In der Raumgeometrie ist vieles viel komplexer und nur weniges einfacher als in der ebenen Geometrie.

Über „regelmäßige“ räumliche Polygone*

Prof. Dr. Heinz Schumann
PH Weingarten
Fak. II, Mathematik
schumann@ph-weingarten.de

40. Fortbildungstagung für Geometrie

Strobl 8.11 – 10.11. 2019

Felix Austria - felix patria geometriae!

*Ein titelgleicher Aufsatz erscheint in IBDG, 2019, Heft 2

„Regelmäßige“ räumliche Polygone

Ein räumliches Polygon ist „regelmäßig“ genau dann, wenn seine Seiten und seine Winkel jeweils einander gleich sind.

Математическое Просвещение 1961, 6, 345-347

9. Правильным n-угольником (на плоскости или в пространстве) называется замкнутая ломаная, состоящая из n равных звеньев и такая, что углы между соседними звеньями все равны между собой. Известно, что на плоскости правильные n-угольники существуют при любом n. При каких n существуют неплоские правильные многоугольники?

В. И. Арнольд (Москва)

Mathematische Bildung, 1961, 6, 345-347

9. Ein reguläres n-Eck (in der Ebene oder im Raum) ist ein geschlossener Streckenzug aus n gleichen Strecken und gleichen Winkeln zwischen jeweils benachbarten Strecken. Es ist bekannt, dass in der Ebene regelmäßige n-Ecke für alle n existieren. Für welche n existieren nicht ebene regelmäßige Vielecke?

V. I. Arnold (Moskau)

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Allgemeine Probleme

Klassifikationsproblem
„Regelmäßige“ 3D-Polygone sind für eine bestimmte Eckenanzahl n, n > 3, nach ihren Symmetrie-Eigenschaften (Deckabbildungs-gruppen) zu typisieren.

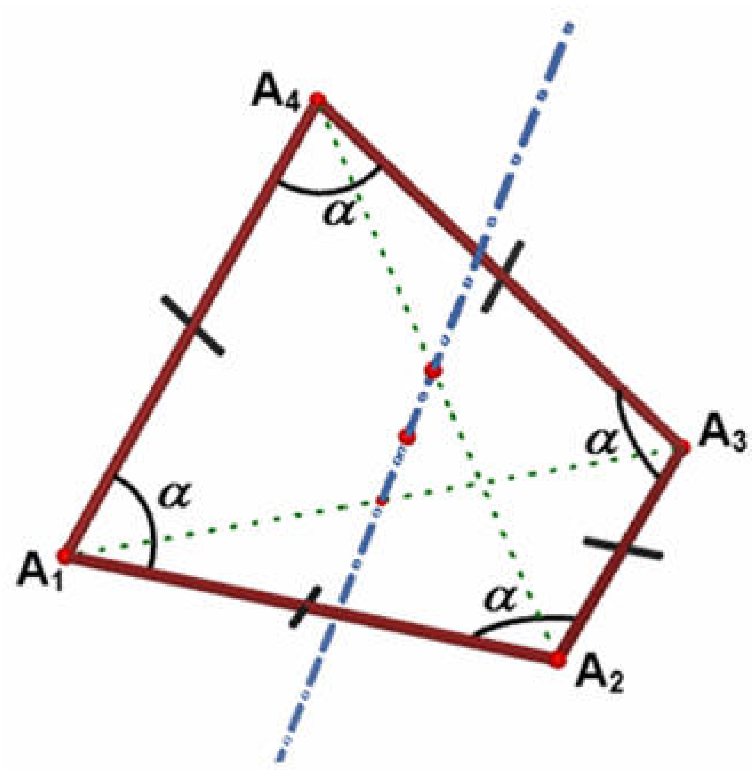
Existenz- und Vollständigkeitsproblem
Welche und wieviele verschiedene Typen für ein bestimmte Eckenanzahl n existieren?

Paramter für die Form eines Typs ist i. A. der Polygonwinkel.

Problem der Variationsvielfalt
In welchem Bereich variiert der Polygonwinkel, d. h., welche Vielfalt an Repräsentanten hat der betreffende Typ?

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Regelmäßige räumliche 4-Ecke



Parameter α mit $0° < \alpha < 90°$

Symmetrie-Eigenschaften

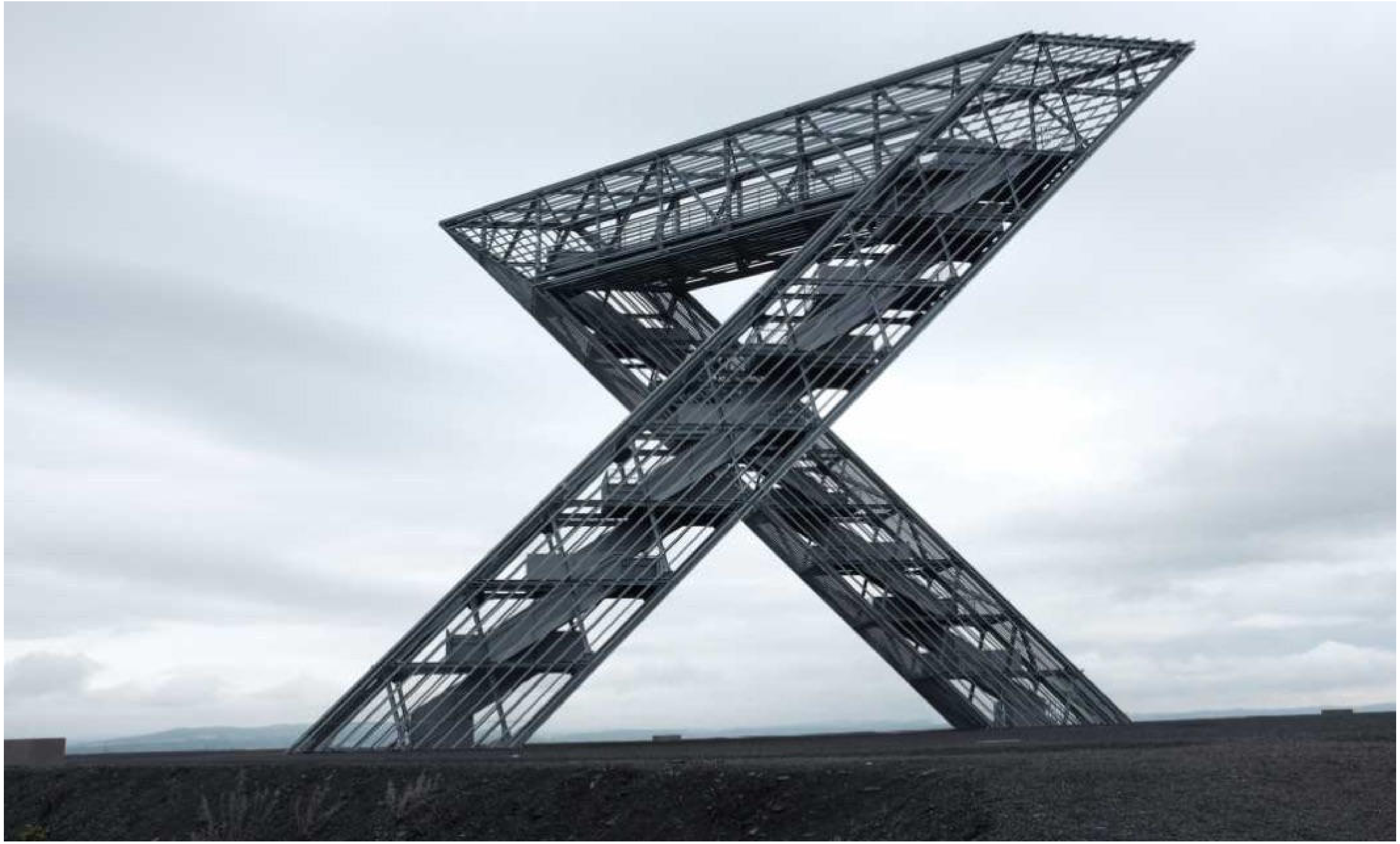
8 Deckabbildungen:

- 3 Geradenspiegelungen
- 2 Ebenenspiegelungen
- eine Drehspiegelung
- Punktspiegelung
- identische Abbildung

Jedes regelmäßige 3D-Viereck ist voll-symmetrisch.

Es gibt nur einen Typ.

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“



Saarland-Polygon

Ein regelmäßiges räumliches Fünfeck ist immer planar.

(vermutlich zuerst bewiesen von Grabert 1961, van der Waerden 1970).

Nachtrag zu «Ein Satz über räumliche Fünfecke»

(Elemente der Math., Band 25, S. 73)

Der Satz, der in der oben zitierten Arbeit bewiesen wurde, lautet: *Ein räumliches Fünfeck ABCDE, in dem alle Seiten gleich a und alle Winkel gleich* α *sind, ist eben.*

Als ich die Separata meiner Arbeit verschickt hatte, erhielt ich nach wenigen Tagen Briefe von G. Bol (Freiburg/Br.) und H. S. M. Coxeter (Toronto), die beide einen viel einfacheren Beweis des Satzes enthielten. Der Beweis geht so:

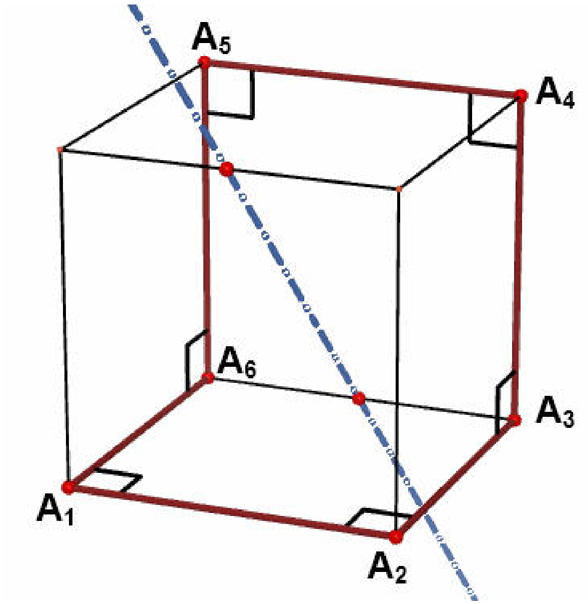
Wenn die Seitenlänge a und der Winkel α gegeben sind, so sind alle Abstände zwischen den 5 Punkten gegeben, also ist die Figur bis auf eine Bewegung oder Umlegung bestimmt. Also gibt es eine Bewegung oder Umlegung S, die die Ecken $ABCDE$ zyklisch permutiert. Die fünfte Potenz S^5 ist die Identität, also ist S keine Umlegung, sondern eine Bewegung. Der Schwerpunkt der 5 Punkte bleibt bei S fest, also ist S eine Drehung. Also liegen $ABCDE$ in einer Ebene senkrecht zur Drehungsachse.

B.L. van der Waerden, Zürich

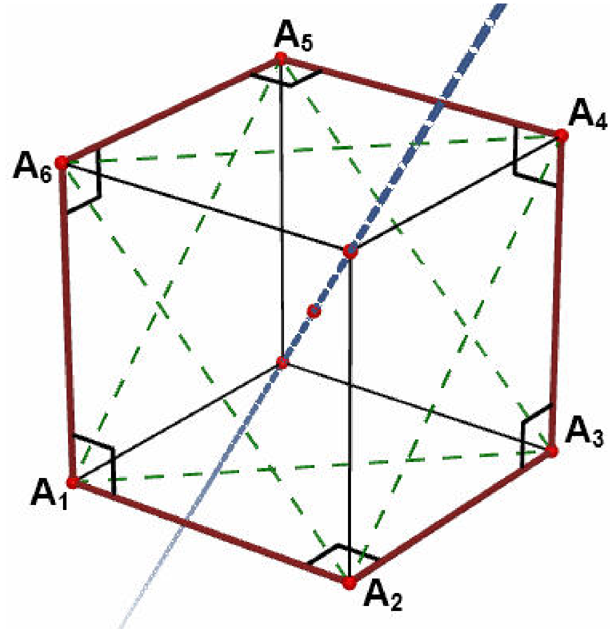
Aus: ‚Elemente der Mathematik' 1972, Band 27, S. 63

„Regelmäßige“ räumliche 6-Ecke (Beispiele)

Kanten-Hexagone des Würfels



Rechtwinkliges 3D-Hexagon

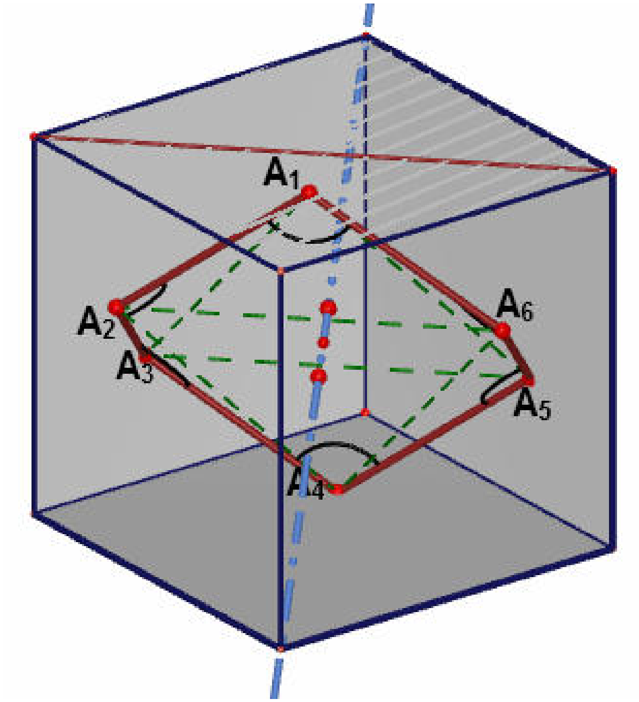


Rechtwinkliges 3D-Hexagon als Mantelpolygon (Petrie-Polygon) eines dreieckigen Antiprismas

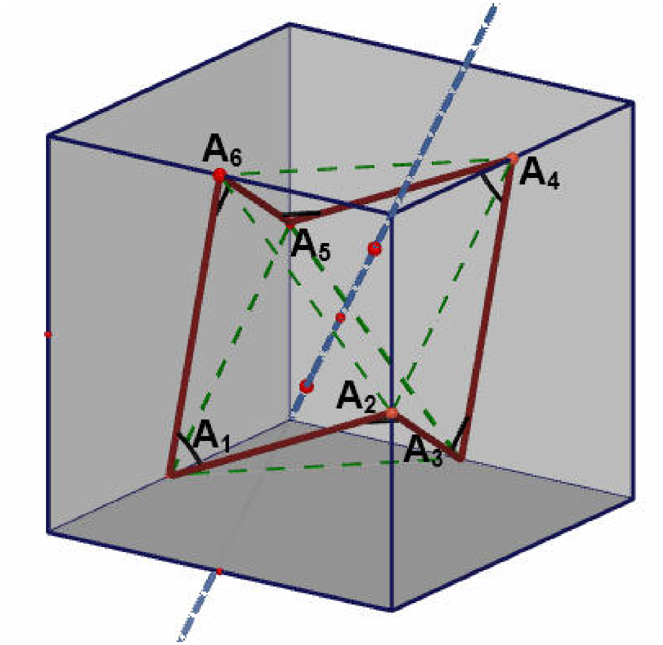
© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

„Regelmäßige“ räumliche 6-Ecke (Beispiele)

3D-Hexagone im Würfel

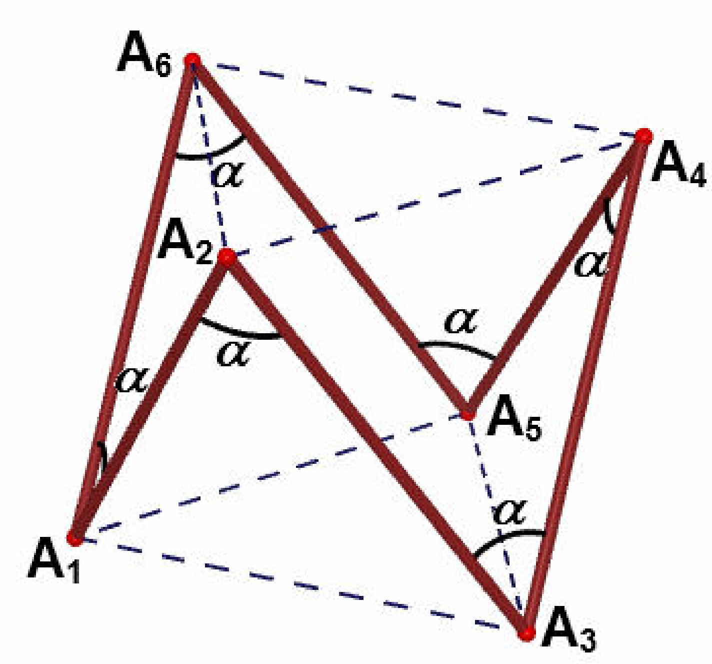


Billard-Hexagon (Petrie-Polygon eines dreieckigen Antiprismas)



„Schatz-Hexagon“ (Petrie-Polygon eines dreieckigen Antiprismas)

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

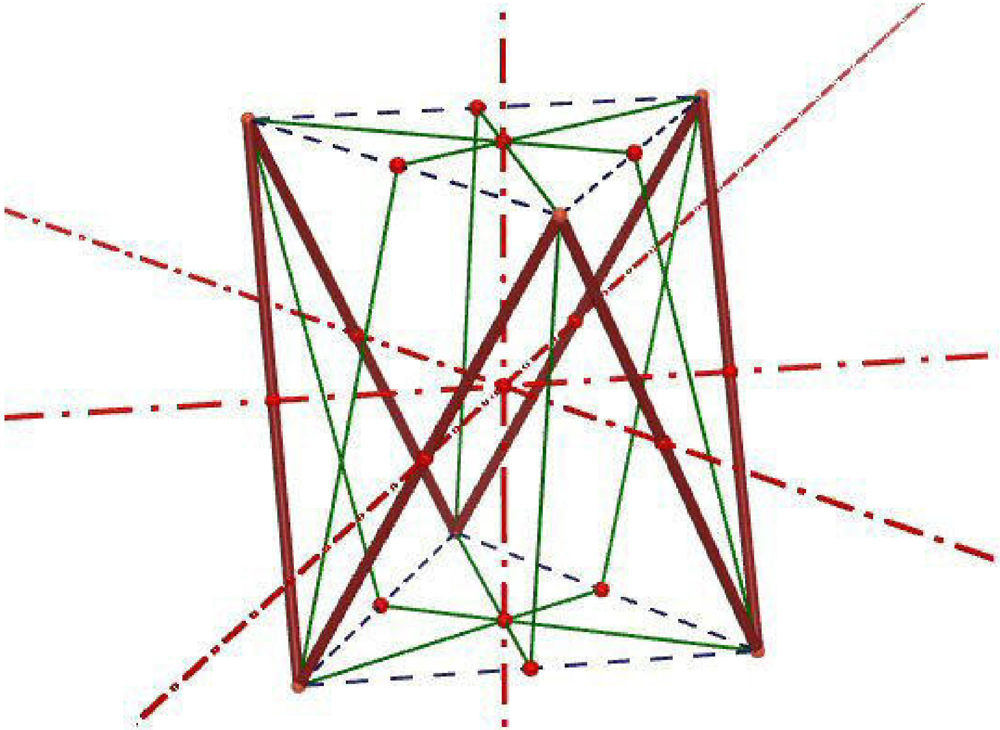


Regelmäßiges antiprismatisches Hexagon

Parameter α mit $0° < \alpha < 120°$

Typ 1 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

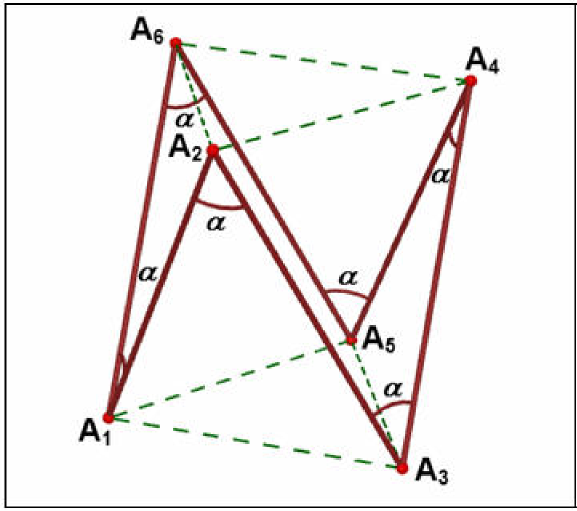


Dreieckiges Antiprisma mit 12 Symmetrien
Identische Abbildung,
2 Drehungen um eine 3-zählige Drehachse,
3 Spiegelungen an Ebenen durch diese Drehachse,
3 Drehspiegelungen mit eben dieser Drehachse
(davon ist eine Punktspiegelung),
Spiegelungen an 3 Geraden
(durch die Mitten gegenüberliegender Seiten).

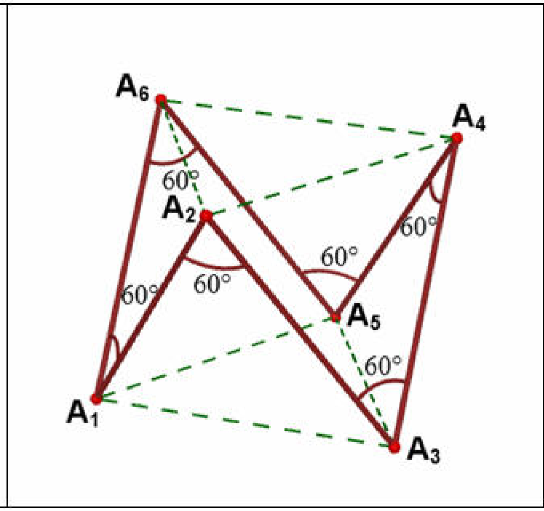
3D-Polygon ist ist komplett-symmetrisch.

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige' räumliche Polygone"

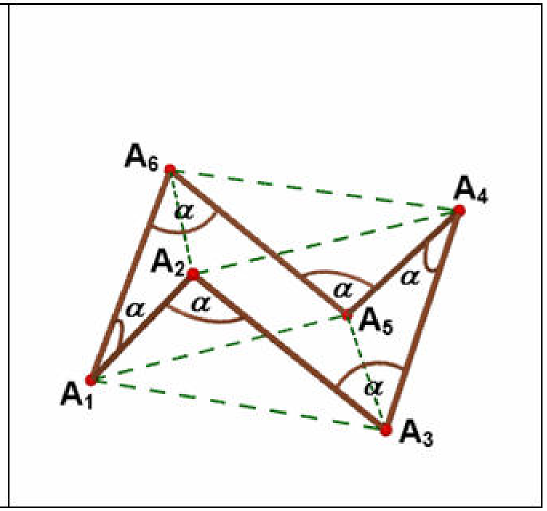
Typ 1 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke



Typ1 „Regelmäßiges“ antiprismatische Hexagon mit $0° < \alpha < 60°$

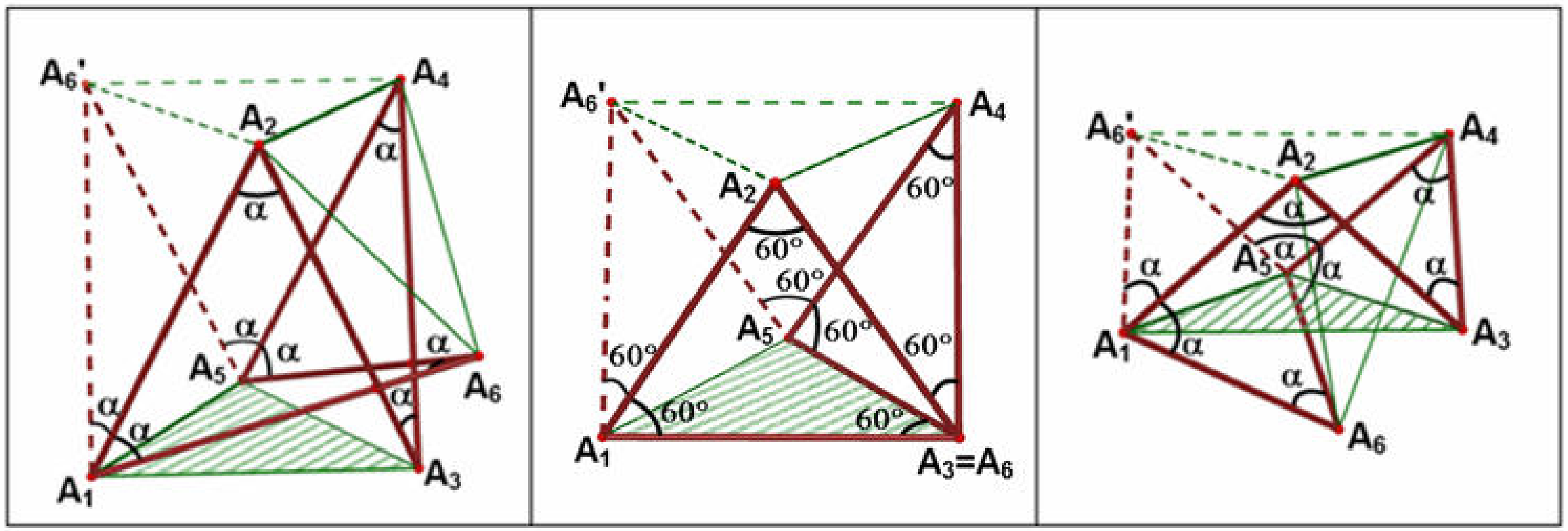


Typ1 „Regelmäßiges“ antiprismatische Hexagon mit $\alpha = 60°$



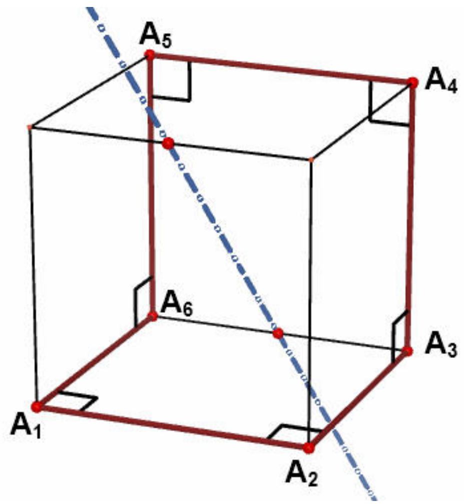
Typ1 „Regelmäßiges“ antiprismatische Hexagon mit $60° < \alpha < 120°$

Typen 2.1-2.3 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke



Typ 2.1 $0° < \alpha < 60°$ Typ 2.2 $\alpha = 60°$ Typ 2.3 $60° < \alpha < 120°$

Symmetrie-Eigenschaften



4 Deckabbildungen:

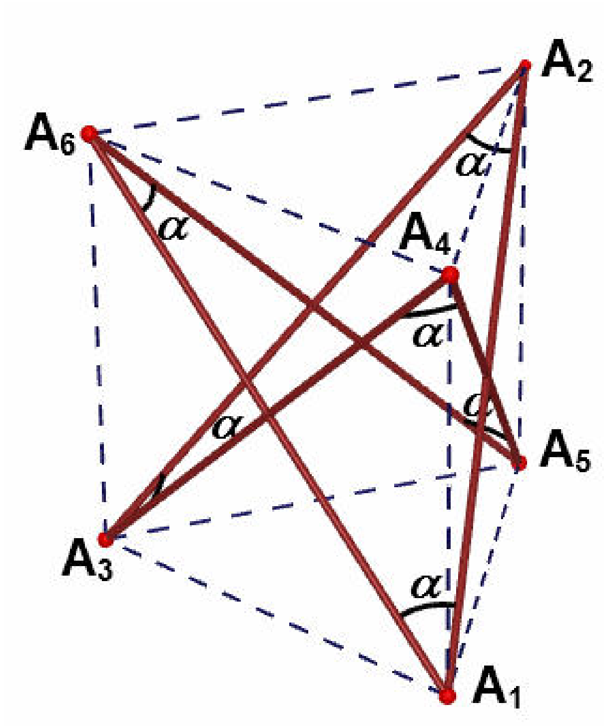
- eine Geradenspiegelung

- 2 Ebenenspiegelungen

-identische Abbildung

(eine konkrete Kleinsche Vierergruppe)

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

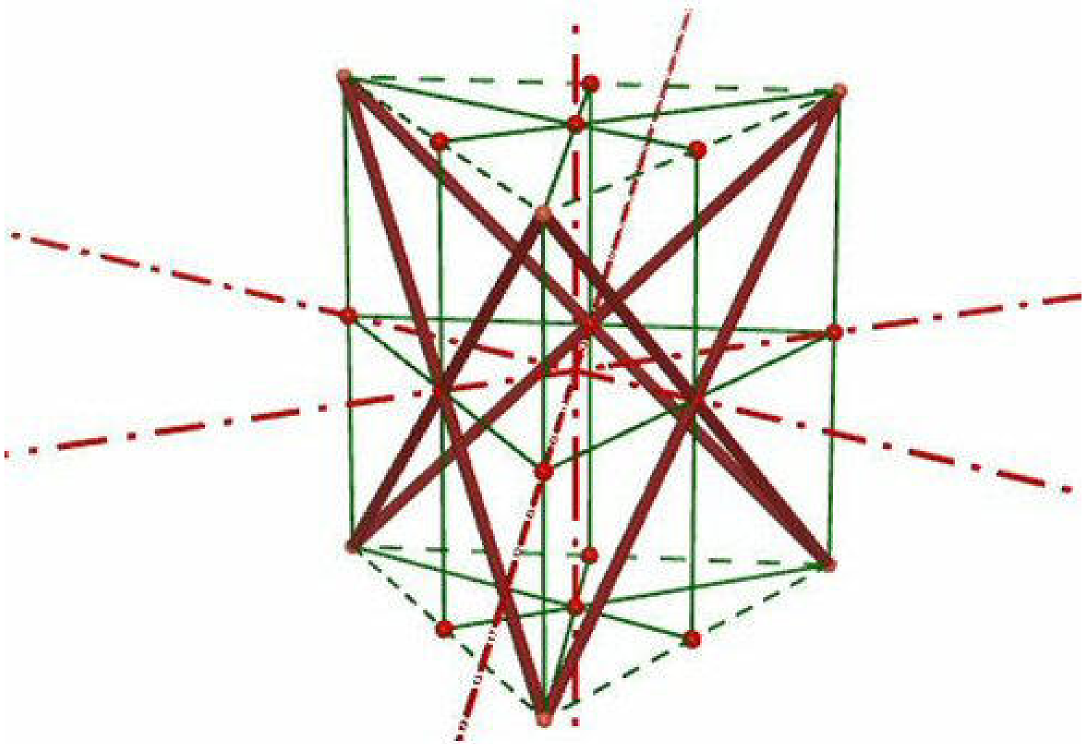


Regelmäßiges prismatisches Hexagon

Parameter α mit $0° < \alpha < 60°$

Typ 3 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“



Dreieckiges Prisma mit 12 Symmetrien

Identische Abbildung,

2 Drehungen um eine 3-zählige Drehachse,

3 Spiegelungen an Achsen durch Kantenmitten und Gegenflächenmitten

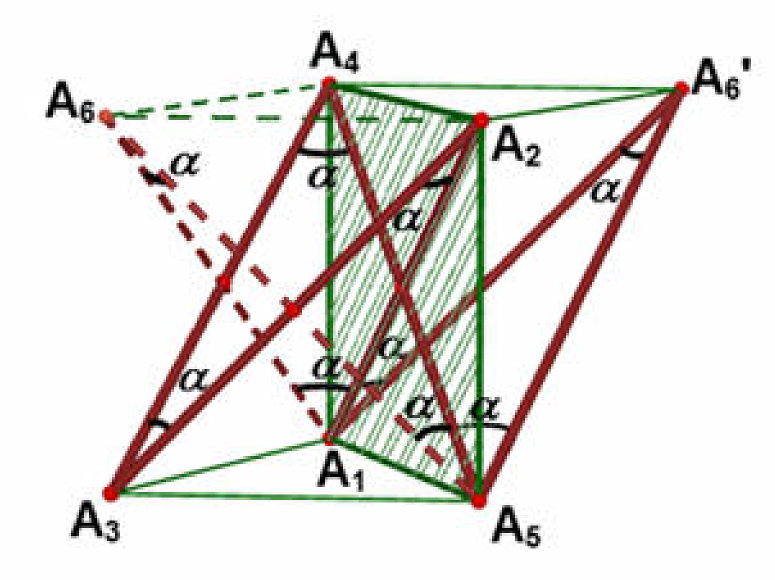
3 Spiegelungen an Ebenen durch diese Drehachse,

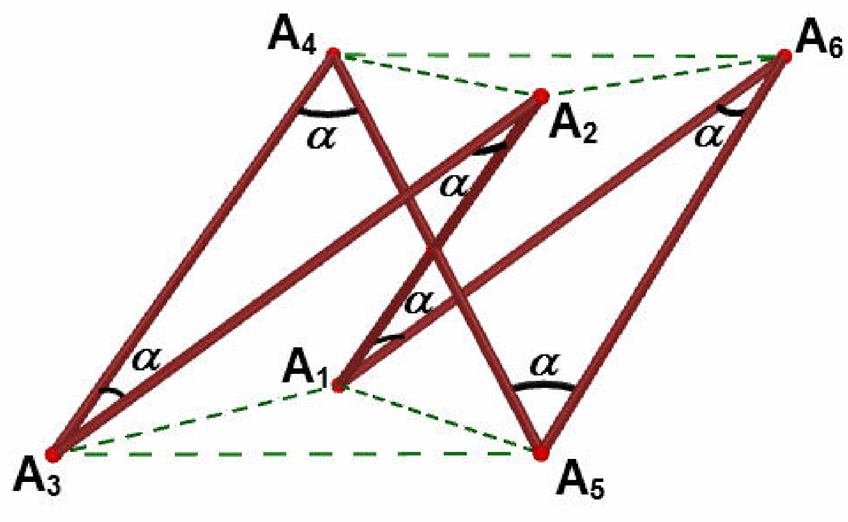
3 Drehspiegelungen

3D-Polygon ist ist komplett-symmetrisch.

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige' räumliche Polygone"

Typ 4 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke





Parameter α mit $0° < \alpha < 60°$

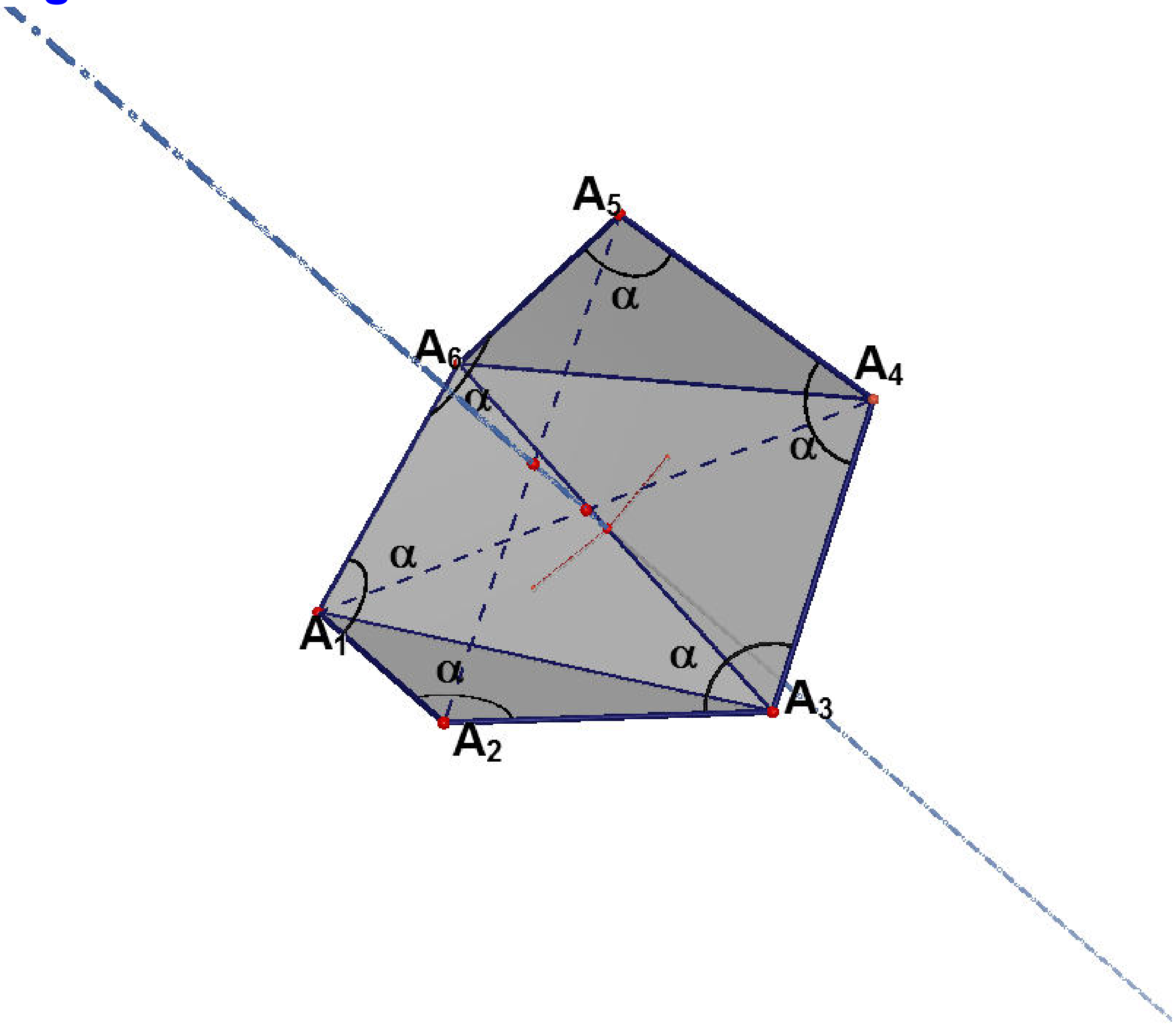
Symmetrie-Eigenschaften

4 Deckabbildungen:

- **Punktspiegelung**
- **eine Geradenspiegelung**
- **eine Ebenenspiegelung**
- **identische Abbildung**

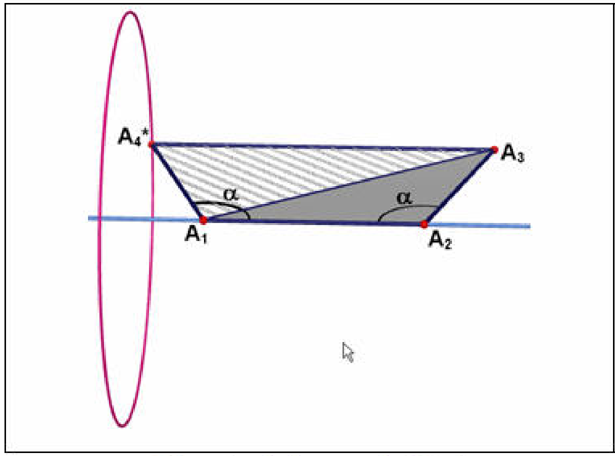
© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Typ 5 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke

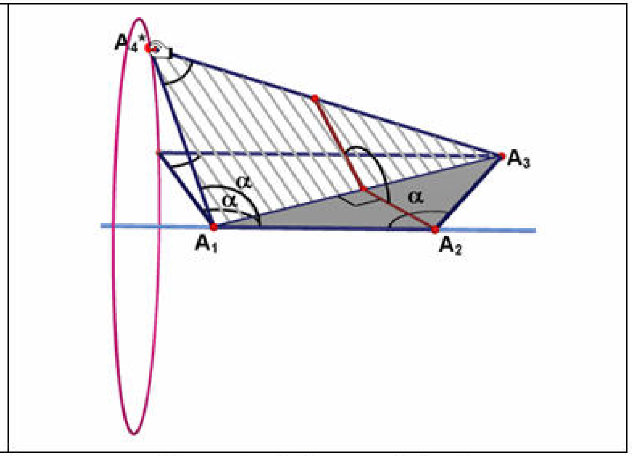


© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

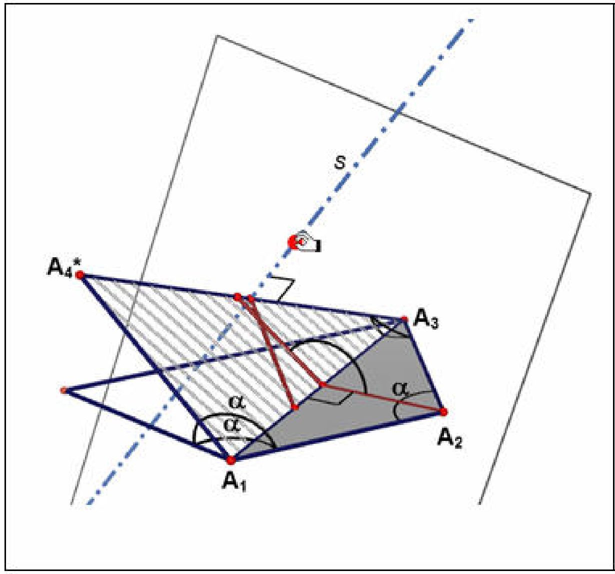
Eine Auffaltkonstruktion



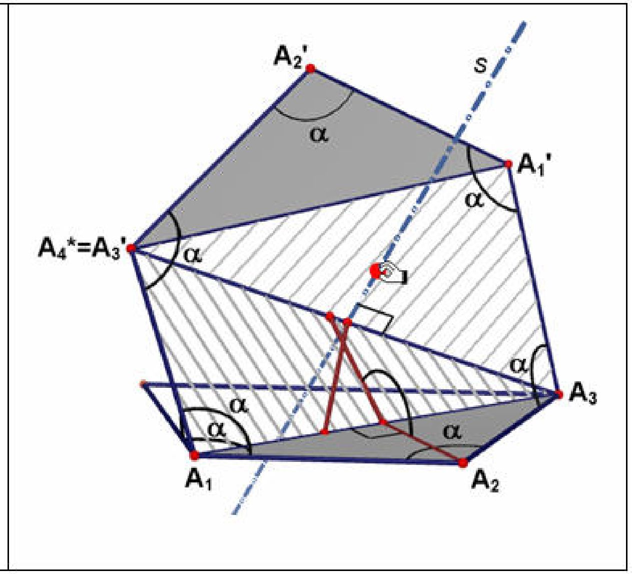
Konstruktionsschritt 1



Konstruktionsschritt 2



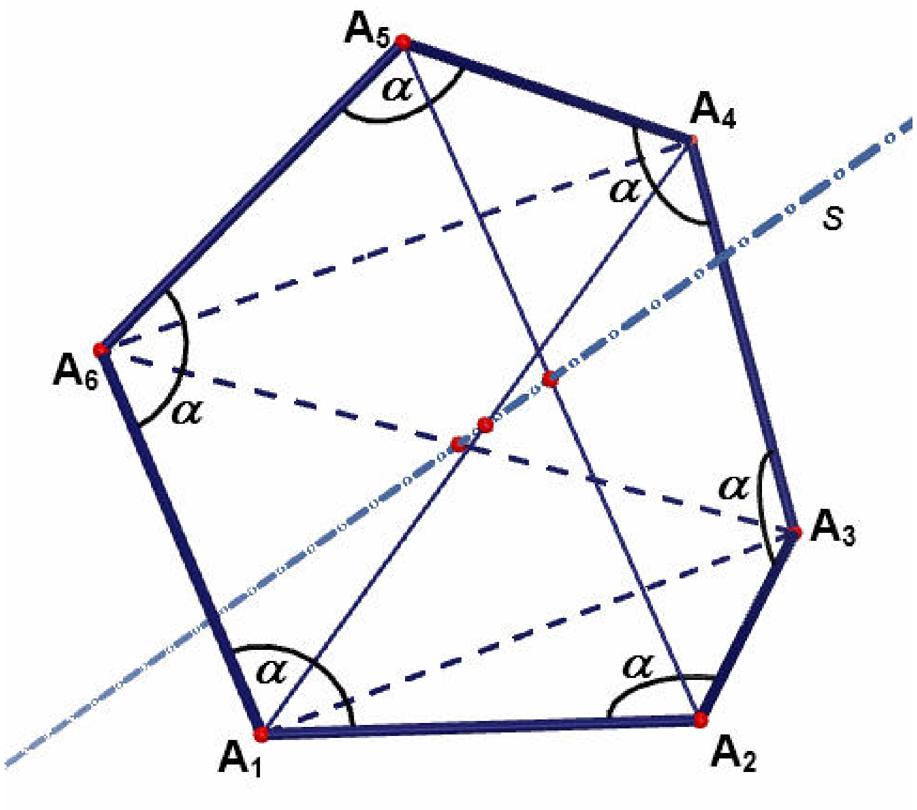
Konstruktionsschritt 3



Konstruktionsschritt 4

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Typ 5 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke

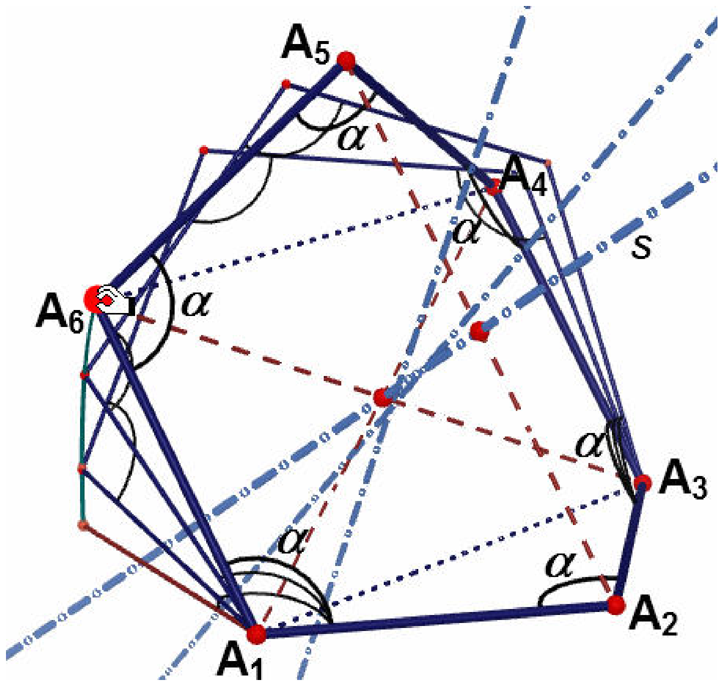


Parameter α mit $0° < \alpha < 120°$

Symmetrie-Eigenschaften

Nur 2 Deckabbildungen:

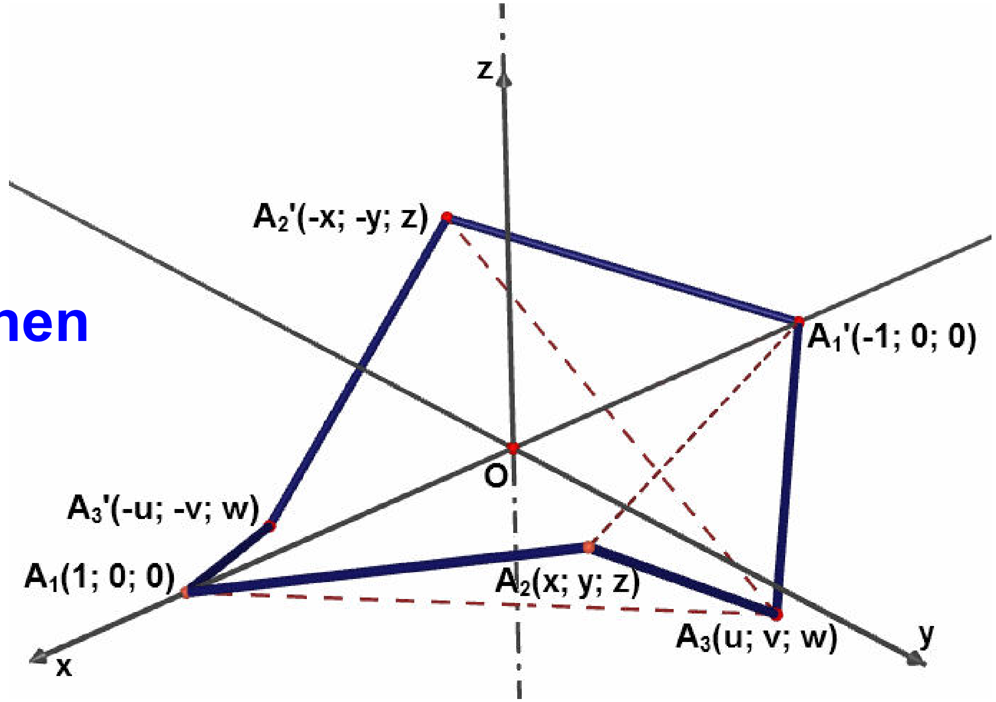
- **eine Geradenspiegelung**
- **identische Abbildung**



Schar nur achsensymmetrischer 3D-Sechsecke

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Berechnung der Eckpunkte eines axialsymmetrischen „regelmäßigen“ 3D-Sechsecks

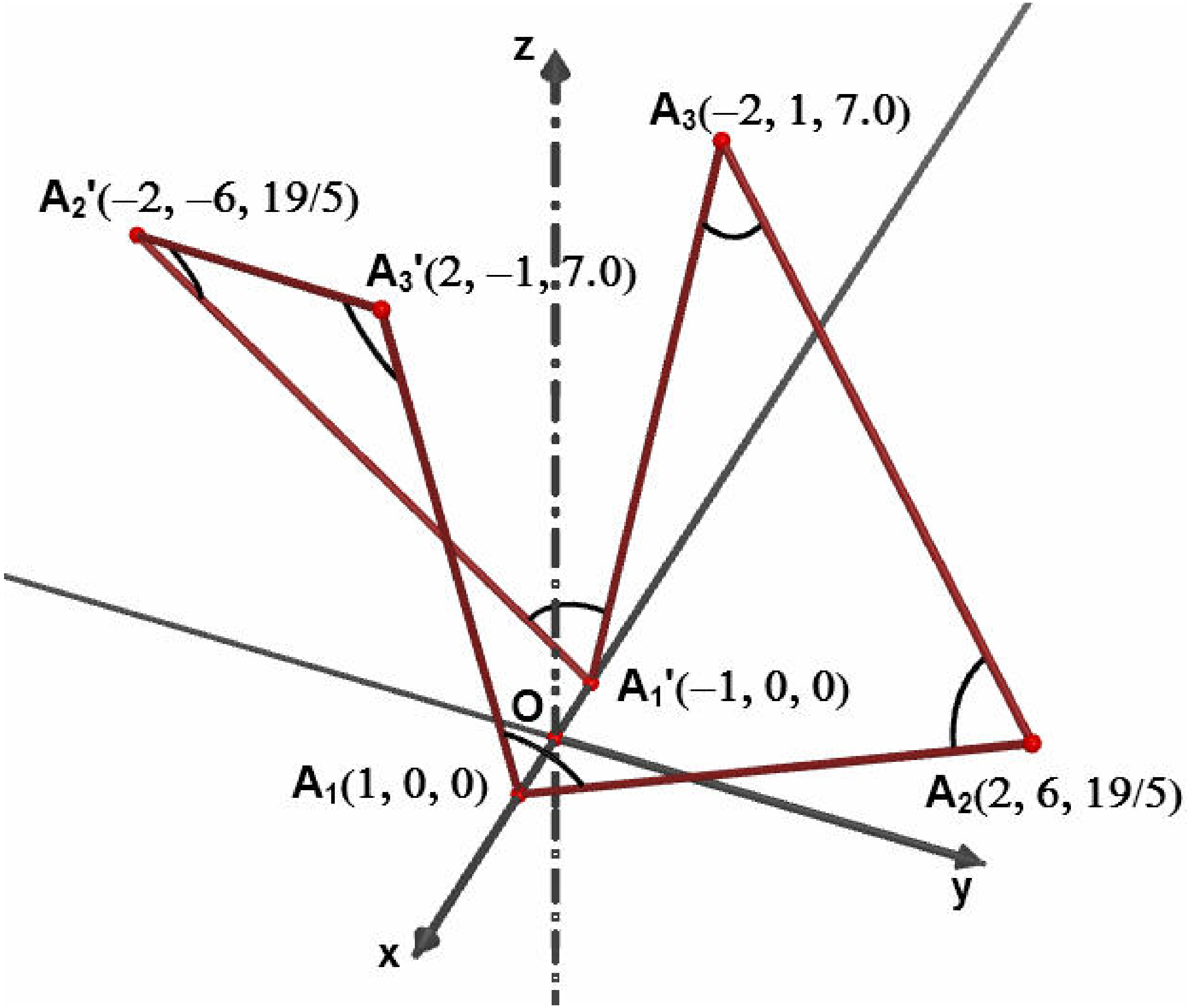


Wegen der Seitengleichheit $|A_1A_2| = |A_2A_3| = |A_3A_1'|$ gilt:
$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = (u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2 = (u + 1)^2 + v^2 + w^2$;
wegen der Winkelgleichheit folgt mit $|A_1A_3| = |A_2A_1'| = |A_3A_2'|$:
$(u - 1)^2 + v^2 + w^2 = (x + 1)^2 + y^2 + z^2 = (u + x)^2 + (v + y)^2 + (w - z)^2$.
Daraus ergibt sich folgendes quadratisches Gleichungssystem für die Variablen x, y, z, u, v, w:

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = (u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)$$
$$(u - x)^2 + (v - y)^2 + (w - z)^2 = (u + 1)^2 + v^2 + w^2$$
$$(u - 1)^2 + v^2 + w^2 = (x + 1)^2 + y^2 + z^2$$
$$(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = (u + x)^2 + (v + y)^2 + (w - z)^2.$$

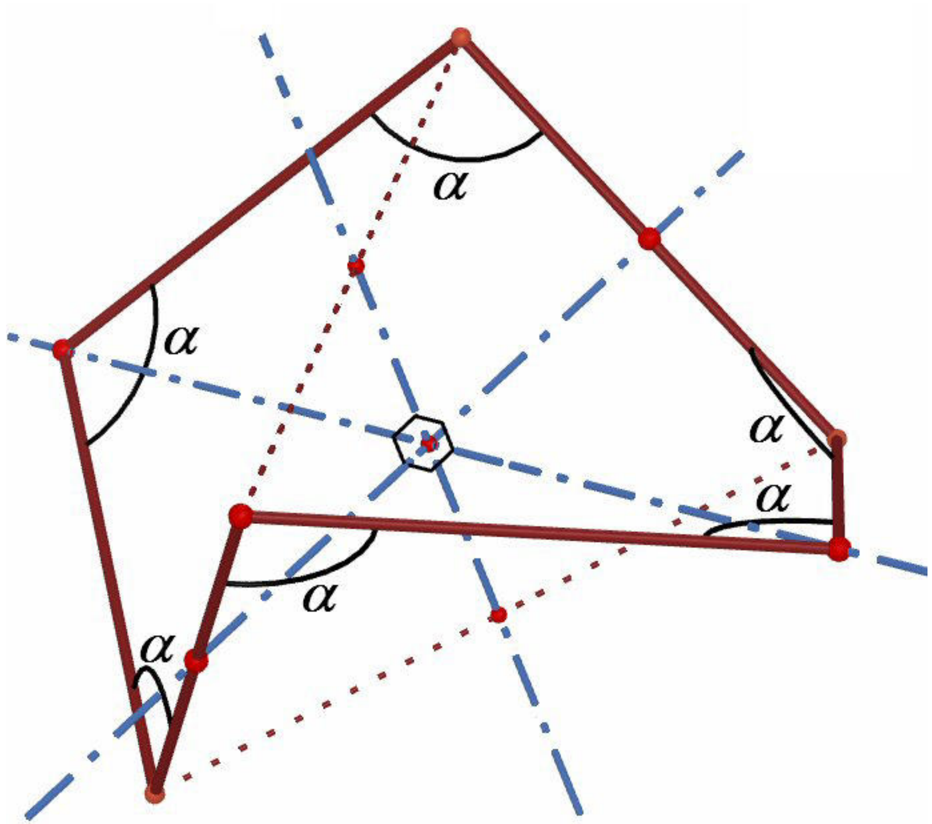
© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Typ 5 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke



© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Typ 6 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke



Parameter α mit 0° < α < 120°

Symmetrie-Eigenschaften

4 Deckabbildungen:

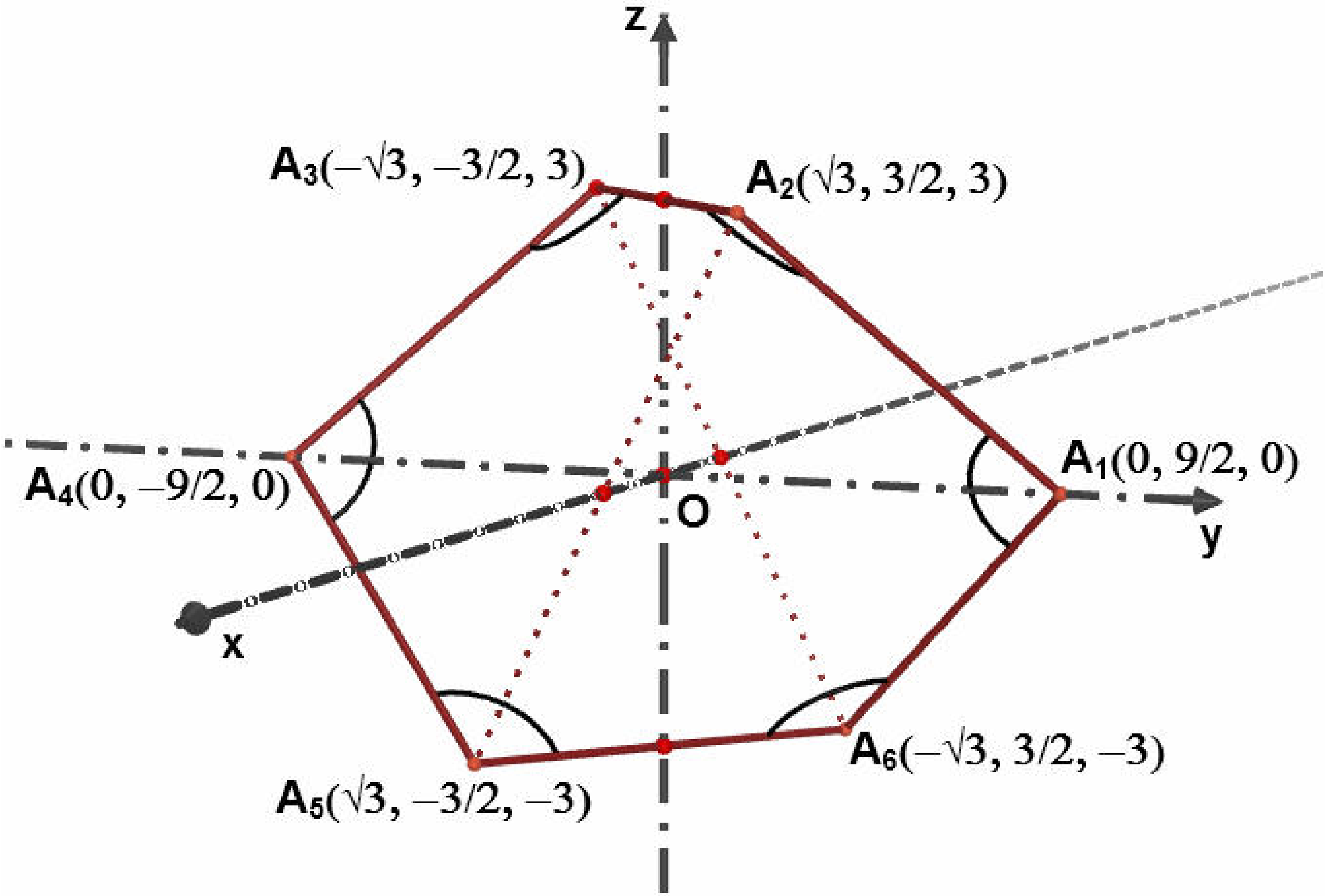
- 3 Geradenspiegelungen

- identische Abbildung

(eine weitere konkrete Kleinsche Vierergruppe)

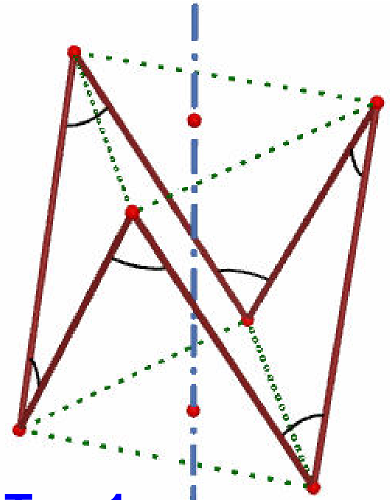
© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Typ 6 „regelmäßiger“ räumlicher 6-Ecke

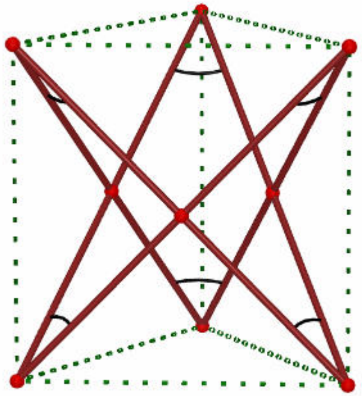


© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

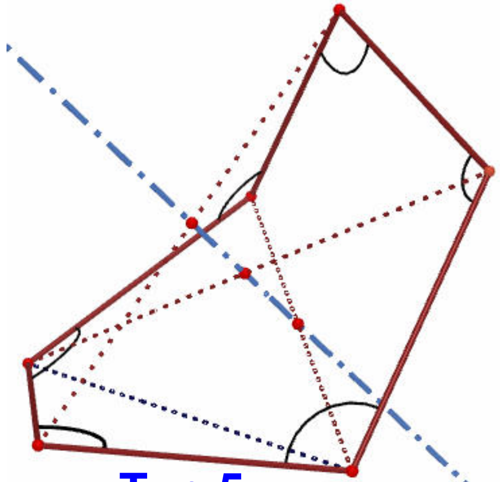
„Regelmäßige“ räumliche 6-Ecke: Zusammenfassung



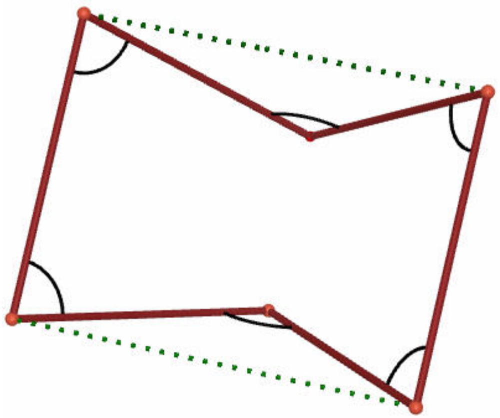
Typ 1



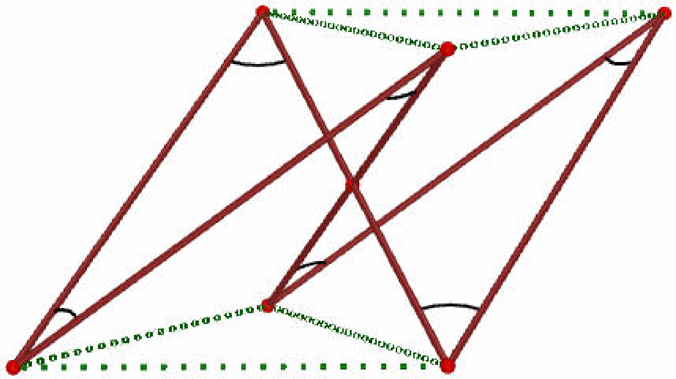
Typ 3



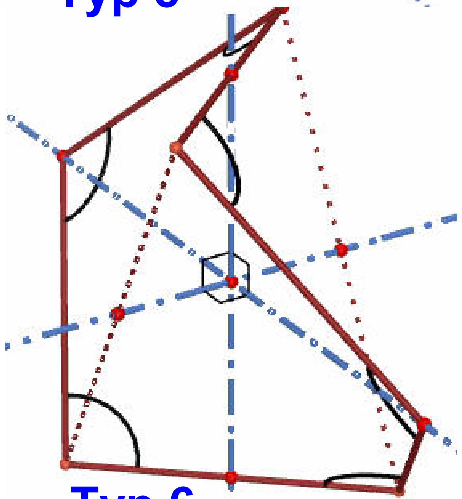
Typ 5



Typ 2



Typ 4



Typ 6

Eine Einteilung in genau sechs Symmetrietypen stammt ursprünglich von Fritz Siegerist/Küsnacht und Karl Wirth/Zürich.

Behauptung

Außer den vorstehenden 6 Typen des „regelmäßigen“ 3D-Sechsecks gibt es keine weiteren Typen.

Beweis?

Elem. Math. 73 (2018) 37 – 43
0013-6018/18/010037-7
DOI 10.4171/EM/349

© Swiss Mathematical Society, 2018

Elemente der Mathematik

Aufgaben

Aufgabe 1372: Wir betrachten reguläre Sechsecke im Raum, d.h. nicht planare Polygone mit 6 Seiten gleicher Länge und gleichen Winkeln zwischen Nachbarseiten.

a) Für welche Winkel existieren solche Sechsecke?

b) Man zeige, dass die Sechsecke symmetrisch sind.

c) Es seien $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ aufeinander folgende Ecken regulärer Sechsecke. Für jede mögliche Symmetriegruppe soll durch Hinzufügen der fehlenden Ecken (Koordinatendarstellung) ein Beispiel angegeben werden.

Karl Wirth, Zürich, CH

Eine Anwendung „regelmäßiger“ 3D-Sechsecke in der Molekular-Geometrie

J Math Chem (2018) 56:213–231
https://doi.org/10.1007/s10910-017-0789-x

CrossMark

ORIGINAL PAPER

Determining the metric and the symmetry group of finite point sets in space with an application to cyclohexane

Karl Wirth[1]

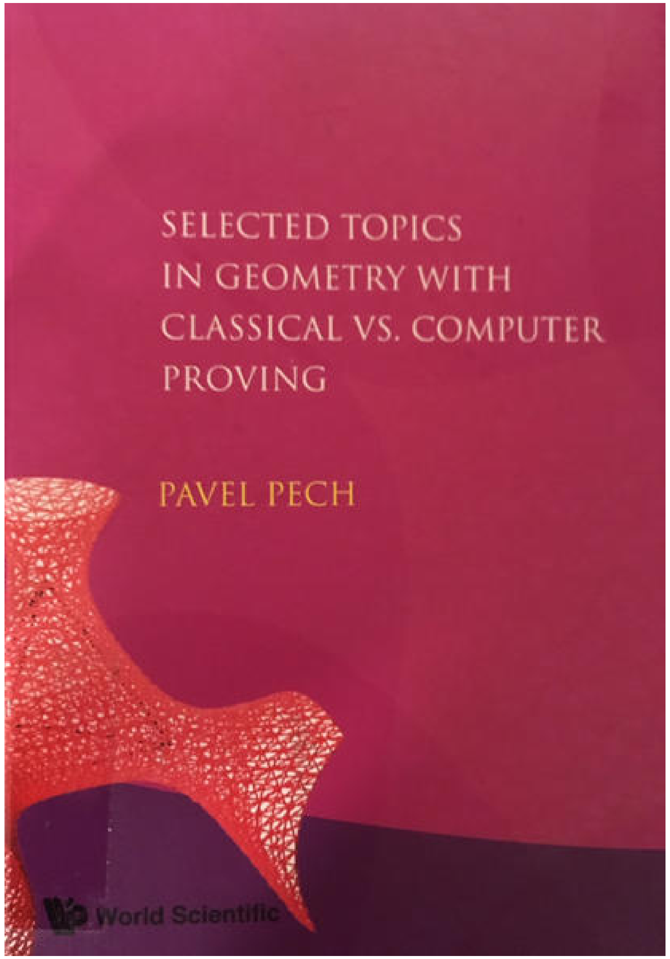
Received: 6 March 2017 / Accepted: 7 August 2017 / Published online: 22 August 2017
© Springer International Publishing AG 2017

Abstract To examine molecular geometry, we ask two questions: (1) What are the metric properties of a finite set of points in space, i.e., what are the relations of the distances between the points? (2) What is the symmetry or point group of the point set? These questions are answered by applying algebraic and algorithmic tools. Results from distance geometry are used to describe the metric. In combination with a so-called minimizing algorithm, distance geometry is also used to develop a procedure that allows generation of the symmetry group without referring to geometric intuition. The general methods presented here are applied to cyclohexane, facilitating a complete geometrical analysis of all its conformers.

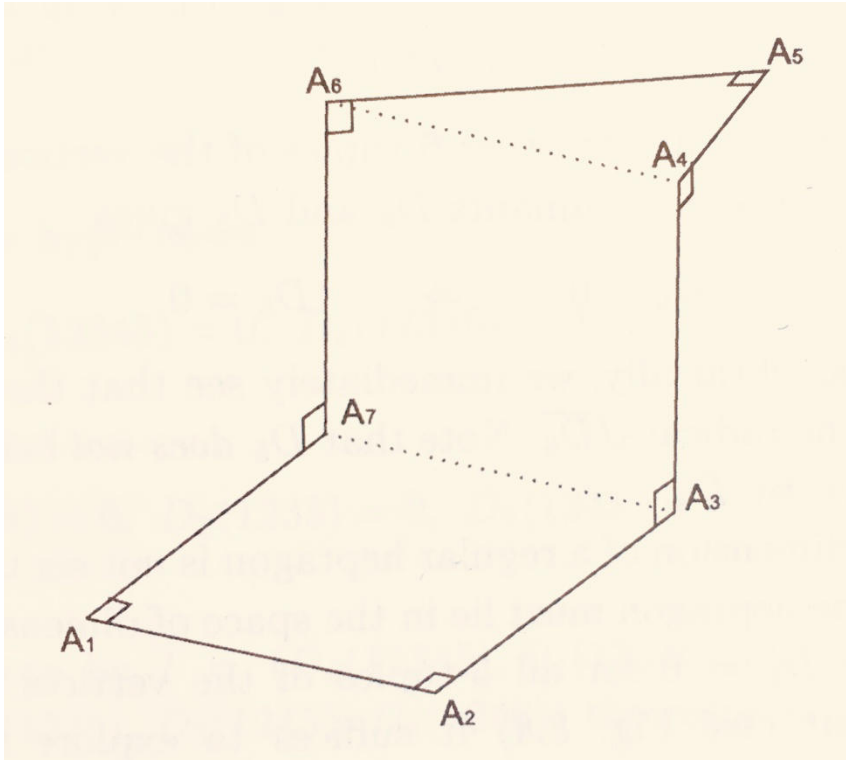
Keywords Molecular geometry · Finite point set · Metric · Symmetry group · Point group · Distance geometry · Minimizing algorithm · Cyclohexane

Mathematics Subject Classification 51K05 · 68W05 · 20B35 · 92E10

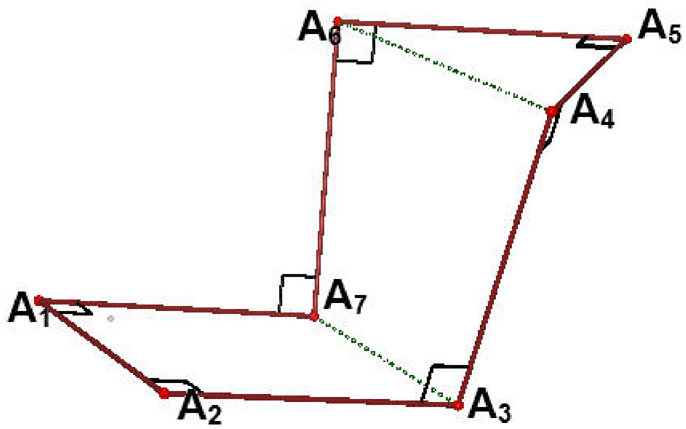
„Regelmäßige“ räumliche 7-Ecke



Singapore: World Scientific 2007

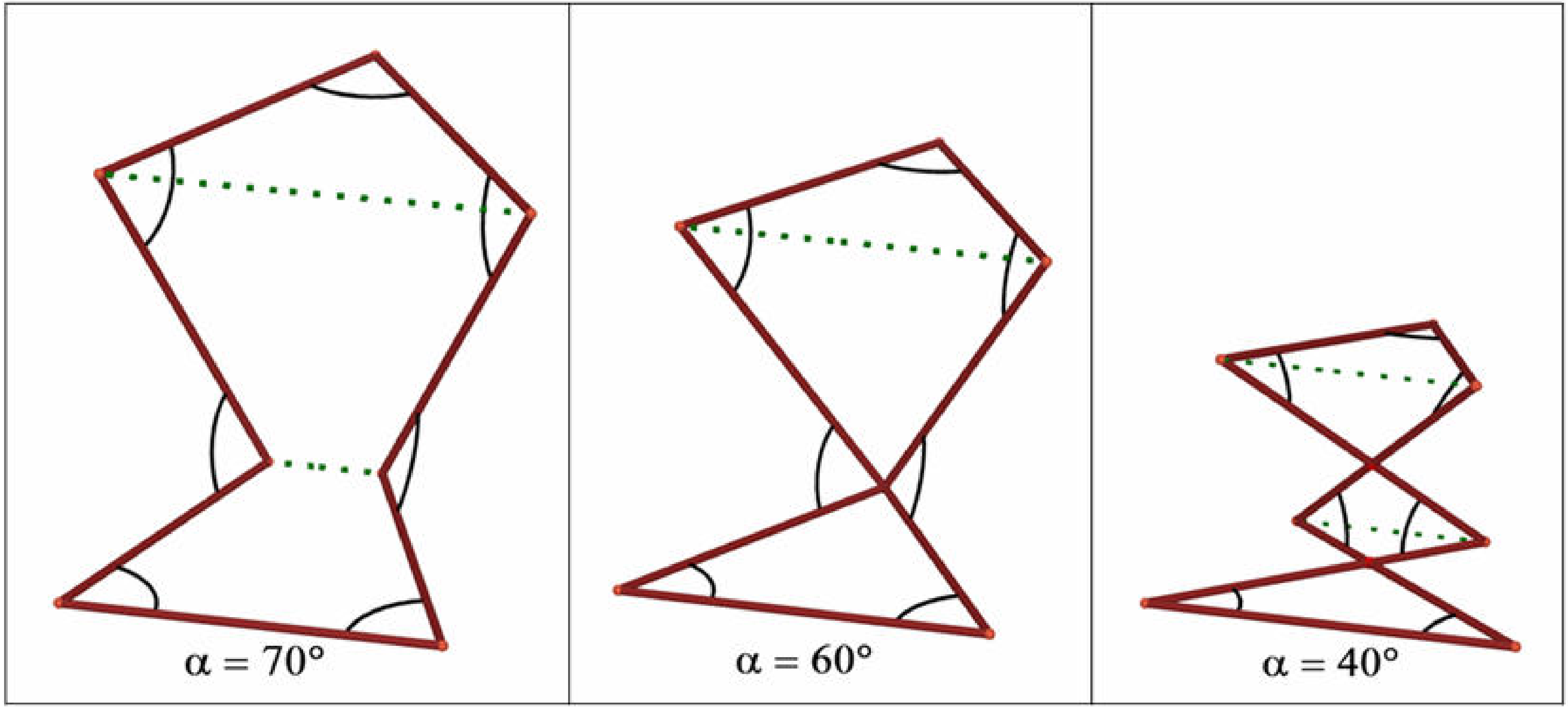


„Regelmäßiges“ rechtwinkliges räumliches 7-Eck



© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

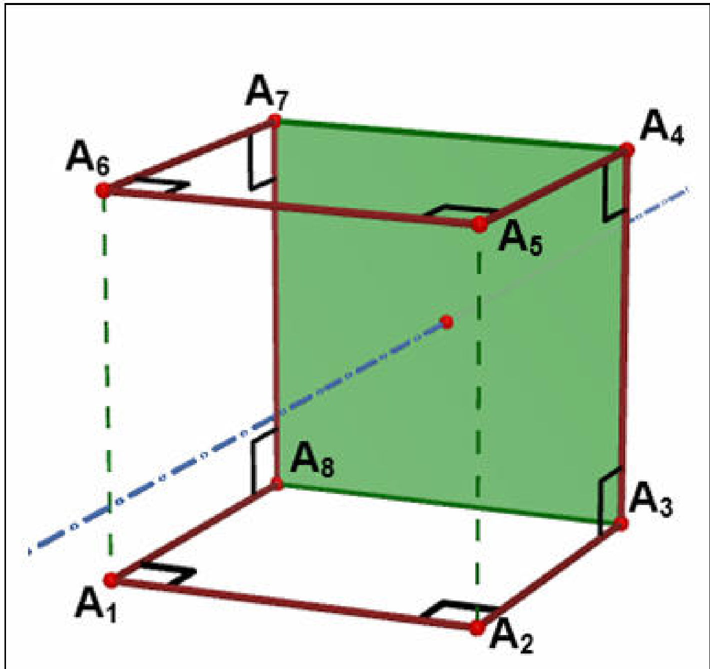
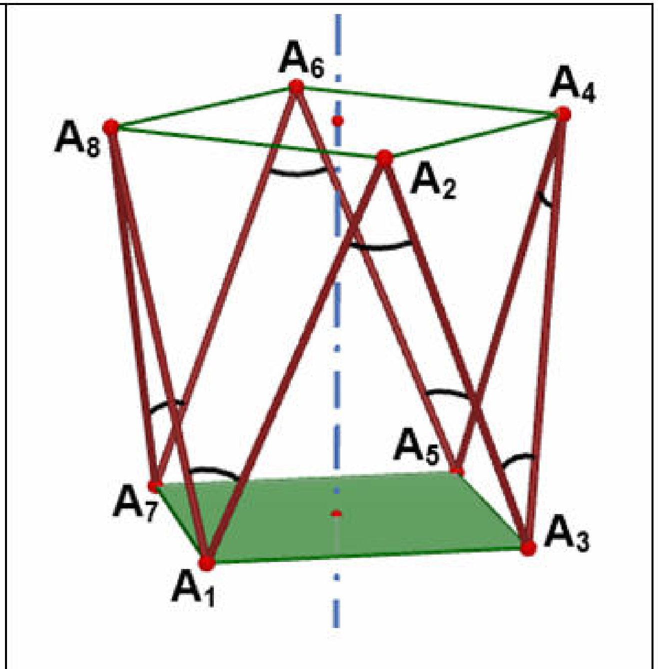
Eine Verallgemeinerung



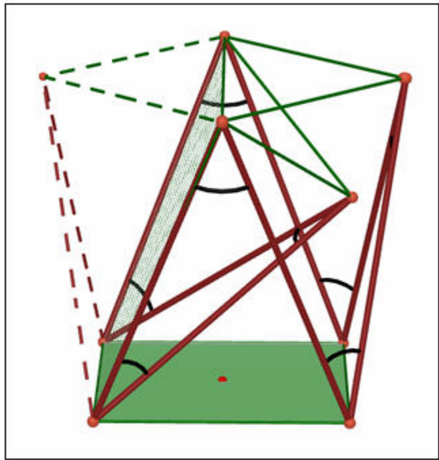
Parameter α mit $0° < \alpha \leq 90°$

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

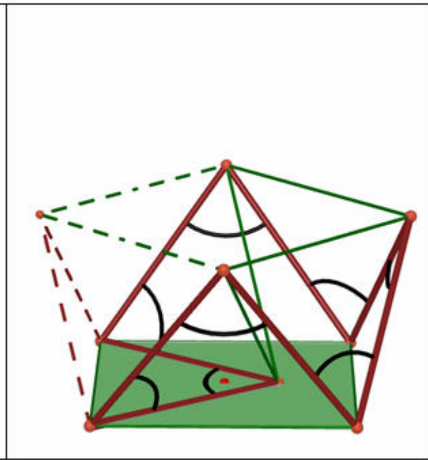
„Regelmäßige“ räumliche 8-Ecke

	
„Einfachstes“ regelmäßiges 3D-Achteck (Typ 1)	Regelmäßiges 3D-Achteck als Petrie-Polygon eines viereckigen Antiprismas (Typ 2.1)

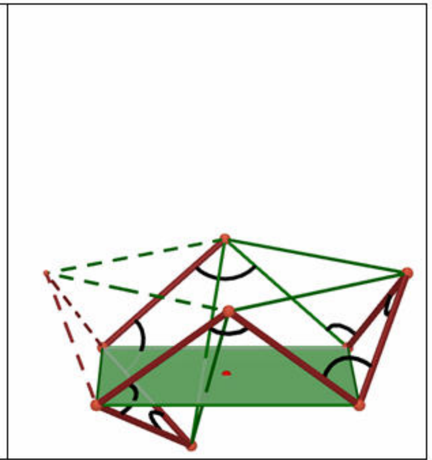
© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“



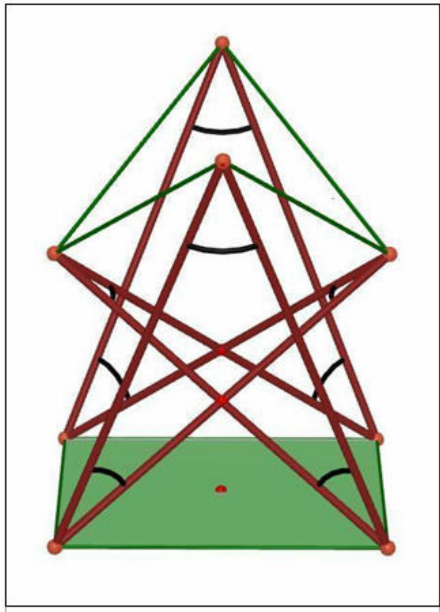
8-Ecktyp 2.2.1:



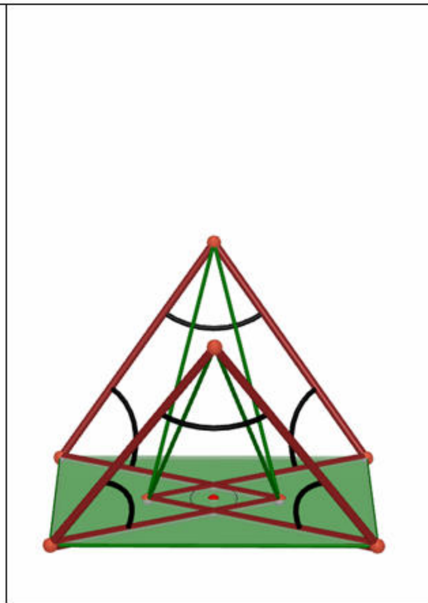
8-Ecktyp 2.2.2:



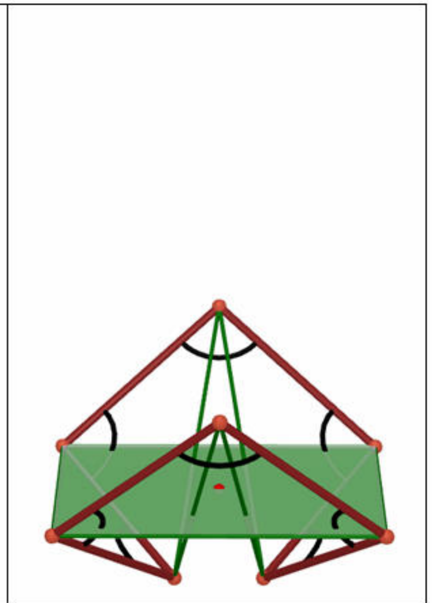
8-Ecktyp 2.2.3



8-Ecktyp 2.3.1:

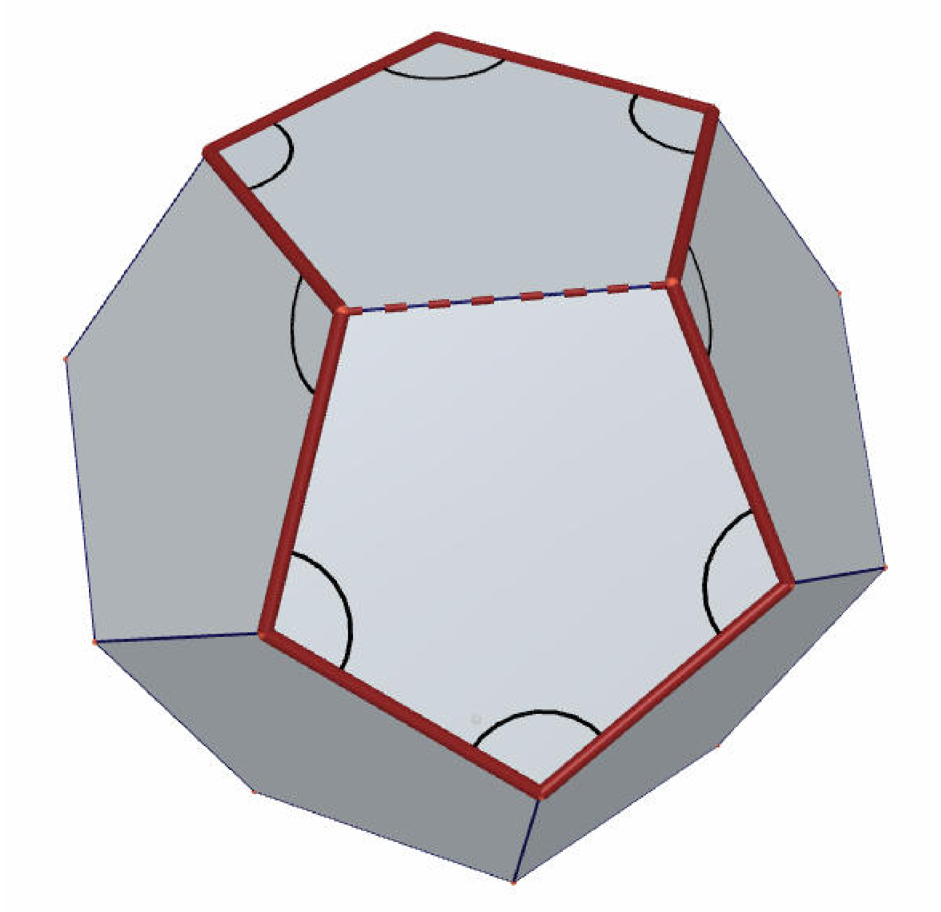


8-Ecktyp 2.3.2:



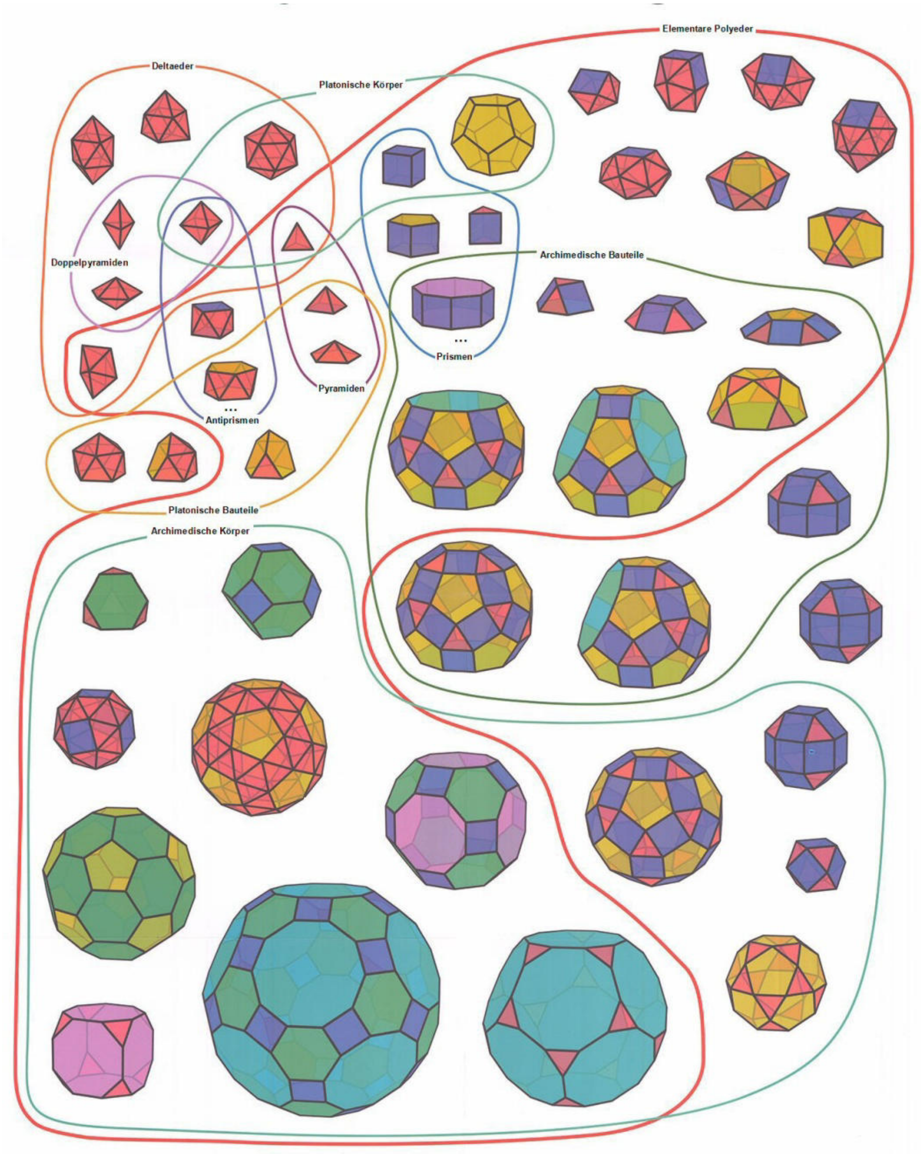
8-Ecktyp 2.3.3

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“



© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige' räumliche Polygone“

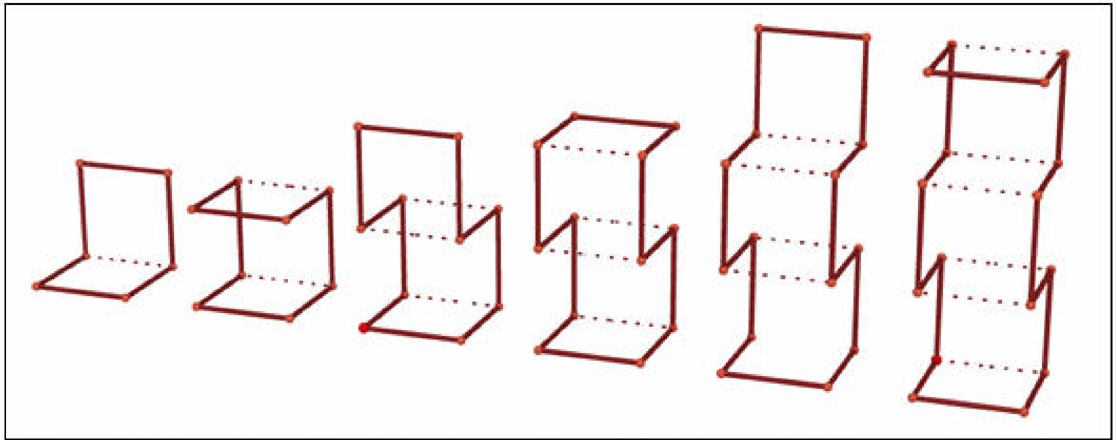
Entdeckungsfeld
<u>Gleichseitige</u> bzw. gleich<u>winklige</u> und <u>regelmäßige</u> 3D-Polygone auf und in den Johnson-Körpern



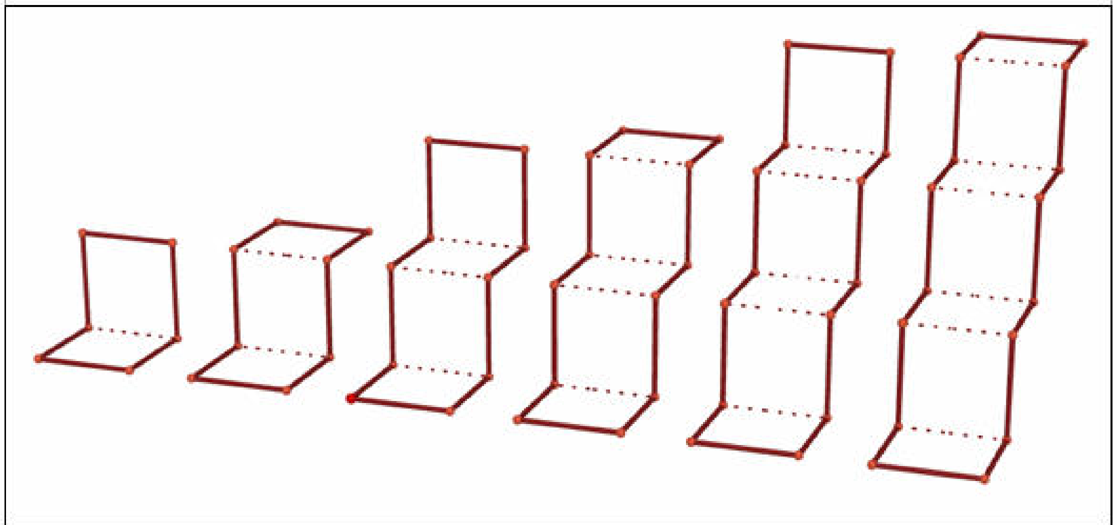
© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige' räumliche Polygone“

Existenzsatz

Für jedes k $\geq$ 3 gibt es „regelmäßige“ räumliche 2k-Polygone;



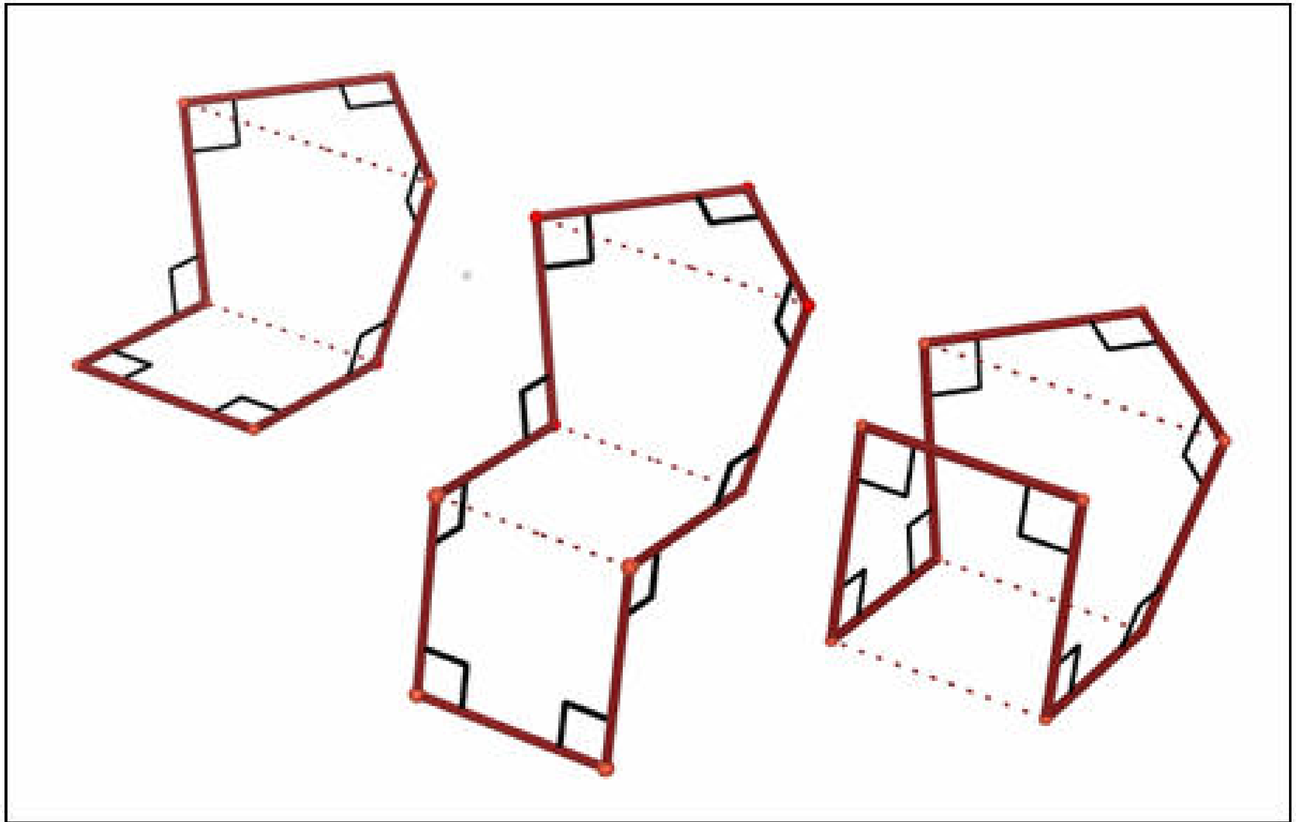
Regelmäßige räumliche 2k-Polygone Typ 1 (k=3, 4, ..., 8; Polygonwinkel: 90°)



Regelmäßige räumliche 2k-Polygone Typ 2 (k=3, 4, ..., 8; Polygonwinkel: 90°)

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Für jedes k ≥ 3 gibt es „regelmäßige“ räumliche (2k+1)-Polygone.



Von einem regelmäßigen Siebenecke zu verschiedenen Typen des regelmäßigen (2k+1)-Polygons für k>3

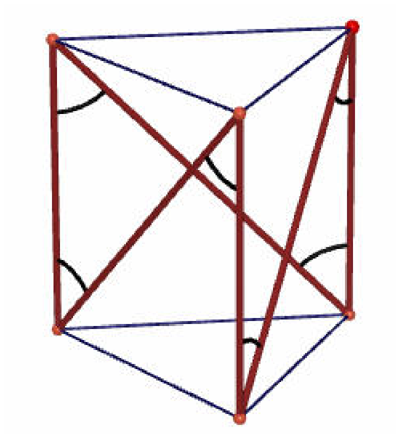
© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Räumliche Polygone, die <u>gleichseitig</u> und <u>gleichwinklig</u> sind, sehen im Vergleich mit den ebenen regelmäßigen Polygonen meist <u>nicht</u> „regelmäßig“ aus!

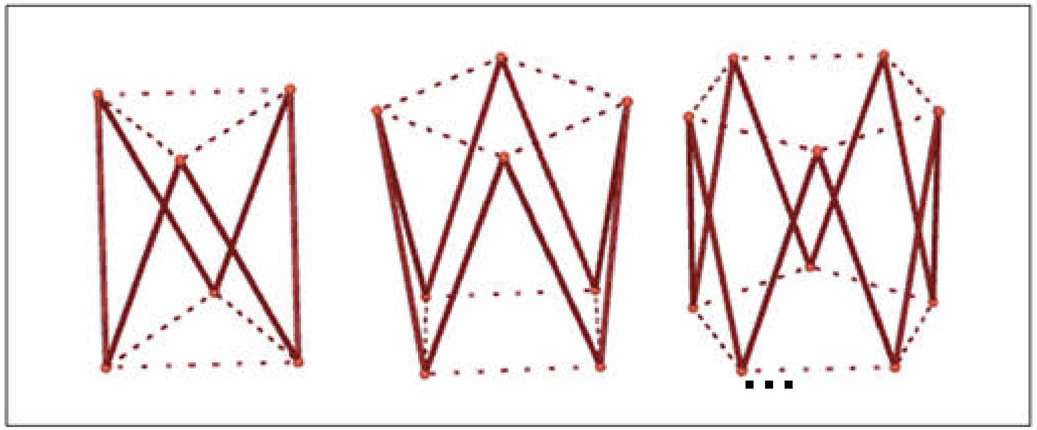
Wie ist die bisherige Definition der „Regelmäßigkeit“ räumlicher Polygone also zu spezifizieren, sodass diese unserer Anschauung von Regelmäßigkeit entspricht?

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

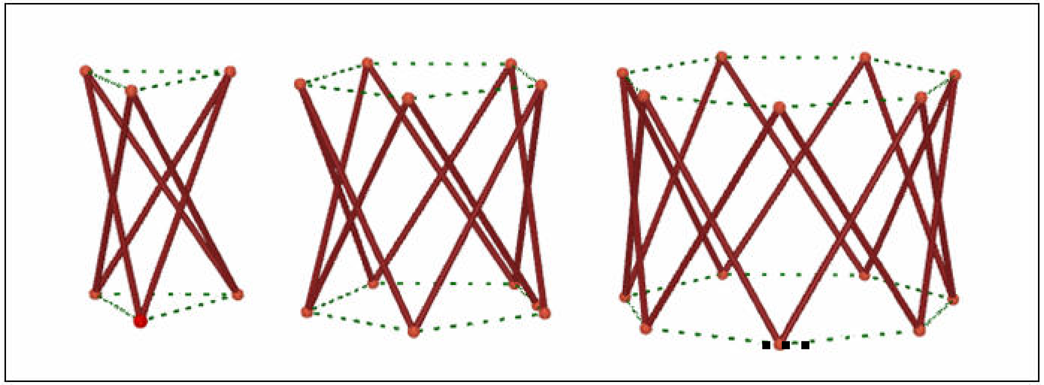
Ein räumliches Polygon ist (echt) regelmäßig genau dann, wenn es gleichseitig und <u>eckenäquivalent</u> ist.



Eckenäquivalentes, aber nicht seitengleiches 3D-Sechseck



Regelmäßige 2n-eckige 3D-Polygone (n = 3, 4, 5, ...) als Mantelpolygone von Antiprismen mit regelmäßigen kongruenten Grund- und Deckflächen



Regelmäßige 2n-eckige 3D-Polygone aus Seitenflächen-Diagonalen gerader n-seitiger Prismen regelmäßiger Grundfläche (n = 2k+1, k = 1, 2, 3, ...)

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige' räumliche Polygone"

Es gibt keine anderen regelmäßigen 3D-Polygone als die antiprismatischen und die prismatischen.

Вестник
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 5 — 1962

В. А. ЕФРЕМОВИЧ, Ю. С. ИЛЬЯШЕНКО

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ В E^n

Efremovič, V. A., und Ju. S. Il'jašenko (1962): Regelmäßige Vielecke im E^n. Vestnik Moskov. Univ., Ser. I 17, Nr. 5, 18-24

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“

Schlussbemerkung

In der Raumgeometrie ist vieles viel komplexer und nur weniges einfacher als in der ebenen Geometrie.

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige' räumliche Polygone"

Epilog

„Vergleichen wir die Weite des bekannten geometrischen Wissens mit der Oberfläche des Ozeans, so sind dessen Tiefen mit dem noch unbekannten raumgeometrischen Wissen vergleichbar.“

H. S. 2016

© 2019 Schumann „Über ‚regelmäßige‘ räumliche Polygone“