

Endliche projektive Ebenen - die Geometrie hinter dem Kartenspiel Dobble

Karin Wittek, MEd

Masterarbeit im UF Darstellende Geometrie

Juli 2023 / November 2024



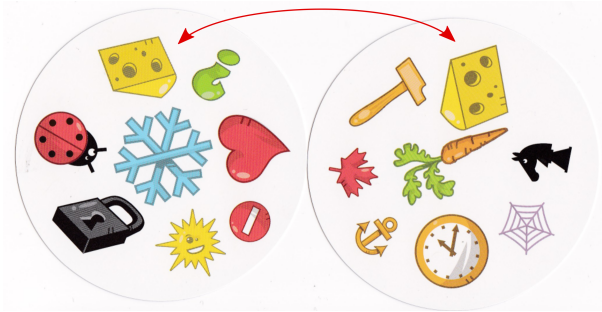
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

Das Spiel Dobble

- 2009 veröffentlicht
- für 2-8 Personen ab 6 Jahren
- 55 Spielkarten mit jeweils 8 Symbolen



Spielprinzip Dobble



Es muss ein gemeinsames Symbol gefunden werden.

Genauer: Es muss DAS gemeinsame Symbol gefunden werden.

Noch etwas mathematischer formuliert, heißt das:

Zwei verschiedene Karten haben immer genau ein gemeinsames Symbol.

Vergleich mit:

Durch je 2 verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

Ein Axiom von projektiven Ebenen.

Axiome einer projektiven Ebene

Sei \mathcal{P} eine Menge an Punkten und $\mathcal{G} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$. Dann wird \mathcal{G} als Geradenmenge bezeichnet.

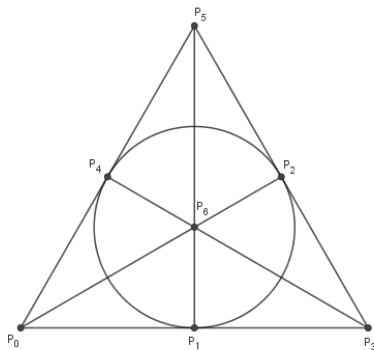
Axiome

$(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ heißt projektive Ebene, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- Durch je 2 verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
- Der Durchschnitt von 2 verschiedenen Geraden ist nicht leer.
- Es gibt 4 verschiedene Punkte so, dass je 3 Punkte nicht kollinear sind.

Ist \mathcal{P} endlich, dann ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$ eine endliche projektive Ebene.

Beispiel: FANO-Ebene



Besitzt 7 Punkte und 7 Geraden. Alle Axiome sind erfüllt.
Ist die kleinste endliche projektive Ebene.

Konstruktion einer endlichen projektiven Ebene

Konstruktion analog zu unendlicher projektiver Geometrie:

Sei V 3-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}$ (endlicher Körper), Punktmenge \mathcal{P} und die Geradenmenge \mathcal{G} definiert als:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &:= \mathcal{P}(V) = \{\mathbb{F}a \mid a \in V \setminus \{0\}\} \\ \mathcal{G} &:= \mathcal{G}(V) = \{g \mid g = \{\mathbb{F}a \mid a \in U \setminus \{0\}, \\ &\quad U \dots 2\text{-dim. Unterraum von } V\}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \#\mathcal{P} = \#\mathcal{G}$ & alle Axiome sind erfüllt

Bezeichnung: $PG(2, q)$ (2 geometrische Dimension, q Ordnung)

O.B.d.A. kann $V = \mathbb{F}_q^3$ gesetzt werden.

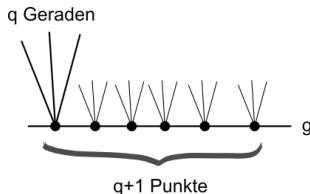
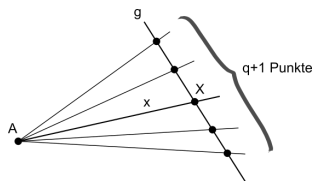
Anzahl der Punkte und Geraden

Durch diese Konstruktion folgt:

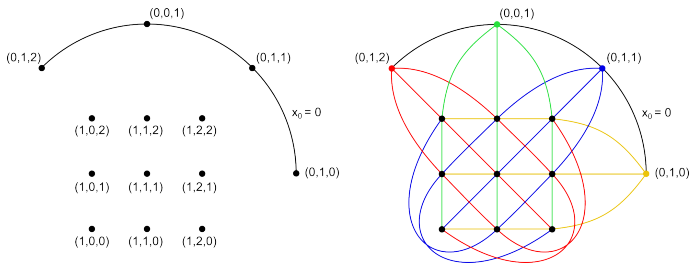
$$\#\mathcal{P} = \#\mathcal{G} = q^2 + q + 1$$

$$\forall g \in \mathcal{G} : \#g = q + 1$$

Also jede Gerade hat $q + 1$ Punkte und daraus folgt wiederum, dass durch jeden Punkt $q + 1$ Geraden verlaufen.



Beispiel: Ebene der Ordnung 3

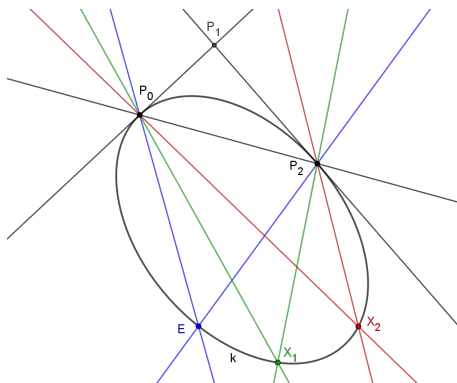


Ordnung $q = 3 \Rightarrow 3^2 + 3 + 1 = 13$ Punkte und Geraden
4 Geraden durch jeden Punkt, 4 Punkte pro Gerade

Koordinaten: homogene Koordinaten und *modulo 3*

Geradengleichungen z.B. der roten Geraden (ebenfalls homogen):

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_0 + x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_0 - x_1 - x_2 = 0.$$



Wie viele Punkte hat ein Kegelschnitt in $PG(2, q)$?

Geradenbüschel von P_0 hat $q + 1$ Geraden, also hat der Kegelschnitt $q + 1$ Punkte.

Bögen

$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$ mit $\#\mathcal{B} = r$ heißt ein (ebener) r -Bogen, falls keine 3 Punkte von \mathcal{B} kollinear sind.

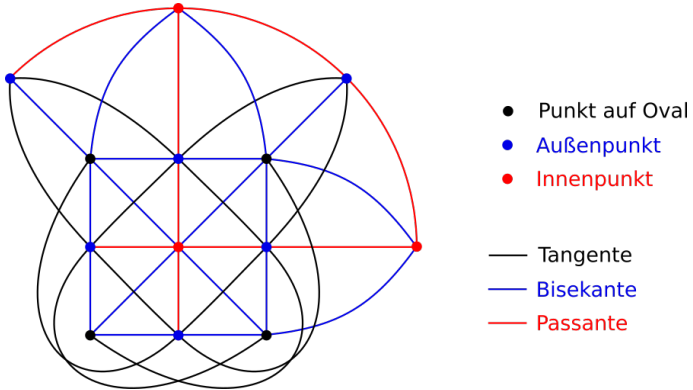
Oval

In $PG(2, q)$ heißt jeder $(q + 1)$ -Bogen Oval.

ohne Beweis: Jeder Kegelschnitt ist ein Oval.

Ein Bogen kann nicht mehr als $q + 1$ (ungerade Ordnung) bzw. $q + 2$ (gerade Ordnung) Punkte enthalten.

Ein Kegelschnitt/Oval in $PG(2, 3)$



Ordnung $q = 3$, also $q + 1 = 4$ Punkte auf Oval

Zurück zum Spiel Dobble

Das Spiel kann als endliche projektive Ebene gesehen werden.
Karten sind Punkte (bzw. Geraden), dann sind Symbole Geraden (bzw. Punkte).

zum Beispiel: alle Punkte (Karten) der Gerade Käse
oder alle Geraden (Karten) durch den Punkt Käse



Dobble als endliche projektive Ebene

ABER: 8 Symbole pro Karte \Rightarrow Ebene der Ordnung $q = 7$
 $\Rightarrow 7^2 + 7 + 1 = 57$ Karten und Symbole

Die 55 Karten müssen um 2 Karten ergänzt werden, damit die endliche projektive Ebene vollständig ist.



Das Wissen über Ovale kann bei Dobble genutzt werden:

Spielvariante Drilling:

Es werden 9 Karten aufgelegt und wer ein Symbol auf 3 oder mehr Karten findet, darf sich diese Karten nehmen.

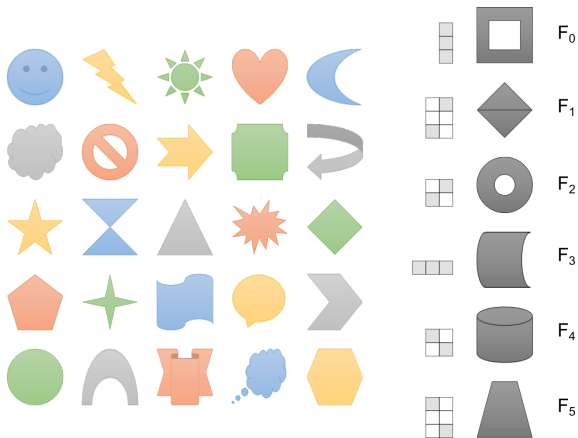
Reichen 9 Karten immer aus?

Ja, denn ein Oval hat $q + 1 = 8$ Punkte (Karten), d.h. bei 9 Karten muss immer mindestens ein Drilling dabei sein.

Erstellung von Dobble Karten

Beispiel (Dobble Kids):

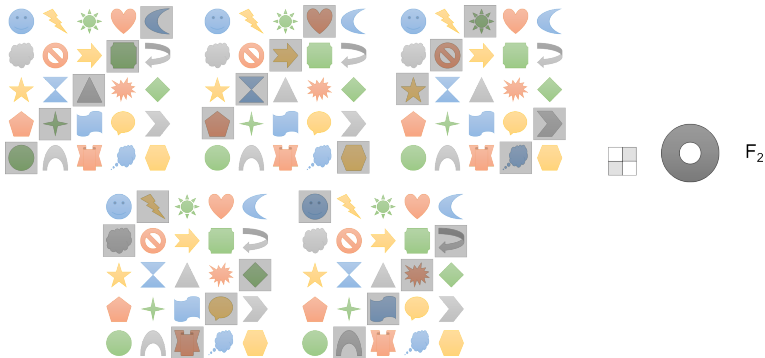
Kartenspiel mit Ordnung $q = 5$, also 6 Symbole pro Karte
 $q^2 + q + 1$ Punkte, also 31 Symbole insgesamt



Erstellung von Dobble Karten

Jede Karte ist eine Gerade der endlichen projektiven Ebene.

z.B. Geradenschar durch Fernpunkt F_2



Diese Konstruktion funktioniert für eine Ordnung q , wenn q eine Primzahl ist.

Bei Primzahlpotenzen existiert eine endliche projektive Ebene, allerdings mit anderer Konstruktion (Körpererweiterungen).

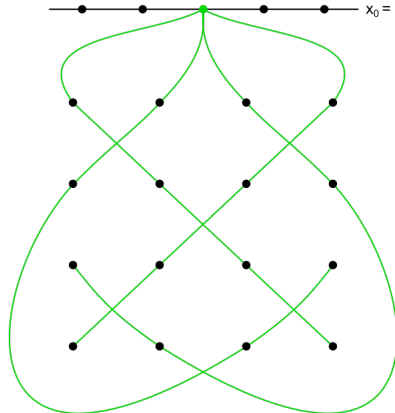
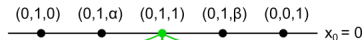
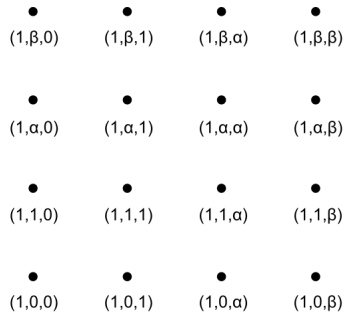
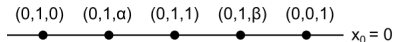
Bei $q = 8n + 6$ ($n \in \mathbb{N}$) existieren keine endlichen projektiven Ebenen (z.B. 6, 14, 22, ...).

Für $q = 10$ wurde die Existenz mit Computereinsatz widerlegt (Rechenzeit 183 Tage).

Das (auf den ersten Blick) sehr theoretische und abstrakte Konstrukt einer endlichen projektiven Ebene kann bei dem Kartenspiel Dobble einerseits zur Erstellung von einem Kartenset verwendet werden. Andererseits dient das Wissen über Ovale in endlichen projektiven Ebenen dazu, dass die Spielvariante Drilling auf jeden Fall spielbar ist.

- Donna A. Dietz. Spot It![®] Solitaire. Department of Mathematics and Statistics, 2013.
- DorFuchs. Hinter dem Spiel Dobble steckt erstaunlich viel Mathematik. Youtube, 2020. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=vyYSEDGUdlg> Letzter Zugriff: 13.06.2023.
- Ralf Goertz. Differenzmengen. Kartenspiel-Algebra. Spektrum der Wissenschaft. Spezial Physik, Mathematik, Technik, pages 24–29, 2018.
- Hans Havlicek. Skript zur Vorlesung Endliche Geometrie. Wien, 2002.
- James W. Hirschfeld. Projective Geometries over Finite Fields. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, Oxford, 2. edition, 1998.
- Alle Abbildungen wurden mit **GeoGebra** oder **Inkscape** erstellt.

Anhang: $PG(2,4)$ - Koordinaten & Geraden



Anhang: $PG(2,4)$ - Geraden

