

Vorbereitung für das zweite Faltmodell

Worum geht es?

Wir interessieren uns für die Dissection von Herrn Michael Goldberg (1902 – 1990). Dies deshalb, weil diese Transformation vom gleichseitiges Dreieck ins reguläre Fünfeck transformiert, und wir genau diese Flächen auch bei den Platonischen Körpern antreffen.

Zerlegungsgleichheit

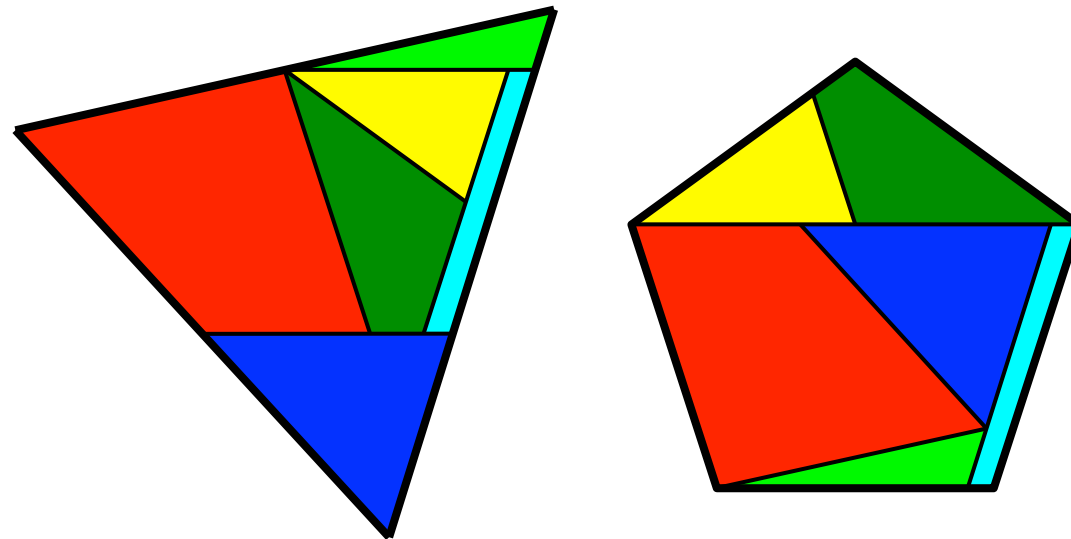


Abb. 1: Gleichseitiges Dreieck und regelmäßiges Fünfeck - 6 Teile

Wie kommt man auf diese Zerlegung?

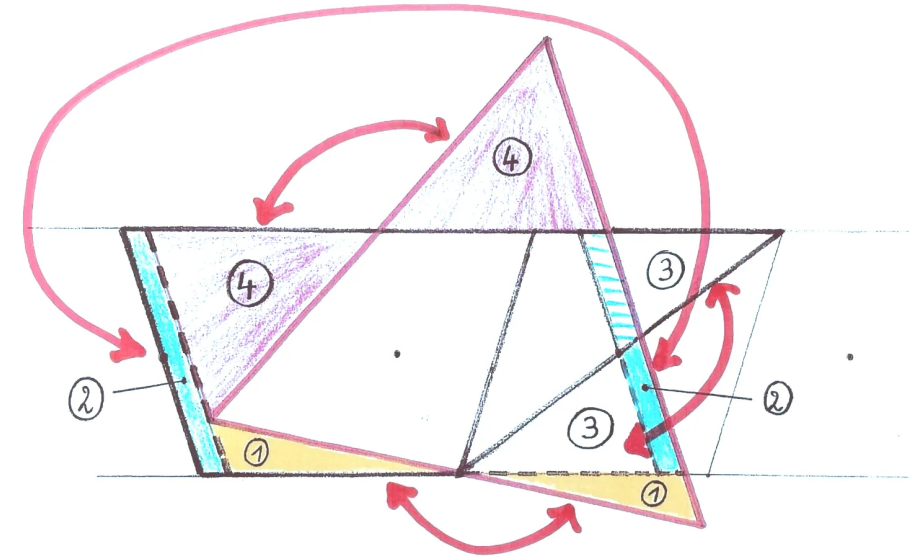
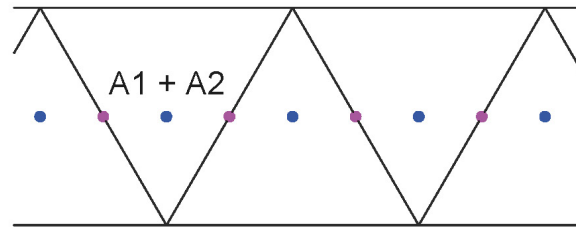
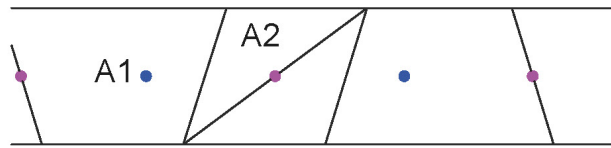


Abb. 2: T (Trapez) - Streifen - Methode

Allein mit dem Wissen, dass beide Flächen gleich groß sein müssen, können wir nun sämtliche Längen und Winkel berechnen, welche für die Konstruktion von Goldberg's Zerlegung notwendig sind.

Bezeichnungen und Daten

Wir normieren die Flächen der beiden Polygone auf 1.

Für die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks erhalten wir damit:

$$s = 2/\sqrt[4]{3} \approx 1.5196713713 \quad (1)$$

$$A = 1 = s^2 * \sqrt{3}/4 \Rightarrow s^2 = 4/\sqrt{3} \Rightarrow s = 2/\sqrt[4]{3}$$

Für die Seitenlänge u des Fünfecks erhalten wir:

$$u = 2 * \sqrt{[(1/5) * \tan(36^\circ)]} \approx 0.7623870555 \quad (2)$$

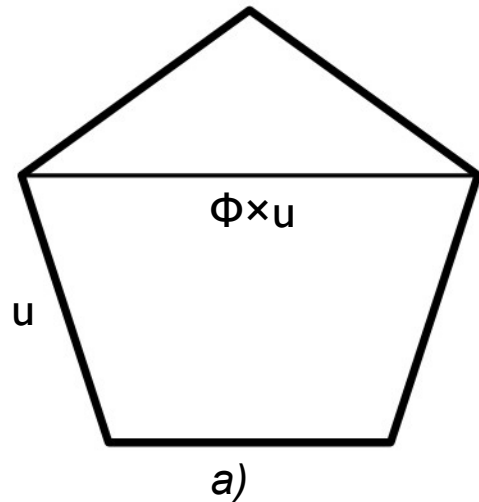
$$A = 1 = 5 * 1/2 * u * \tan 54^\circ * u/2 \Rightarrow 4/5 = u^2 * \tan 54^\circ \Rightarrow 4/5 * \tan 36^\circ = u^2 \Rightarrow u = 2 * \sqrt{[(1/5) * \tan(36^\circ)]}$$

Das Seitenverhältnis ist:

$$s/u \approx 1.993306891 \quad (3)$$

Die Seitenlänge des Dreiecks ist also fast doppelt so groß wie jene des Fünfecks.

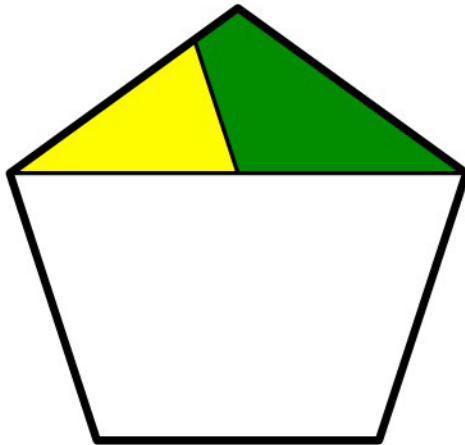
Konstruktives Vorgehen



Φ (Phi) ist die goldene Zahl

a) Diagonale

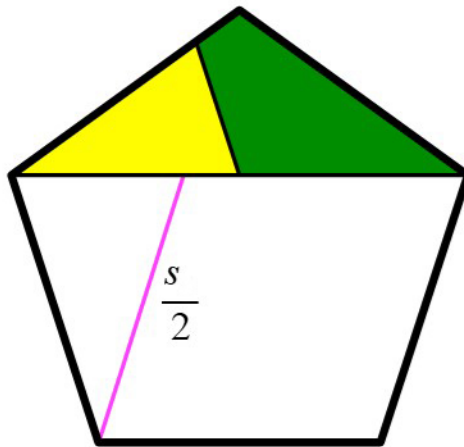
Konstruktives Vorgehen



b)

b) Parallele zur li. Topfseite

Konstruktives Vorgehen



c)

c) halbe Dreiecksseite



Vortrag

Konstruktives Vorgehen

Wir beginnen mit dem regelmäßigen Fünfeck und zeichnen die horizontale Diagonale. Diese Diagonale hat eine Länge von $\Phi \times u$. Dabei ist Φ die goldene Zahl und u die Seitenlänge des regulären Fünfecks (Abb. 3a).

Durch den Mittelpunkt dieser Diagonalen, deren Länge $\Phi \times u$ ist, zeichnen wir eine Parallele zur linken Topfseite des Fünfeckes (Abb. 3b). Somit erhalten wir das gelbe und das dunkelgrüne Teilstück.

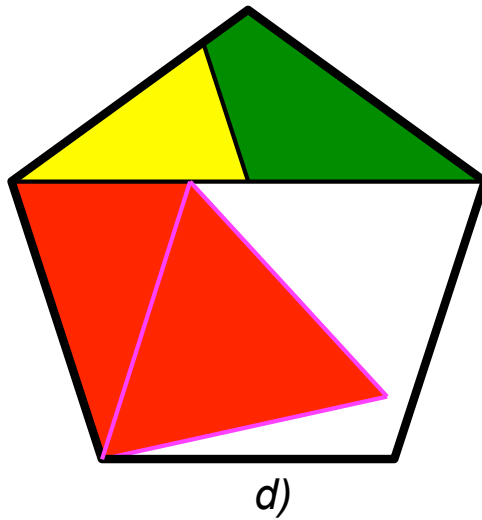
Das gelbe Dreieck ist ein gleichschenkeliges Dreieck mit einer Schenkellänge von $(1 \div 2) \times \Phi \times u$.

Bis jetzt haben wir uns ausschließlich in der Fünfeckgeometrie bewegt.

Nun kommt das Dreieck ins Spiel.

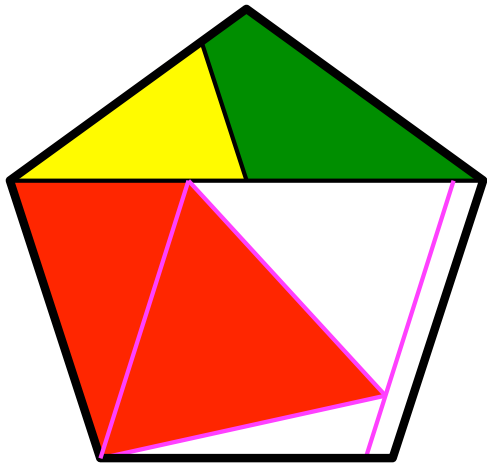
Wir tragen von der linken unteren Ecke des Fünfeckes aus die halbe Dreieckseite auf die Diagonale ab (Abb. 3c). Wegen (3) ist die entstehende Strecke (magenta) nicht parallel zur rechten Topfseite des Fünfeckes.

Konstruktives Vorgehen



d) Ergänzung zum gleichseitiges Dreieck

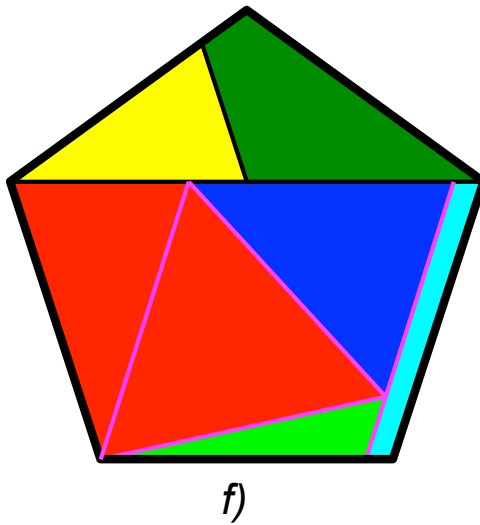
Konstruktives Vorgehen



e)

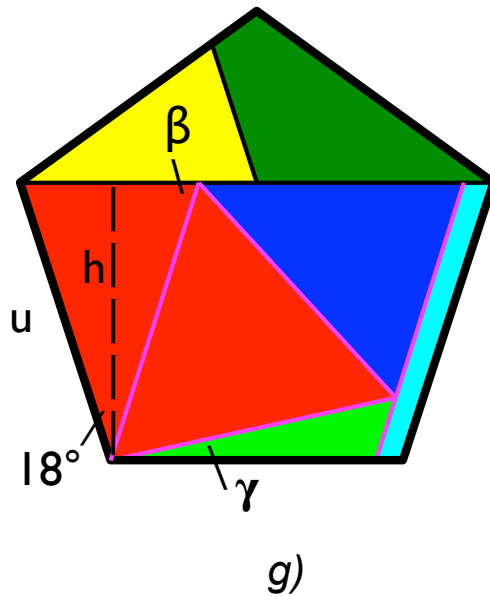
e) Parallele zu magenta → 3 mal 60°

Konstruktives Vorgehen



f) hellblaues Viereck kein Parallelogramm

Konstruktives Vorgehen



$$h = u \times \cos 18^\circ$$

$$\sin \beta = 2h / s \Rightarrow \arcsin(2h/s) \approx 72,6^\circ$$

$$\gamma = \beta - 60^\circ \approx 12,6^\circ$$

g) Winkel $\gamma \approx 12,6^\circ$, daraus folgen alle restlichen Winkel

Damit sind die sechs Teile der Zerlegung konstruierbar.

Vortrag

Konstruktives Vorgehen - Fortsetzung

Die magenta Strecke ergänzen wir zum gleichseitigen Dreieck (Abb. 4a). So erhalten wir das rote Viereck. Durch die Spitze des gleichseitigen Dreiecks zeichnen wir eine Parallele zur magenta Strecke (Abb. 4b). Wir haben an dieser Spitze jetzt drei Winkel von 60° . Diese werden in die Ecken des gleichseitigen Dreiecks kommen.

Weiters bilden die beiden parallelen Seiten (Magenta Strecke) mit den Seiten t ein Parallelogramm. Wir können nun noch das dunkelblaue und das hellgrüne Dreieck sowie das hellblaue Viereck markieren (Abb. 4c).

Das hellblaue Viereck ist dem Anschein zum Trotz kein Parallelogramm. Lediglich die beiden kurzen Seiten sind parallel.

Die sechs Teile können nun gemäß Abbildung 1 ins gleichseitige Dreieck eingepasst werden.

Alle 6 Teile der Zerlegung sind somit konstruierbar.

Neuheit: Ein Gelenkmodell, das alle Teile verbindet !

Bisher:
Goldberg's Zerlegung verwendet vereinzelt
Gelenke - Teile hängen nicht zusammen

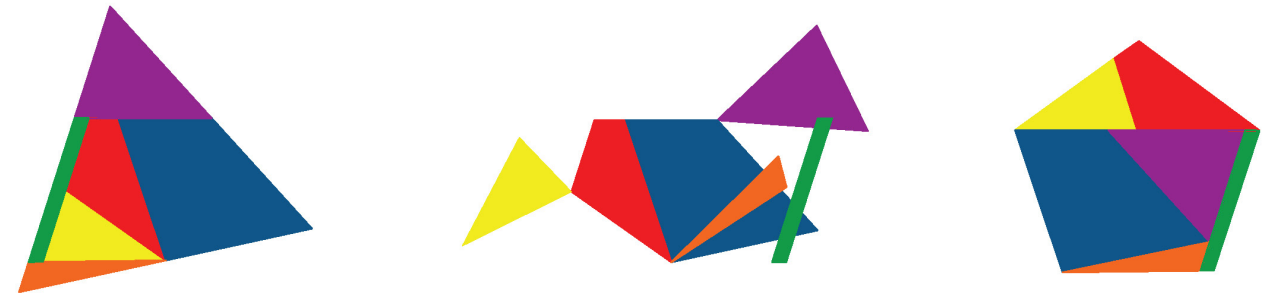


Abb. 5: Klassisches Verfahren

NEU:
Kinematisches Modell - Zerlegung beruht
auf 4 Gelenke mit Dreharmen - alles
zusammenhängend!

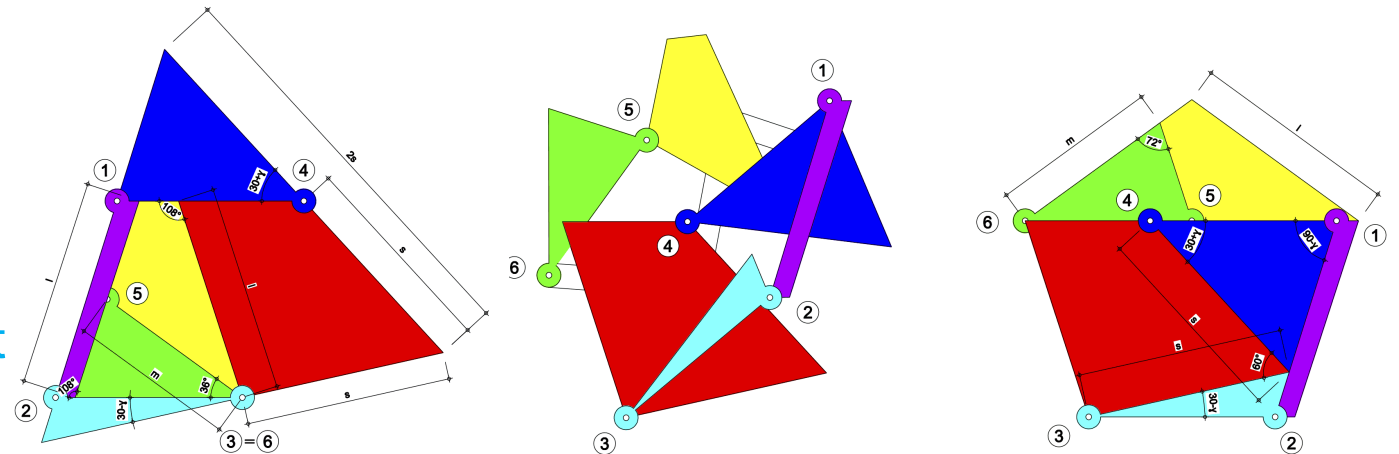


Abb. 6: Kinematischer Prozess