

# Rätselhafte Extremwertaufgaben und andere geometrische Rätsel

W. Fuhs, Wien

Mit insgesamt  $n$  Punkten sollen möglichst viele gerade Punktreihen gebildet werden, deren jede genau  $m$  Punkte enthält.

Auch wenn nur die größte mögliche Zahl dieser Punktreihen (und nicht auch ihre Anordnung) angegeben werden muss, ist die Aufgabe in dieser allgemeinen Form sicherlich unlösbar. Für bestimmte Werte von  $n$  und/oder  $m$  kann sie natürlich (wenn auch nicht immer leicht) gelöst werden. Besonders leicht ist die Aufgabe für  $m = 2$  zu lösen. Jeder Schüler kann doch die Anzahl der möglichen Zweier-Reihen (Verbindungsstrecken) von  $n$  Punkten ermitteln: Bei jedem zählt er  $(n - 1)$  Verbindungsstrecken zu den übrigen, also insgesamt  $n \cdot (n - 1)$ . Dabei ist aber jede Verbindungsstrecke doppelt gezählt.

Weitere Fälle zeigt die folgende Tabelle, nämlich wieviele gerade Dreier-Reihen mit einer bestimmten Zahl von Punkten höchstens gebildet werden können.

Anzahl der Punkte	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	. . . . .	$n$
Höchstzahl von Dreier-Reihen	1	1	2	4	6	7	10	12	15	19	. . . . .	?

Zunächst ein einfaches Beispiel aus dieser Tabelle:

Die 'Extremwertaufgabe' ist natürlich für eine kleine Zahl  $n$  von Punkten leicht zu lösen, zum Beispiel für  $n = 6$ : Wieviele Dreier-Reihen können mit sechs Punkten höchstens gebildet werden?

Zuerst muss überlegt werden, wievielen Dreier-Reihen ein Punkt angehören kann: Nur zwei Reihen; drei benötigten ja schon sieben Punkte. Wenn es möglich ist, dass *jeder* Punkt zu zwei Reihen gehört, so ist damit die Höchstzahl von Reihen erreicht. Die dazugehörige Figur ist ein vollständiges Vierseit. Ein solches hat ja sechs Ecken und auf jeder Seite liegen drei davon.

Ein weiteres Beispiel:

Es soll der Beweis erbracht werden, dass *neun* Punkte *höchstens zehn Dreier-Reihen* mit genau drei Punkten auf jeder dieser zehn Geraden bilden können. Manche Rätselbücher<sup>1)</sup> enthalten eine Teilaufgabe: Es wird nur verlangt, mit neun Punkten zehn gerade Dreier-Reihen zu zeichnen und es wird nicht einmal darauf hingewiesen, dass damit die größte Zahl der möglichen Reihen erreicht ist. Die duale Aufgabe (Abb. 1) ist vermutlich nirgends zu finden. Nun zum angekündigten Beweis:

1) Bei neun Punkten kann keiner gleichzeitig zu fünf Dreier-Reihen (fortan kurz Reihen genannt) gehören (Abb. 2), denn dazu wären ja  $5 \cdot 2 + 1 = 11$  Punkte nötig.

2) Wenn jeder Punkt gleichzeitig genau zu drei Reihen gehört, gibt es nur neun Reihen. Das Zählen der Reihen kann ja so geschehen, dass bei jedem Punkt gezählt wird, wie vielen Reihen er angehört, was in diesem Fall zunächst  $9 \cdot 3 = 27$  Reihen ergibt, aber dabei ist jede Reihe dreimal (nämlich bei jedem ihrer Punkte) gezählt worden, sodass die Strukturformel  $(9 \cdot 3) : 3 = 9$  Reihen ergibt. Die Abbildung 3 zeigt eine solche Anordnung (Konfiguration  $9_3$  von *Reye*) und damit ein neues Rätsel: Ist das Zeichnen dieser Figur eine lineare, mit dem Lineal allein lösbare Aufgabe oder eine quadratische, für die auch der Zirkel notwendig ist? Die Aufgabe könnte (nicht ganz gleichwertig) auch so formuliert werden:

*Drei Dreiecke sind so zu zeichnen, dass jedes seine Ecken auf den drei Geraden eines der beiden anderen hat.*

Weitere Rätselfragen sind die analogen Aufgaben in höheren Dimensionen. Im Raum wären es drei Tetraeder, jedes einem anderen eingeschrieben. Weiter im begonnenen Beweis:

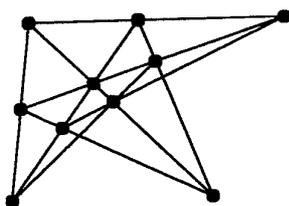


Abb. 1

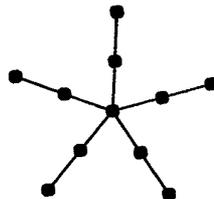


Abb. 2

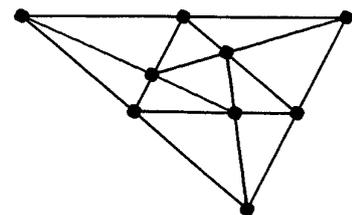


Abb. 3

<sup>1)</sup> R. ZEHL: Denken mit Spaß. Verl. Orac, Wien 1981

3) Es müssen also auch Punkte zu vier Reihen gehören. Wären das genau zwei, würde die gleiche Art des Abzählens  $(2 \cdot 4 + 7 \cdot 3) : 3 = 9 + 2/3$  Reihen ergeben. Das ist nicht nur unmöglich, sondern auch immer noch zu wenig. (Gehörte nur ein Punkt zu vier Reihen oder gehören Punkte nur zu zwei Reihen oder gar nur zu einer, wären es noch weniger Reihen.)

4) Es gibt also mindestens drei Punkte A,B,C, von denen jeder zu vier Reihen gehört. Liegen diese drei Punkte auf einer Geraden oder bilden sie ein Dreieck?

5) In den vier Reihen, zu welchen ein solcher Punkt (z.B. A) gehört, sind *alle* neun Punkte enthalten (also auch B und C). Es müsste daher, würden A,B,C ein Dreieck bilden, auf jeder Dreiecksgeraden ein dritter, mit der Gegenecke durch eine Reihe verbundener Punkt liegen. Diese drei Verbindungsreihen mit den Gegenecken könnten einen der neun Punkte gemeinsam haben (dann blieben nur noch zwei Punkte, die natürlich nicht für jede Ecke des Dreiecks ABC eine weitere Reihe bilden können) oder je eine Ecke eines ABC umschriebenen Dreiecks (Abb.4a,b) enthalten, sodass insgesamt nur neun Reihen vorhanden wären.

6) Die Punkte A,B,C, von denen jeder zu vier Reihen gehört, bilden also kein Dreieck, sondern eine Reihe, und nur wenn jeder weitere der neun Punkte an drei Reihen beteiligt ist, kann es die größtmögliche Anzahl von Reihen, nämlich  $(3 \cdot 4 + 6 \cdot 3) : 3 = 10$  geben.

7) Damit ist bewiesen, dass neun Punkte nicht mehr als zehn gerade Dreier-Reihen bilden können. Außer A,B und C kann ja kein weiterer Punkt zu vier Reihen gehören, weil er weder mit A und B ein Dreieck bilden, noch als vierter Punkt auf der Geraden durch A,B und C liegen darf.

8) Die von neun Punkten gebildeten zehn Reihen können durch unendlich viele Figuren, die nicht durch Kollineationen aufeinander abbildbar sind, dargestellt werden. Aber alle haben nicht nur dieselbe Strukturformel  $(3 \cdot 4 + 6 \cdot 3) : 3 = 10$  sondern auch dieselbe Anordnung (Abb.5). Ohne die Gerade, welche die Punkte A,B,C verbindet, liegt eine (besondere) Konfiguration von *Reye* vor.

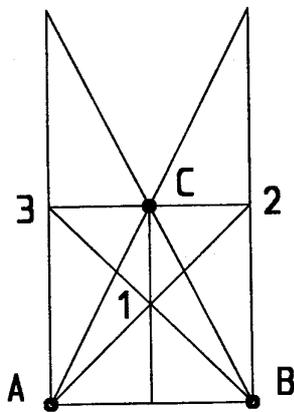


Abb. 4a

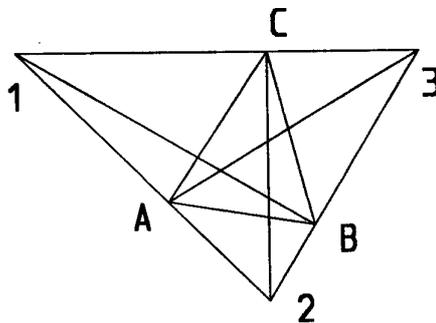


Abb. 4b

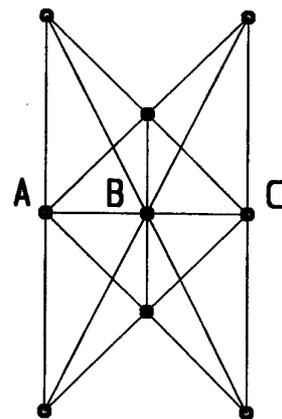


Abb. 5

## 0 Höchstzahl von Dreier-Reihen mit zehn Punkten

1) Ein Punkt kann nicht fünf Dreier-Reihen angehören, denn  $5 \cdot 2 + 1 = 11 > 10$ .

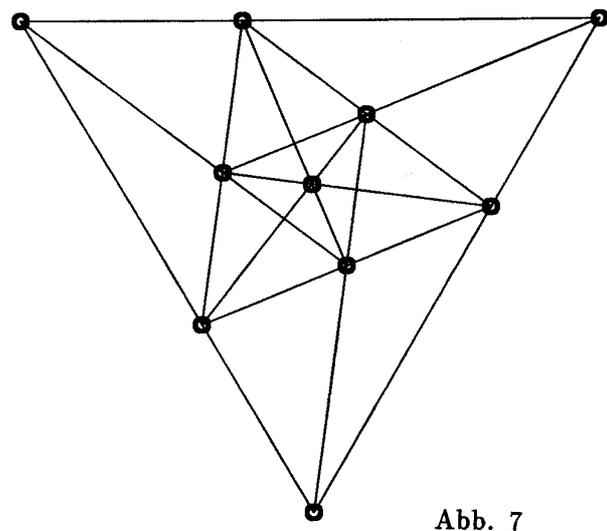
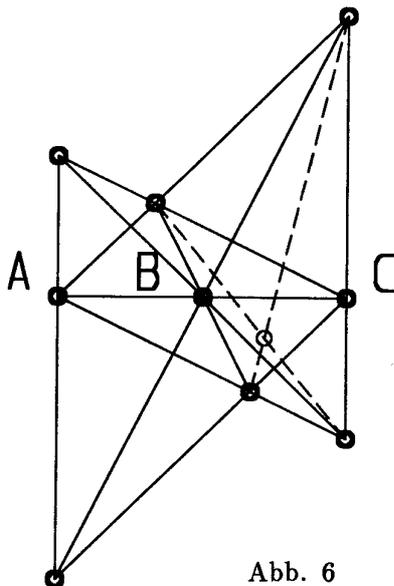
2) Nicht jeder der zehn Punkte kann zu vier Reihen gehören, denn die Abzählung der Reihen ergäbe dann:  $10 \cdot 4 : 3 = 13 + 1/3$  !

3) Könnte jeder von neun Punkten zu vier Reihen gehören ? Dann müßte der zehnte Punkt zu drei Reihen gehören, damit die Strukturformel für die Anzahl der Reihen eine ganze Zahl ergibt, nämlich  $(9 \cdot 4 + 1 \cdot 3) : 3 = 13$  . Ob eine dazu passende Anordnung wirklich möglich ist, werden die weiteren Überlegungen zeigen. Der nur drei Reihen angehörende Punkt heiße *A*. Auf diesen drei Reihen liegen außer *A* noch  $3 \cdot 2 = 6$  von den zehn Punkten. Ohne den Punkt *A* ist die Zahl der Reihen um drei kleiner und aus sechs Viererpunkten werden Dreierpunkte. Somit gibt es jetzt drei Vierer- und sechs Dreierpunkte, die zehn Reihen bilden, die mit neun Punkten mögliche Höchstzahl an Reihen. Die drei Viererpunkte bilden daher ein Reihe und jede der neun übrigen Reihen enthält genau zwei von diesen sechs Dreierpunkten. Soll ein zehnter Punkt weitere Reihen erzeugen, so kommt dafür nur ein Diagonalepunkt eines aus Dreierpunkten bestehenden vollständigen Vierecks in Frage. Aus den vier Dreierpunkten dieses Vierecks können so Viererpunkte gemacht werden (Abb. 6), sodass die Strukturformel  $(7 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) : 3 = 12$  Reihen ergibt. Mit zehn Punkten sind daher nicht mehr als 12 Reihen möglich.

Bei zehn Punkten gibt es nur *eine* Strukturformel mit acht Viererpunkten, die eine ganze Zahl liefert, nämlich  $(8 \cdot 4 + 2 \cdot 2) : 3 = 12$ . Eine dazugehörige Anordnung gibt es aber nicht: Wird hier nämlich ein Punkt weggelassen, der nur zu zwei Reihen gehört, dann werden vier Punkte um eine Reihe ärmer. Sogar wenn das alles Viererpunkte sind, gibt es dann immer noch vier Viererpunkte, das ist bei insgesamt nur neun Punkten nicht möglich (da können es ja nur drei Viererpunkte sein).

Auch mit sieben Viererpunkten gibt es nur *eine* Strukturformel mit einem ganzzahligen Ergebnis:  $(7 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2) : 3 = 12$ . Wie eine dazu passende Anordnung (Abb.6) gefunden werden kann, wurde vorhin beschrieben.

Strukturformeln mit sechs Viererpunkten liefern ein Resultat kleiner als zwölf, mit einer Ausnahme:  $(6 \cdot 4 + 4 \cdot 3) : 3 = 12$ . Die Abbildung 7 zeigt eine dazugehörige Anordnung von zehn Punkten, die besonders interessant ist, weil sie aus drei gleichseitigen Dreiecken und dem gemeinsamen Schwerpunkt besteht. (Die Seiten des größten Dreiecks werden dabei harmonisch geteilt.) Hier kann nicht durch Wegnahme eines Punktes eine Figur mit zehn Dreierreihen entstehen und auch nicht durch Hinzufügen eines Punktes die Höchstzahl an Reihen für elf Punkte erzielt werden.



# 1 Dreier-Reihen mit elf Punkten

Bilden elf Punkte die mögliche Höchstzahl an Dreier-Reihen, so kann es dabei nicht vier Fünferpunkte A,B,C,D geben. Das kann so erklärt werden: Das Diagonaldreieck des vollständigen Vierecks ABCD muß von drei der elf Punkte gebildet werden, wenn möglichst viele Reihen vorhanden sein sollen. Damit gibt es mit diesen sieben Punkten sechs Dreierreihen (Abb. 8) und jeder der Punkte A,B,C,D gehört zu dreien davon, braucht also noch zwei Reihen. Diese viermal zwei Reihen müssten von den vier restlichen Punkten gebildet werden. Die vier restlichen Punkte müssten also durch A, durch B, durch C und D je zwei von ihren sechs Verbindungsgeraden schicken. Das können sie aber nur für drei Punkte tun, für die drei Punkte ihres Diagonaldreiecks.

Es kann daher höchstens drei Fünferpunkte geben. Die Abbildung 9 zeigt die Verwirklichung der dazupassenden Strukturformel  $(3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 2 \cdot 3) : 3 = 15$ . Bei anderen Strukturformeln mit drei Fünferpunkten ist das Resultat (die Zahl der damit berechneten Reihen) nicht ganzzahlig oder kleiner als fünfzehn.

Bei zwei Fünferpunkten und auch bei nur einem kann es fünfzehn Reihen als Resultat der Strukturformel je einmal geben, aber die Realisierung ist nicht möglich: Wird bei der durch die Formel  $(2 \cdot 5 + 8 \cdot 4 + 1 \cdot 3) : 3 = 15$  vorgegebenen Struktur ein Dreierpunkt weggenommen, können höchstens sechs Vierer- und vier Dreierpunkte übrig bleiben und zu der dazugehörigen Strukturformel  $(6 \cdot 4 + 4 \cdot 3) : 3 = 12$  zeigt Abb. 7 die (wahrscheinlich einzige) Verwirklichung. Aber es gibt hier keine Möglichkeit einen Punkt hinzuzufügen, so dass fünfzehn Reihen entstehen könnten. Wird bei der durch die Formel  $(1 \cdot 5 + 10 \cdot 4) : 3 = 15$  gegebenen Struktur der Fünferpunkt weggenommen, bleiben zehn Reihen und zehn Punkte  $(10 \cdot 3) : 3 = 10$ . Das ist eine Desargue'sche Konfiguration (das Bild einer dreiseitigen Pyramide mit zwei Schnittdreiecken). Auch hier gibt es (wahrscheinlich) keinen Fünfstrahl auf dem alle zehn Punkte der Konfiguration liegen. Wird ein Viererpunkt weggenommen, vermindert sich die Zahl der Reihen um vier auf elf  $(3 \cdot 4 + 7 \cdot 3) = 11$ . Auch das ist wenig für zehn Punkte.

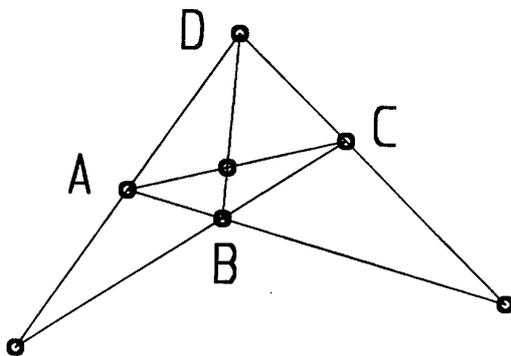


Abb. 8

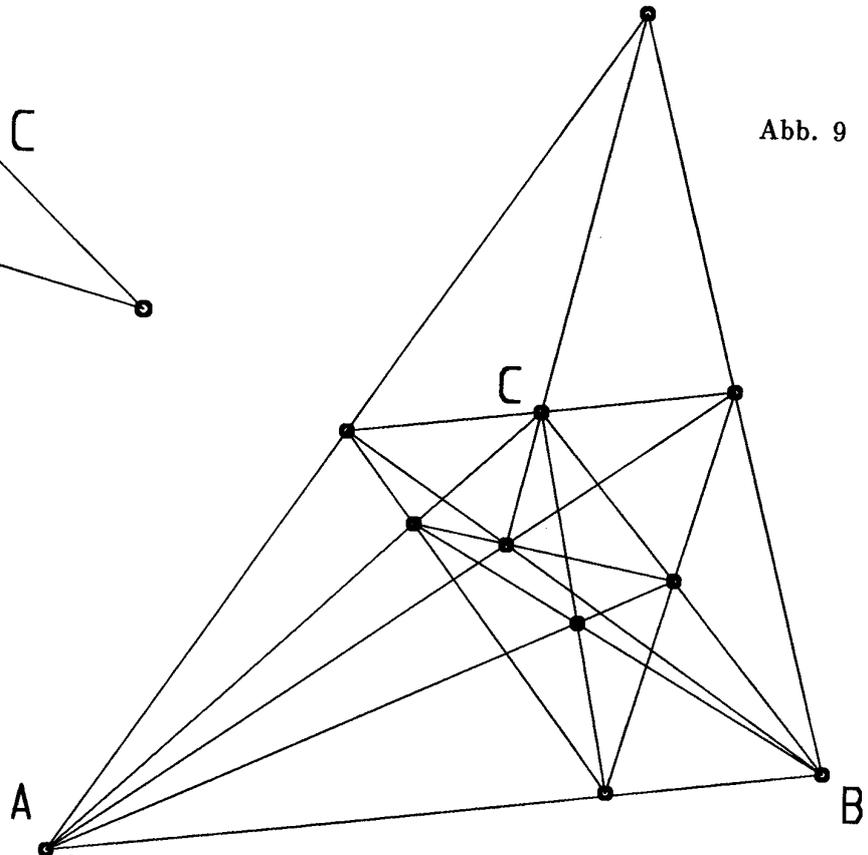


Abb. 9

## Dreier-Reihen mit zwölf Punkten

Ein Punkt kann zu fünf aber nicht mehr Reihen gehören. Es soll von der Annahme ausgegangen werden, dass jeder der zwölf Punkte fünf Reihen angehört, sodass  $(12 \cdot 5) : 3 = 20$  Reihen vorhanden sind. Zu jedem Punkt gibt es dann genau einen anderen, mit dem er nicht durch eine Reihe verbunden ist.

Werden zwei solche (nicht durch eine Reihe verbundene) Punkte weggenommen, bleiben zehn Punkte übrig, die mitsammen zehn Reihen bilden sollten, wobei jeder der zehn Punkte an genau drei Reihen beteiligt sein müßte aber mit genau acht der neun übrigen durch Reihen verbunden sein sollte. Das widerspricht einander. Durch seine drei Reihen ist ja jeder der zehn Punkte nur mit genau sechs Punkten verbunden.

Mit zwölf Punkten können also nicht zwanzig Dreier-Reihen erzeugt werden, wohl aber neunzehn, wie die Abbildung 10 mit der Strukturformel  $(9 \cdot 5 + 3 \cdot 4) : 3 = 19$  zeigt.

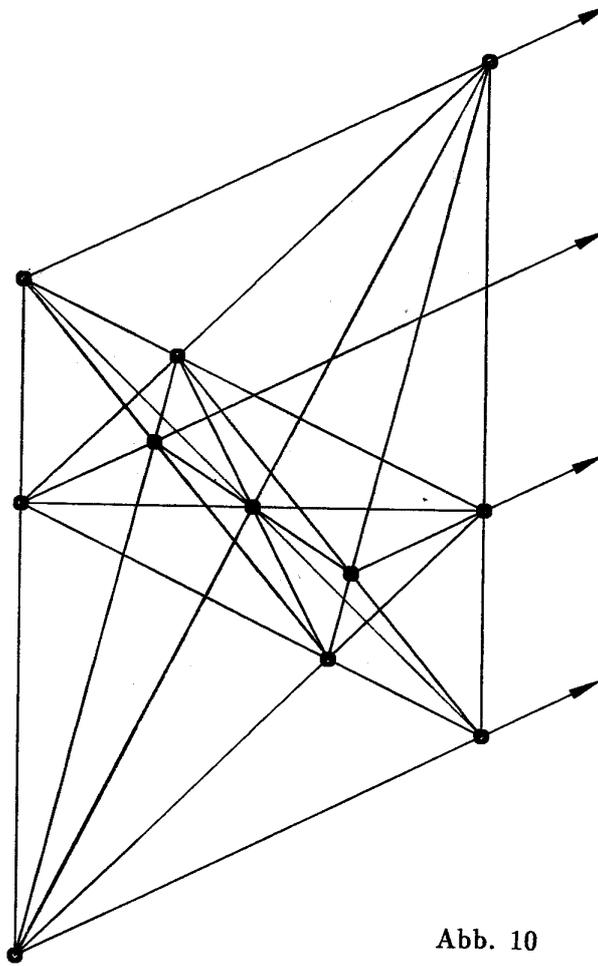


Abb. 10

## Gleichartige Aufgaben im Raum

Die Tabelle zeigt, wieviele Ebenen es höchstens geben kann, deren jede genau vier von  $n$  Punkten enthält, wobei keine drei der  $n$  Punkte in einer Geraden liegen.

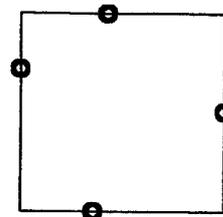
Anzahl der Punkte	4	5	6	7	8	...	n
Höchstzahl an Ebenen	1	1	3	6	12	...	?

#### 4 Weitere Rätsel

1) Ein Dreieck ABC ist gegeben. Zwei symmetrisch zu C liegende Punkte, einer genau so weit von A wie der andere von B entfernt, sind gesucht. Alle Lösungen sind anzugeben.

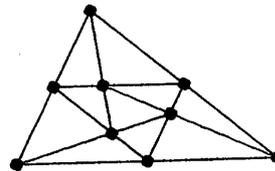
2) Von jeder Seite eines Quadrats ist ein Punkt gegeben. Das Quadrat ist möglichst einfach zu konstruieren.

Wieviele Lösungen kann die Aufgabe höchstens haben, wenn die gegebenen Punkte kein Quadrat bilden ?



3) Einem ersten Dreieck ist ein zweites eingeschrieben und diesem ist ein drittes so eingeschrieben, dass seine verlängerten Seiten durch die Ecken des ersten gehen.

Kann diese Figur mit dem Lineal allein gezeichnet werden ?



4) Faltaufgabe: Die numerierten Quadrate sind längs ihrer gemeinsamen Seiten so zu falten, dass sie in der angeschriebenen Reihenfolge hintereinander liegen.

1	8	2	7
4	5	3	6

5) Auf einer gezeichnet vorliegenden Geraden  $g$  ist ein Punkt  $A$  gegeben. Mit Zirkel und Lineal soll in  $A$  die Normale auf  $g$  festgelegt werden. Wieviele Konstruktionslinien sind dazu mindestens nötig ?