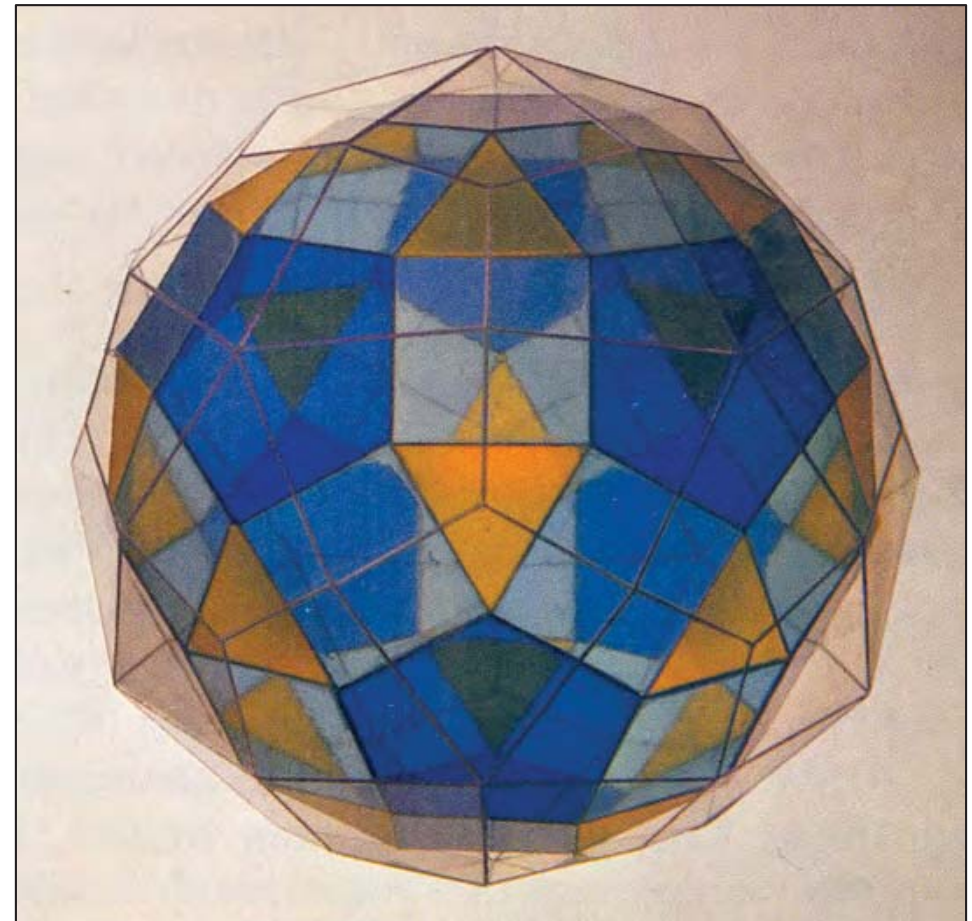
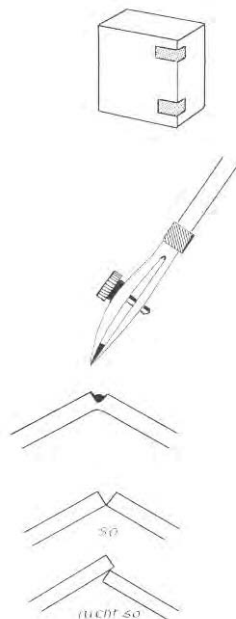


Fertigmodelle – Der Anfang

Die Flächen können nun den innern Schnitten entlang zum Körper umgebogen werden. Über die Kanten, an denen zwei freie Flächenseiten zusammenstossen, werden Abdeckbandstreifen geklebt.

Alle Kanten werden jetzt verschweisst. Das geschieht mit dem Lösungsmittel **«Tetrahydrofuran»** (Giftklasse 3). Wir giessen davon nur wenig in ein enges Gläschen, entnehmen daraus mit einer Reissfeder etwas Flüssigkeit und bringen diese in alle Fugen jener Kanten, deren Flächen noch aneinanderhängen. Dadurch werden diese Kanten verstärkt: Tetrahydrofuran löst etwas von der Folie auf und verfestigt diese beim Verdunsten nach wenigen Sekunden wieder.

Die vorläufig durch Kleber festgehaltenen Flächen werden genau gerichtet und in gleicher Weise verschweisst. Dabei ist darauf zu achten, dass keine Flüssigkeit unter die Kleber fließt, was durch Kapillarwirkung leicht geschehen kann; die Folie wird sonst fleckig. **Man darf zuerst nur zwischen den Klebern verschweissen**, dann diese entfernen und zuletzt die noch offenen Stellen der Kante verbinden.





Andrea Mangler, 2007

Fertig-Flächenmodelle – Die Relevanz

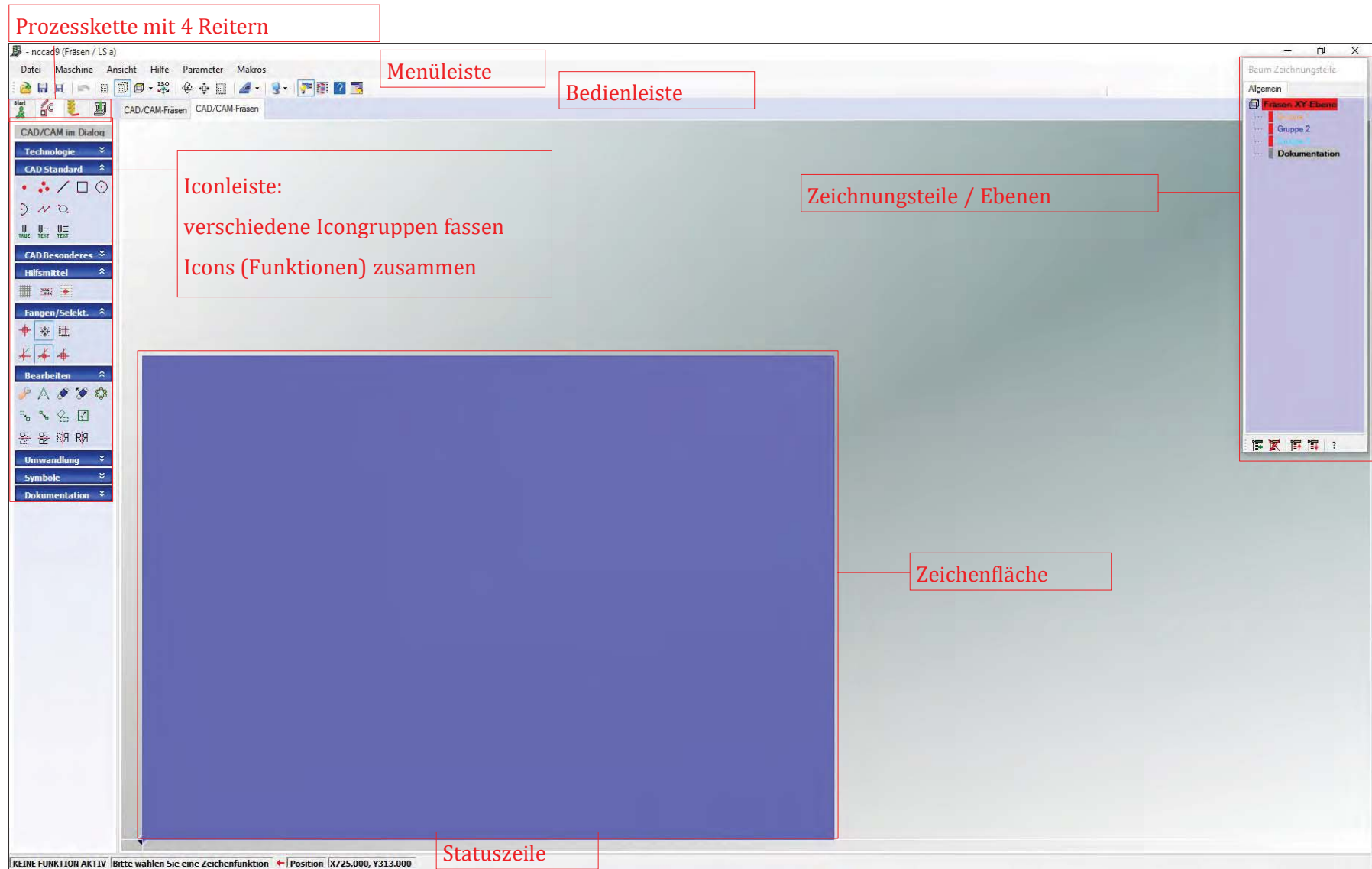
- Curriculare Verankerung in **Bildungsstandards** und landesspezifischen **Bildungsplänen**.
- **Raumvorstellung** entwickeln:
 - Planungen und Berechnungen erfordern und fördern die **Raumvorstellung**.
 - Trainingsprogramme mit handlungsorientierten **Aktivitäten an konkreten Modellen** zeigen stets starke bis sehr starke Entwicklung.
- **Technik und Material**:
 - Modelle aus Karton oder Papier sind wenig haltbar.
 - Modelle aus Hart-PVC sind **optisch ansprechend**, **robust** und langlebig.
 - Hart-PVC ist **kostengünstig** und kann einfach **gereinigt** werden.
 - Hart-PVC ermöglicht **vielfältige Bearbeitungstechniken** (Hebelschere, Cutter, Fräsmaschine).
- **Didaktik und Methodik**:
 - Modelle können **transparent** oder farbig transparent sein.
 - **Körperschnitte** können anschaulich dargestellt werden.
 - Herstellung kann im Rahmen eines entdeckenden und **handlungsorientierten Mathematikunterrichts**, eines **Geometrieprojekts** oder **fächerübergreifend** erfolgen.
 - Das Zen des Modellbaus - **Der Weg ist das Ziel**: Planerische und **zeichnerische Tätigkeiten** und **stereometrische Berechnungen** können für Schüler **motivierend und interessant** sein, da die Ergebnisse verwertet werden und in den Modellbau einfließen.

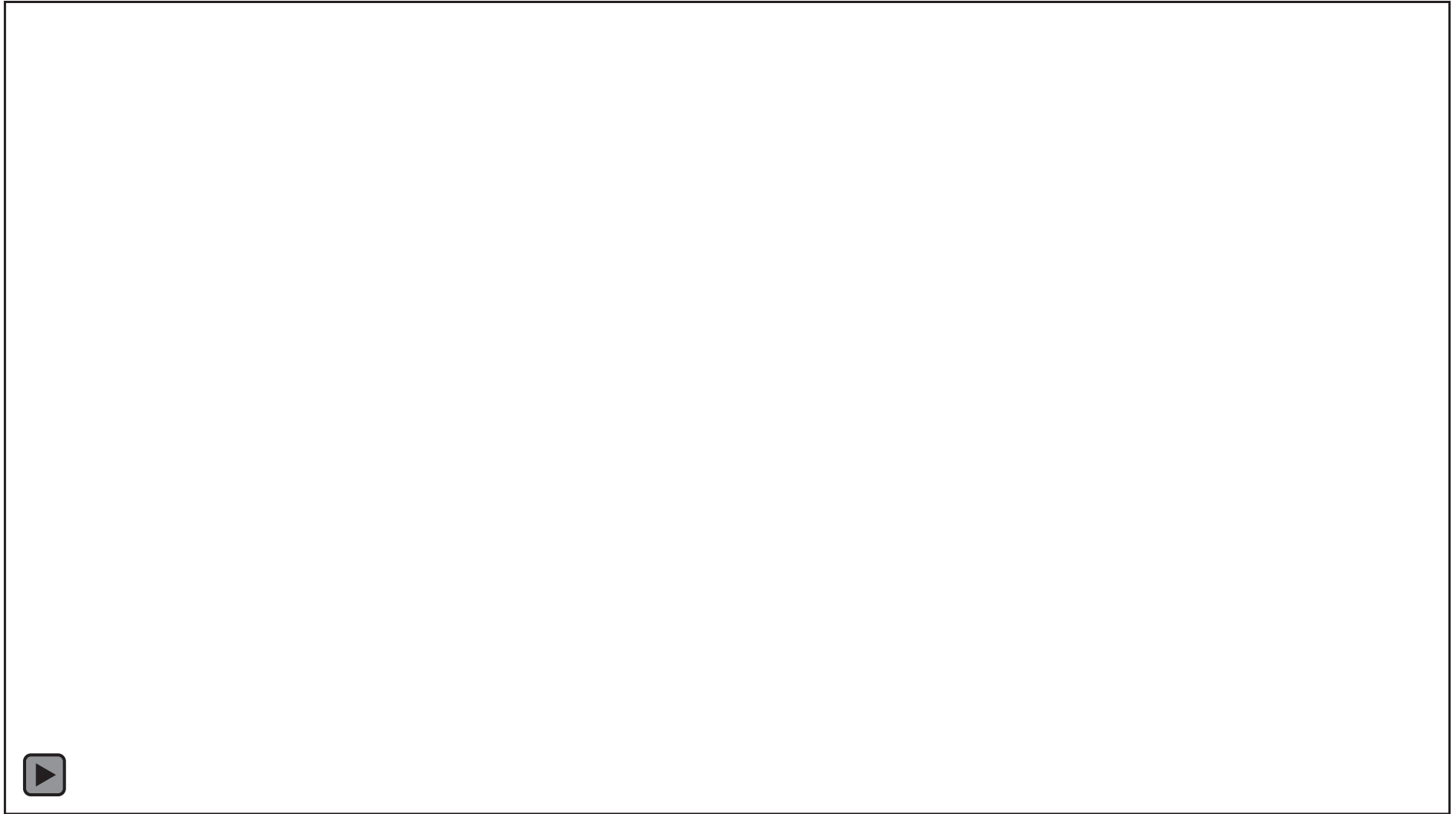
Geometrische Körper konstruieren und herstellen

Vielecke mit dem Zeichenprogramm nccad9 zeichnen,
mit einer KOSY-Fräsmaschine fräsen
und zu einem geometrischen Körper zusammenbauen

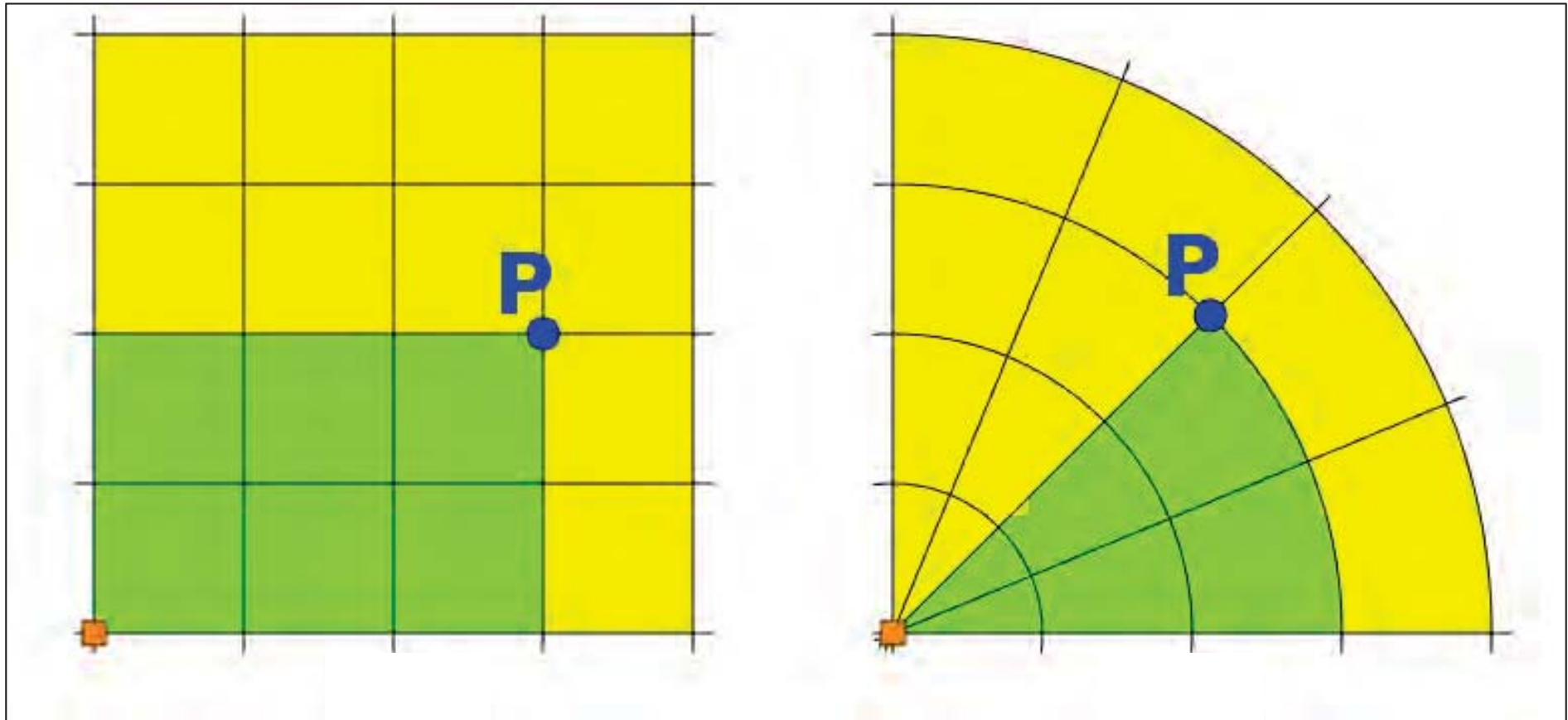


nccad 9





Kartesisches Koordinatensystem | Polarkoordinatensystem

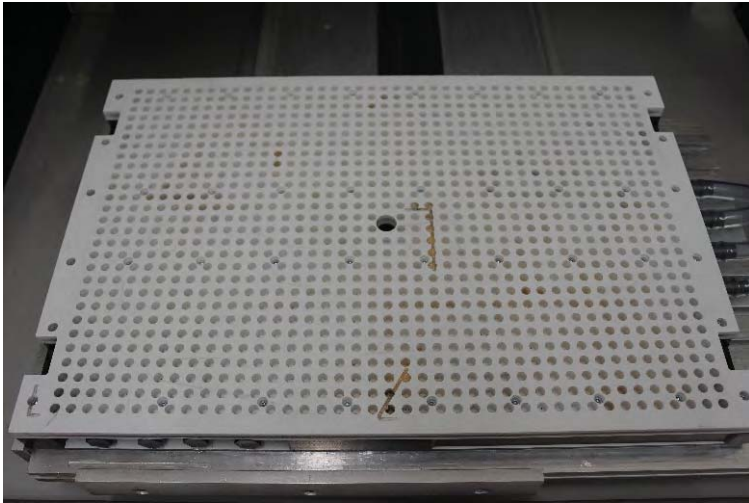




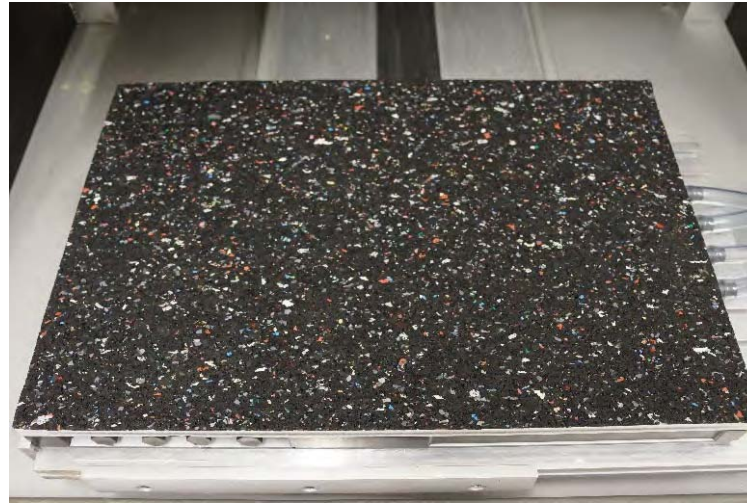
KOSY-Fräse



Arbeitsschritte beim Fräsen



Vakuumplatte



Opfermatte oder MDF-Platte



Vimill-Matte für kleinste Flächen



aufgelegte PVC-Platte

Polyeder zusammenbauen – Welcher Klebstoff?



Uhu Allplast Spezialkleber

Handhabung:

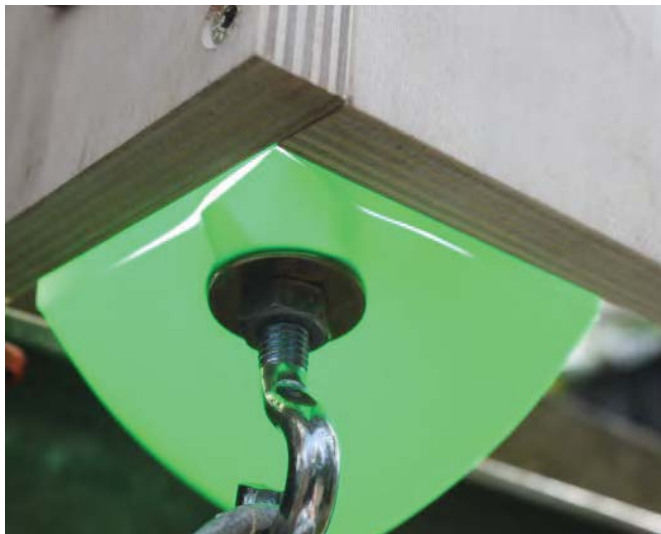
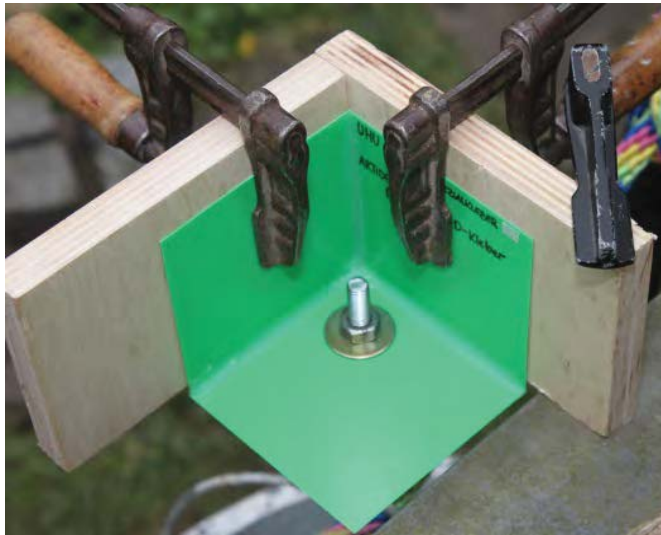
- Mit dem Design der Klebstofftube lässt sich der Spezial-Klebstoff gut auftragen
- Die flüssige Konsistenz ermöglicht ein gleichmäßiges und präzises Arbeiten ohne großen Kraftaufwand

Problematiken:

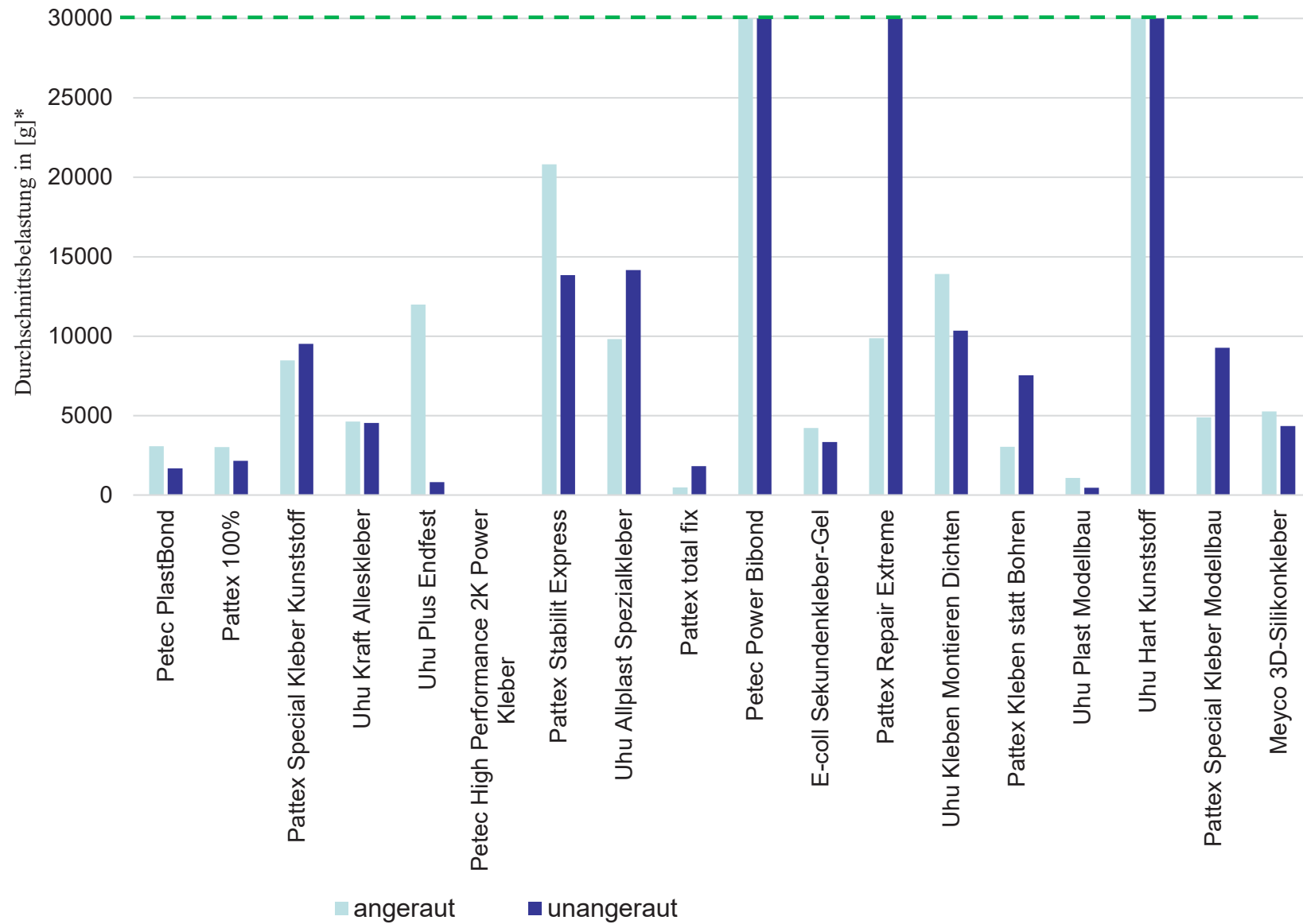
- Klebstoff zieht lange Fäden und kleckst
- Es kommt zu Deformationen



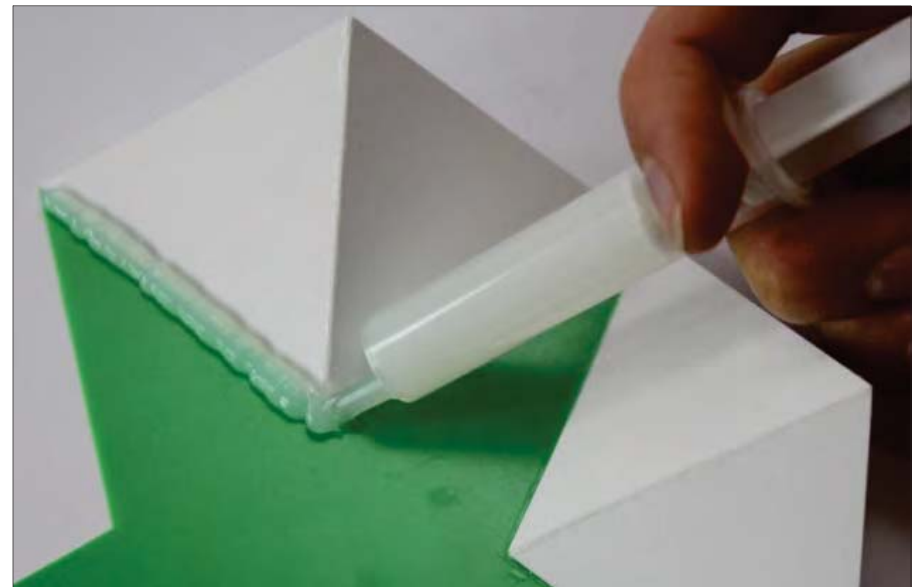
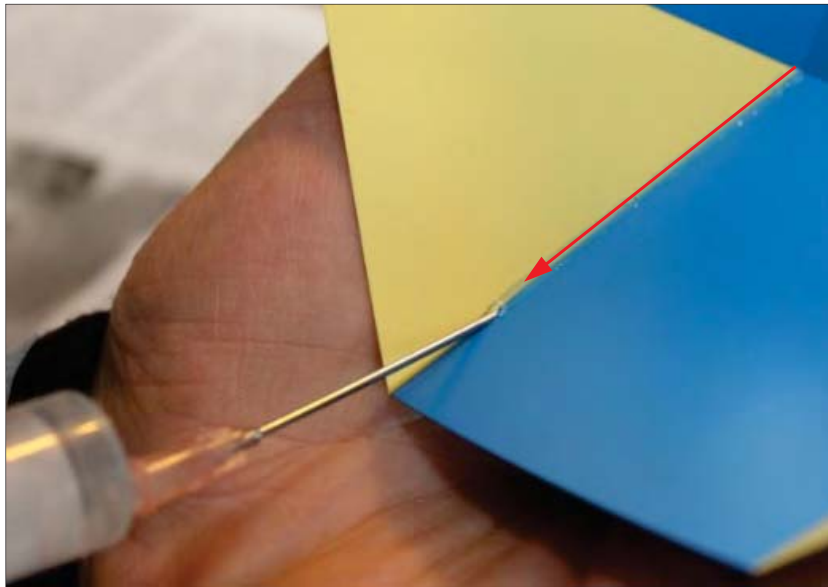
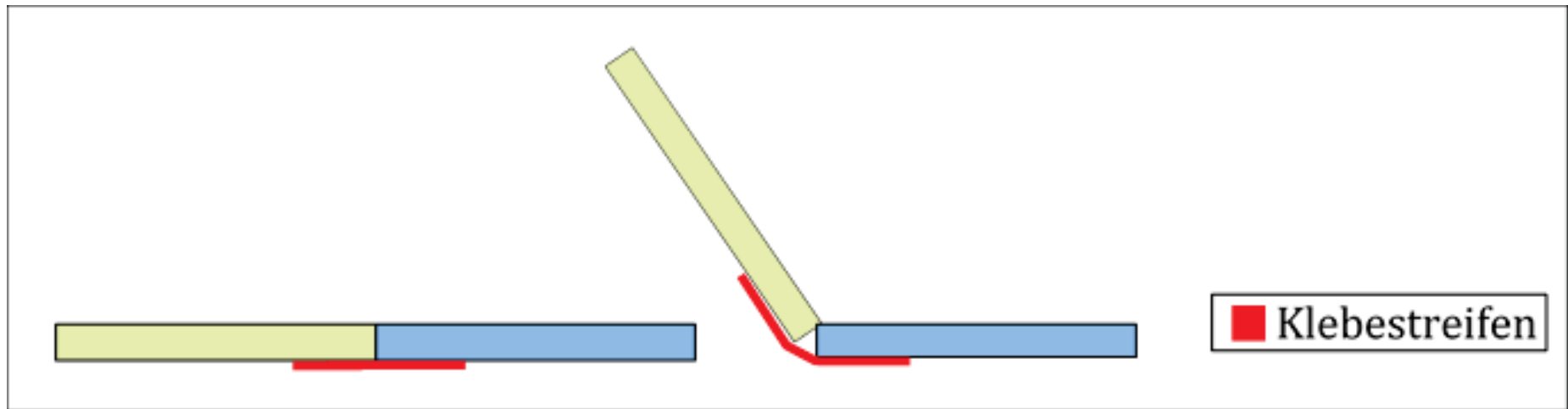
Belastungstests

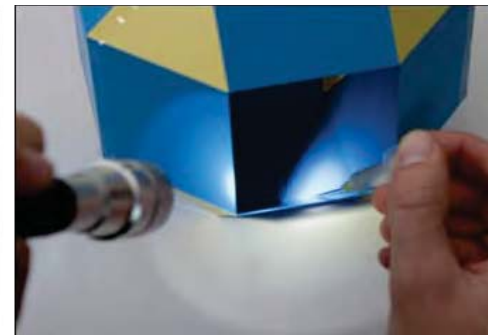
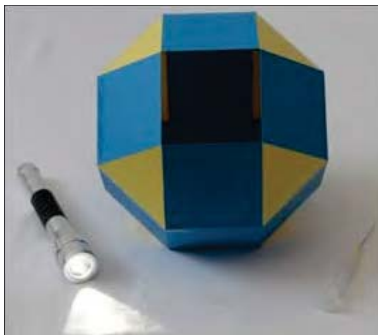
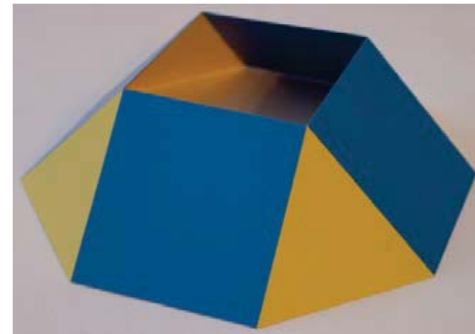
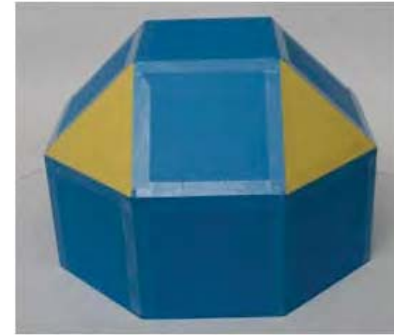
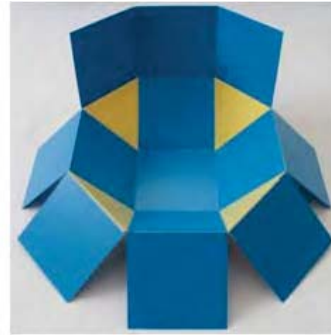
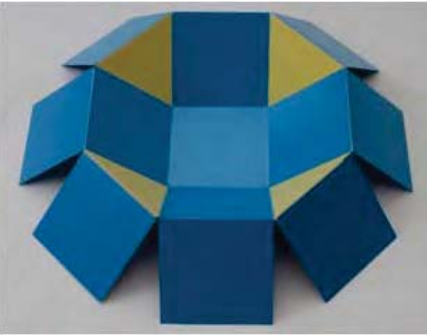
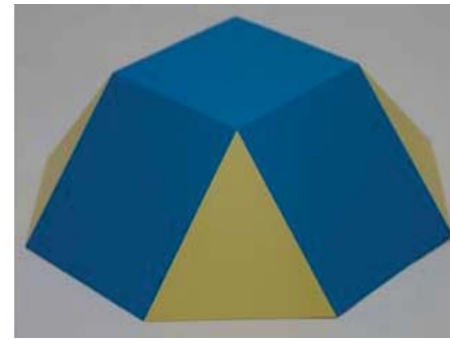
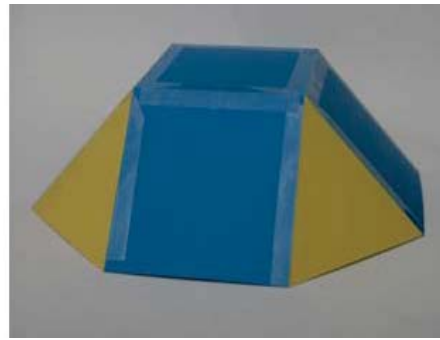
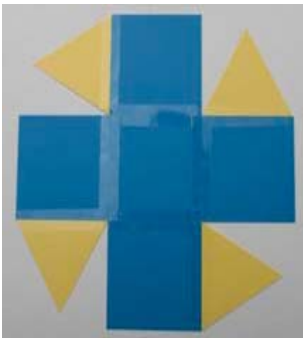


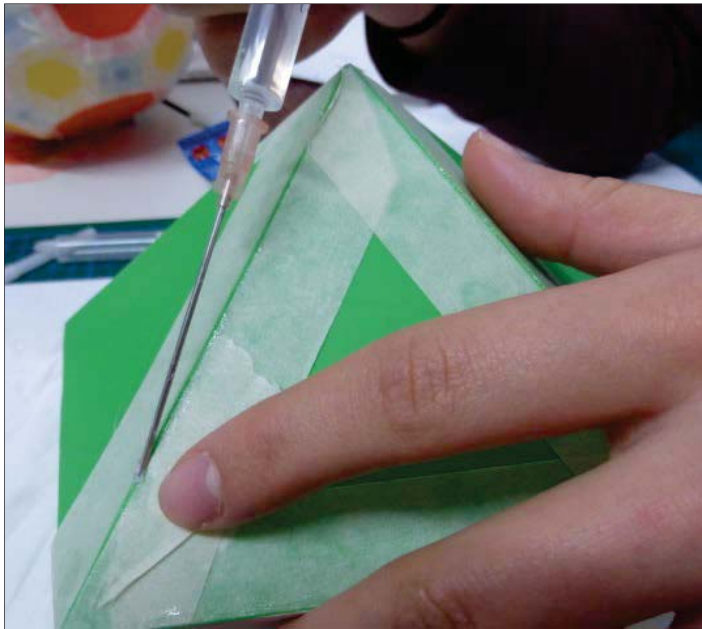
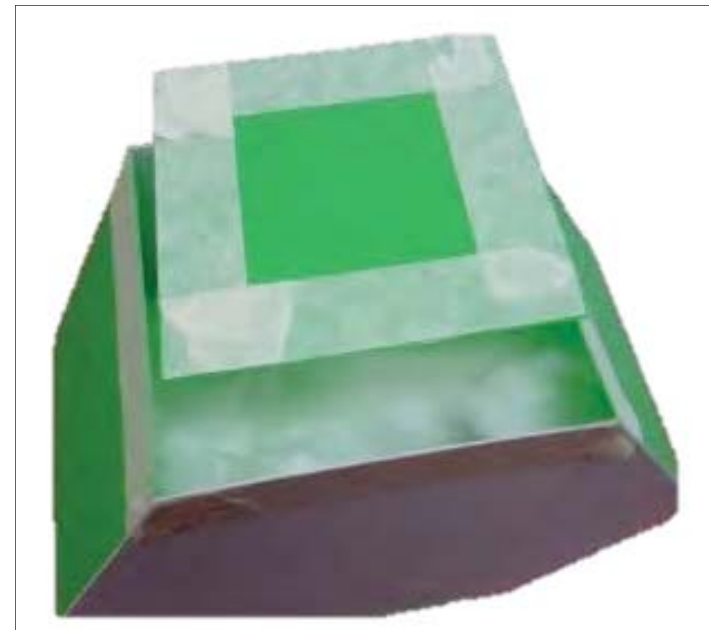
Die Spezial-Klebstoffe im direkten Vergleich



Polyeder zusammenbauen



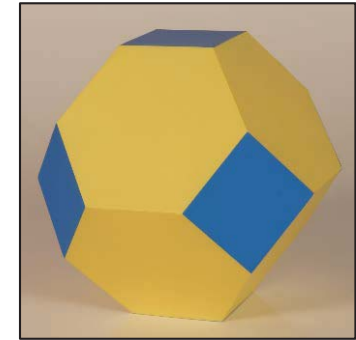




Arten stereometrischer Berechnungen

Basis:

- Körper sollen eine einheitliche Größe besitzen.
- Platonische und Archimedische Körper besitzen eine Umkugel.



Exakte Berechnung:

- Direkte Berechnung mit Hilfe stereometrischer und trigonometrischer Berechnungen.

Beispiel: Oktaederstumpf



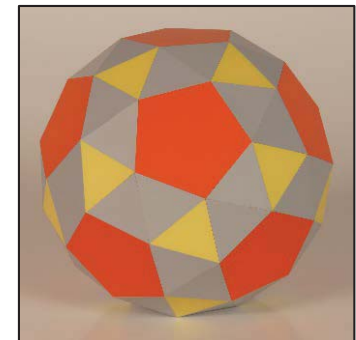
Approximative Näherungen:

- Berechnungen mit dem Kreisumfang (2dim Zugang)

Beispiel: Ikosaederstumpf

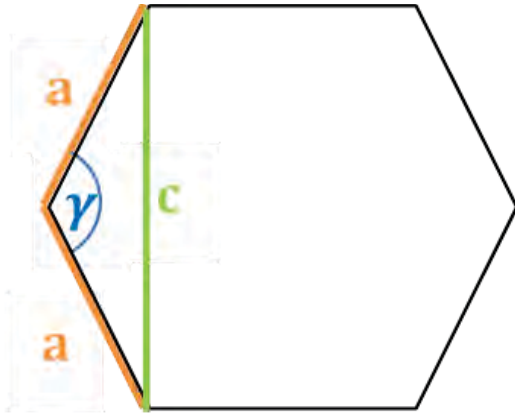
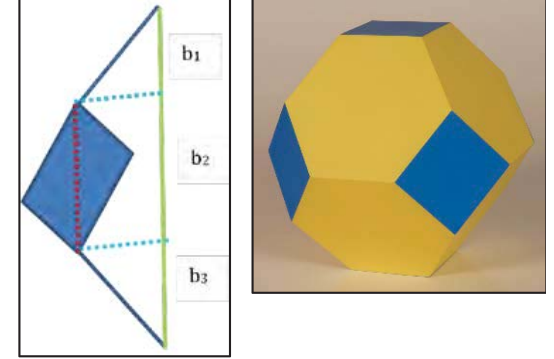
- Berechnungen mit der Kugeloberfläche (3dim Zugang)

Beispiel: abgeschrägtes Dodekaeder



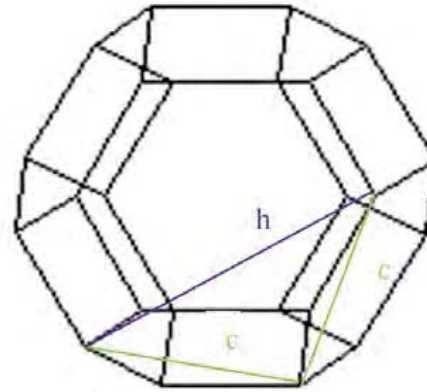
Direkte Berechnung

Beispiel: Oktaederstumpf



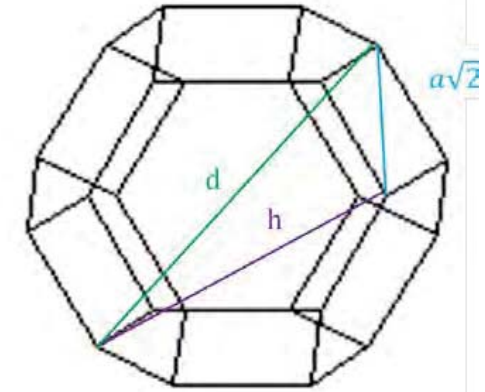
Berechnung: Höhe h_{6eck}

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \\ c^2 &= 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos 120^\circ \\ c^2 &= 2a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ c^2 &= 3a^2 \\ \underline{c} &= \underline{a\sqrt{3}} \end{aligned}$$



Berechnung: Körperhöhe h

$$\begin{aligned} h^2 &\approx 2c^2 - 2c^2 \cdot \cos 109^\circ \\ h^2 &\approx 2c^2 - 2c^2 \cdot (-0,3256) \\ h^2 &\approx 2c^2 + 0,6511c^2 \\ h^2 &\approx 2,6511c^2 \\ h &\approx a\sqrt{3} \cdot \sqrt{2,6511} \\ \underline{h} &\approx \underline{2,82a} \end{aligned}$$

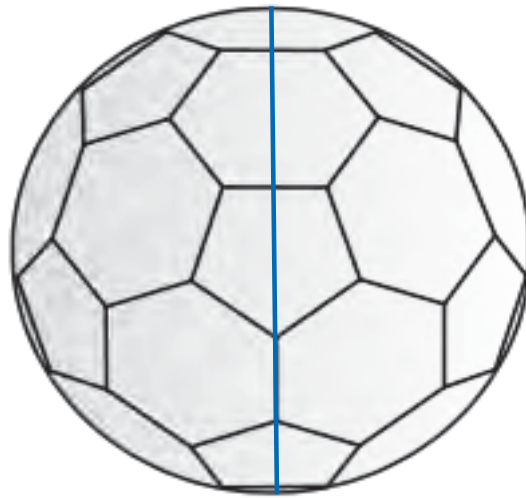
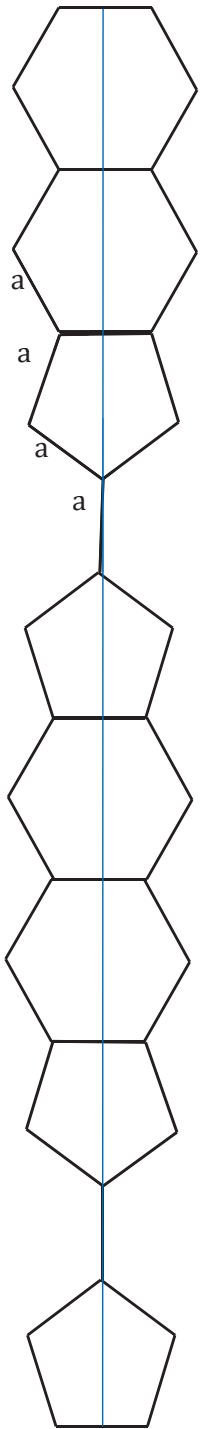


Berechnung: Kantenlänge a

$$\begin{aligned} d^2 &= h^2 + (a\sqrt{2})^2 \\ 20^2 &= (2,82a)^2 + (a\sqrt{2})^2 \\ 20^2 &= 7,95a^2 + 2a^2 \\ 20^2 &= 9,95a^2 \\ a^2 &= 40,20 \\ \underline{\underline{a}} &\approx \underline{\underline{6,34\text{cm}}} \end{aligned}$$

Näherungsrechnung über den Kreisumfang

Beispiel: Ikosaederstumpf



$$\pi \cdot d = u \approx 4 \cdot h_{\text{6eck}} + 4 \cdot h_{\text{5eck}} + 2 \cdot a$$



Berechnung der Höhe h_{6eck}

Berechnung der Höhe h_{Δ} :

$$h_{\Delta}^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$h_{\Delta}^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

$$h_{\Delta}^2 = \frac{3}{4}a^2$$

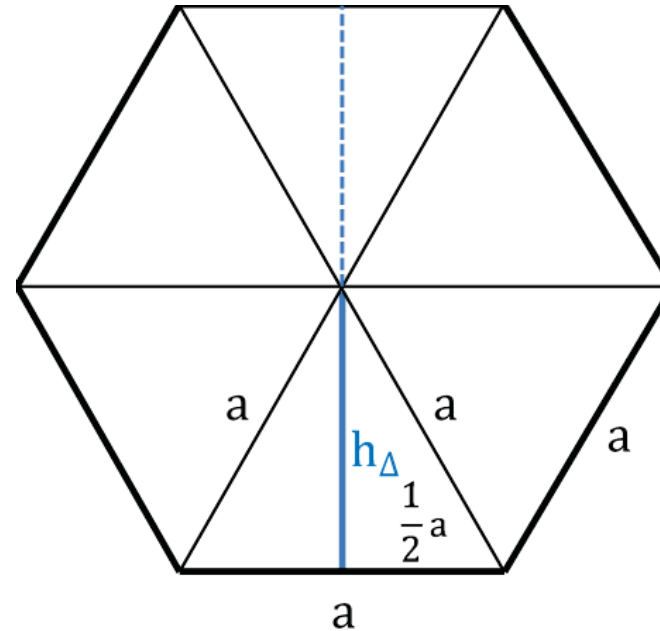
$$h_{\Delta} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$$

$$\underline{h_{\Delta} = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$h_{\text{6eck}} = 2 \cdot h_{\Delta}$$

$$h_{\text{6eck}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\underline{h_{\text{6eck}} = \sqrt{3}a}$$





Berechnung der Höhe h_{5eck}

Der Winkel α beträgt $72^\circ \left(\frac{360^\circ}{5}\right)$.

Somit ist aufgrund der Gleichschenkligkeit im

Dreieck MCD $\beta = 54^\circ \left(\frac{180^\circ - 72^\circ}{2}\right)$.

Der Innenwinkel $\gamma (= 2 \cdot \beta)$ beträgt somit 108° .

Folglich ist aufgrund der Gleichschenkligkeit im

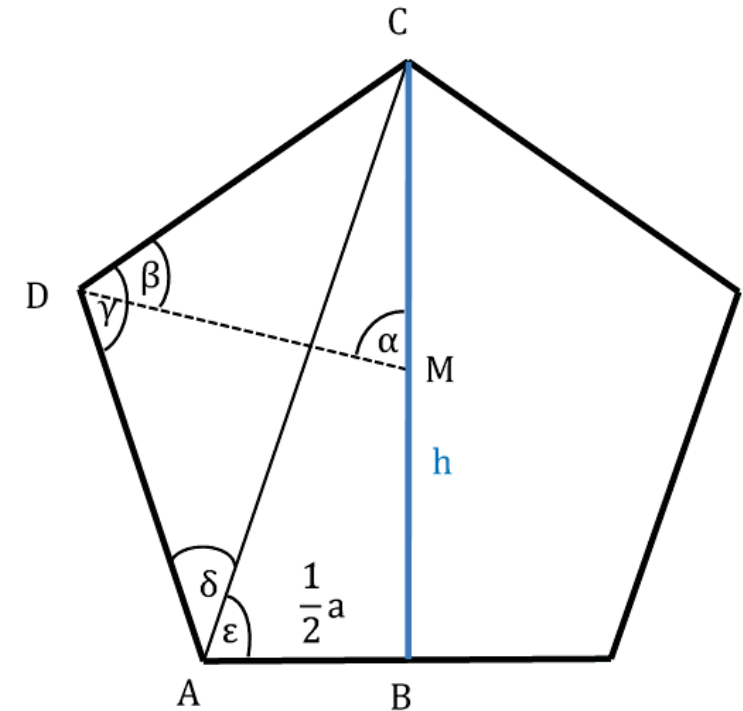
Dreieck ACD $\delta = 36^\circ \left(\frac{180^\circ - 108^\circ}{2}\right)$.

Da $\gamma = \delta + \varepsilon$ ist, ist $\varepsilon = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

Dreieck ABC:

$$\tan \varepsilon = \frac{\text{Gegenkathe}}{\text{Ankathete}} = \frac{h_{5eck}}{\frac{1}{2}a}$$

$$\underline{h_{5eck} = \tan 72^\circ \cdot \frac{1}{2}a}$$





Berechnung der Kantenlänge a:

$$\pi \cdot d = 4 \cdot h_{\text{6eck}} + 4 \cdot h_{\text{5eck}} + 2 \cdot a$$

$$20 \cdot \pi = 4 \cdot \sqrt{3}a + 4 \cdot \tan 72^\circ \cdot \frac{1}{2}a + 2 \cdot a$$

$$20 \cdot \pi = a \cdot (4 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \tan 72^\circ + 2)$$

$$a = \frac{20 \cdot \pi}{4 \cdot \sqrt{3} + 2 \cdot \tan 72^\circ + 2}$$

$$\underline{\underline{a \approx 4,17 \text{ cm}}}$$

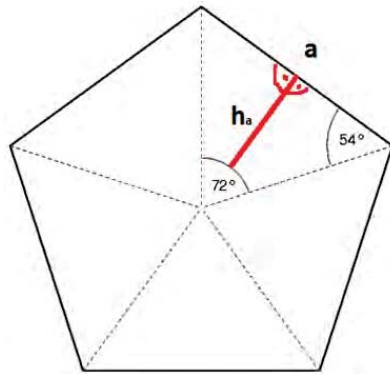
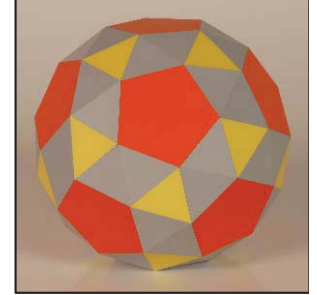
Zum Vergleich:

$$\text{Aus } r = \frac{a}{4} \cdot \sqrt{58 + 18\sqrt{5}} \text{ folgt } a \approx 4,04 \text{ cm}$$

$$\text{Differenz: } \Delta \approx 0,13 \text{ cm bzw. } \Delta \approx 3,2\%$$

Näherungsrechnung über die Kugeloberfläche

Beispiel: abgeschrägtes Dodekaeder



$$\tan(54^\circ) = \frac{h_a}{0,5a}$$

$$\tan(54^\circ) \cdot 0,5a = h_a$$

$$0,688a \approx h_a$$

$$A_{3eck} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$$

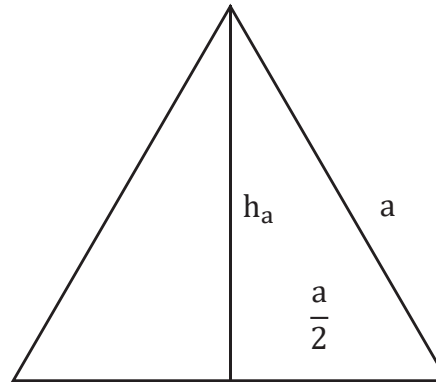
$$A_{3eck} = 0,344a^2$$

$$A_{5eck} = 5 \cdot 0,344a^2$$

$$A_{5eck} = 1,72a^2$$

$$A_{5ecke} = 12 \cdot 1,72a^2$$

$$A_{5ecke} = 20,64a^2$$



$$\tan(60^\circ) = \frac{h_a}{0,5a}$$

$$\tan(60^\circ) \cdot 0,5a = h_a$$

$$0,866a \approx h_a$$

$$A_{3eck} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$$

$$A_{3eck} = 0,433a^2$$

$$A_{3ecke} = 80 \cdot 0,433a^2$$

$$A_{3ecke} = 34,64a^2$$

$$A_{ges} = 20,64a^2 + 34,64a^2$$

$$A_{ges} = 55,28a^2$$

$$O_{Kug} = 4\pi r^2$$

$$O_{Kug} = 4\pi \cdot 10^2$$

$$O_{Kug} \approx 1256,637 \text{ cm}^2$$

$$O_{Kug} = A_{ges}$$

$$1256,637 = 55,28a^2$$

$$a = \sqrt{\frac{1256,637}{55,28}}$$

$$a \approx 4,768 \text{ cm}$$

Zum Vergleich:

Die komplexe Formel liefert: $a \approx 4,637 \text{ cm}$

Differenz: $\Delta \approx 0,13 \text{ cm}$ bzw. $\Delta \approx 2.8\%$