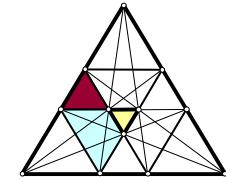




Das Werkzeug „Darstellende Geometrie“ in aktuellen geometrischen Forschungen

Gunter Weiß (Dresden, DE)



oder

Eine Auswahl von in Dresden behandelten Forschungsthemen, die u. U. österreichische Lehrer interessieren könnten.

Vorab-Bemerkung

„Das Problem mit ‚angewandten Problemen‘.“

- Effiziente Problemlösung erfordert meist universelles Geometrie- und Mathematikwissen, sowie Sachkenntnis im Anwendungsgebiet. Darstellende Geometrie allein genügt sicher nicht!
- Der geometrische Anteil an der Lösung besteht meist nur in der Bereitstellung einer *Lösungsidee* und ist im Verhältnis zum Gesamtaufwand vergleichsweise gering. Der Aufwand für ein benutzerfreundliches Software-Produkt muss zusätzlich erbracht werden, sonst zählt die Idee nicht.
- Die beigeussteuerte geometrische Idee wird – wenn man sie gefunden hat – leider selten wirklich als wissenschaftliche Großtat empfunden, obwohl sie den Schlüssel zur Problemlösung geliefert hat. Im Zusammenhang mit dem konkreten Problem als Ganzem ist sie aber u. U. wenigstens patentfähig.

„Das Problem mit ‚rein-geometrischen Problemen‘.“

- Der Stellenwert des Problems wird oft von der aktueller Mode und der Zugehörigkeit des Forschenden zu einer bestimmten, aktiven ‚Schule‘ diktiert. Oft scheint zu gelten: Je vorgetäuscht die Anwendbarkeit, desto anerkannter ist das Problem. (Beispiel „Vier-Farben-Problem“.)
- Rein-geometrische Probleme befriedigen in erster Linie die Neugier desjenigen, der sie behandelt.
- Rein-geometrische Probleme sind bequeme Probleme; der Forscher erfindet und behandelt sie aus seinem Wissenshintergrund heraus mit den ihm vertrauten Werkzeugen. Er kann das Problem nach Gutdünken vereinfachen und verallgemeinern.
- Manche rein-geometrische Probleme faszinieren durch innere Schönheit und die Eleganz der Lösung. Einige sind deshalb auch brauchbare ‚Übungsaufgaben‘ oder ‚Seminarthemen‘, weil sie mathematische Hintergründe aufdecken.

Vor diesem Hintergrund lässt sich das Thema in folgender Form modifizieren:

„Darstellende Geometrie“ als Werkzeug in angewandter und rein-geometrischer Forschung

Weil sowohl der vorangegangene Vortrag von Prof. Gläser und der anschließende von Prof. Pottmann sich mit modernen konkreten Anwendungen der Geometrie auseinandersetzen, will ich mich hier auf den eher *rein-mathematischen, darstellend-geometrischen Aspekt* beschränken. Dabei will ich folgende Aspekte der Darstellenden Geometrie in Erinnerung rufen, die in der Ausbildung von DG-Lehrern eine bedeutende Rolle gespielt haben:

- Der DG-Aspekt „*räumliche Deutung*“:
Interpretation ebener Sachverhalte als Projektionsergebnis von Raumobjekten.
- Der DG-Aspekt „*geschickte Aufstellung*“:
Zweckmäßige Darstellung räumlicher Sachverhalte in (ebenen) Bildern; d.h. Einsatz problemangepasster Abbildungsverfahren und Objekt-Positionierungen.
- Der DG-Aspekt „*Modellwechsel*“:
Übertragung des Problems in einen anderen geometrischen Schauplatz; d.h. Einsatz eines ‚Übertragungsprinzips‘. (Dies ist ein allgemeingeometrischer Aspekt.)
- Der DG-Aspekt „*Visualisierung*“:
Veranschaulichung von Raumobjekten und -sachverhalten zum Zweck tieferen Verständnisses oder zum Gewinnen von Theorem-Vermutungen durch Variantenkonstruktionen.

Ähnlich den klassischen „Tools“ der ebenen Elementargeometrie, wie z. B. dem Peripheriewinkelsatz, dem Strahlensatz und anderen, stellt auch die Darstellende Geometrie *Beweiswerkzeuge* zur Verfügung, (wie etwa den „Satz vom Normalriss eines rechten Winkels“) und ermöglicht so eine Auseinandersetzung mit räumlicher Elementargeometrie im Schulunterricht. Damit soll der Vortrag an jenen Aspekt der DG erinnern, der sie in die Nähe des Mathematikunterrichts rückt.

Beispiele

Der DG-Aspekt „räumliche Deutung“ am Beispiel *Ellipsenzirkel*

Die „klassischen“ Konstruktionen der Ellipse mittels der Papierstreifenmethode (vgl. Fig. 1) oder mittels des Kopp-Vollmer-Mechanismus (vgl. Fig. 2) ordnen sich einem einheitlichen Prinzip unter, wenn man sie in folgender Weise „räumlich deutet“:

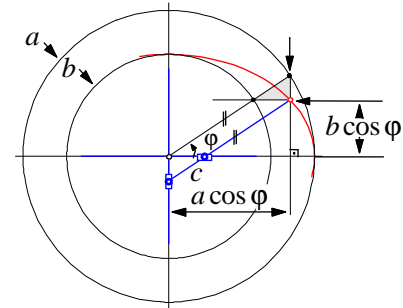


Fig. 1

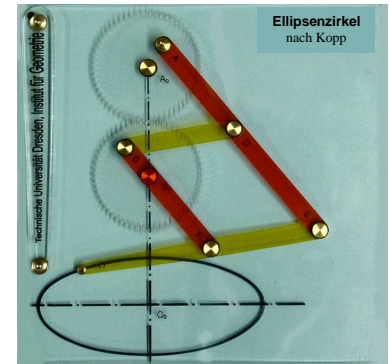


Fig. 2

Kennt man von einem Raumobjekt F zwei affine Risse F' , F'' in der Zeichenebene, dann entstehen aus diesen (nicht notwendig regulären) Rissen mittels des *Eckhart'schen Einschneideverfahrens* (vgl. Fig. 3) und mittels des *Hohenberg'schen Linearkombinationsverfahrens* (vgl. Fig. 4) weitere affine Risse.

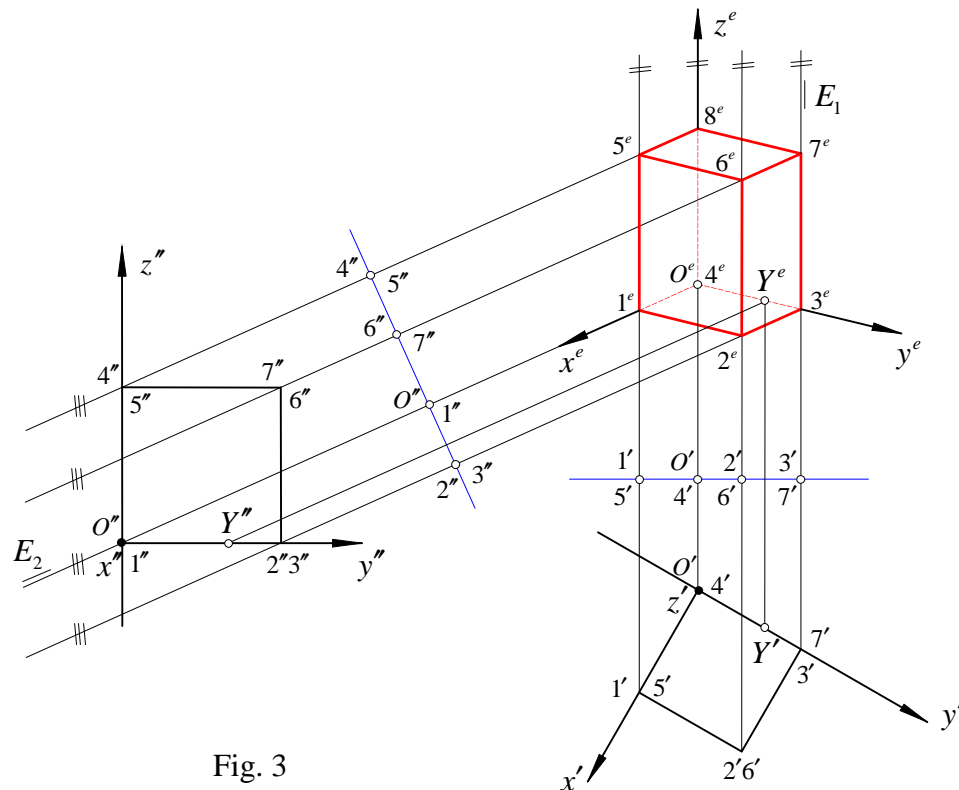


Fig. 3

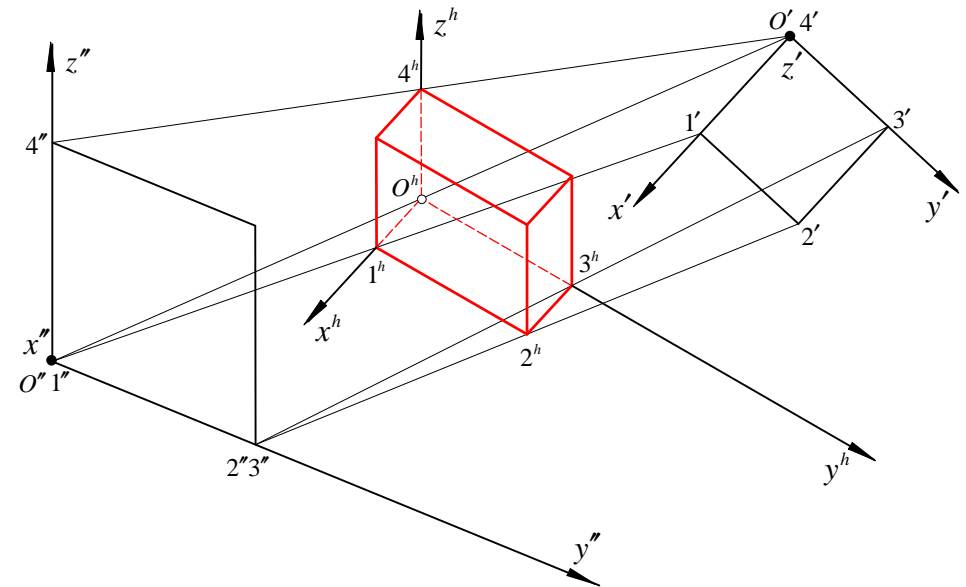


Fig. 4

Durchläuft ein Punkt X eine im Raum liegende Ellipse k , deren Auf- und Grundriss kreisförmig ist, so durchlaufen die Bilder $X' \in k'$, $X'' \in k''$ diese Bildkreise mit entgegengesetzt gleicher Winkelgeschwindigkeit. Ein Punkt C auf der Verbindungsgeraden $X'X''$, der mit X' und X'' festes Teilverhältnis $\text{TV}(C, X', X'') = \lambda$ bildet, kann dann nach Hohenberg als Schrägriss X^h von X aufgefasst werden und durchläuft daher eine Ellipse k^h (vgl. Fig. 5).

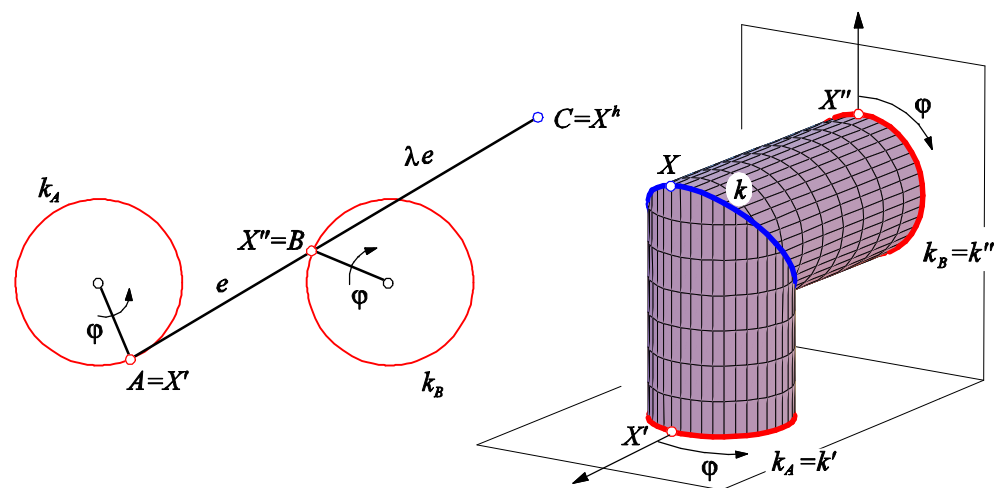


Fig. 5

Wird k im Raum als Kreis in einer Profilebene aufgefasst, so sind dessen Risse Strecken. Die Bildpunkte X' und X'' eines Kreispunktes $X(\varphi)$ haben vom jeweiligen Bild des Mittelpunktes M von k die Abstände $r' \cdot \cos \varphi$ bzw. $r'' \cdot \sin \varphi$. Teilt man die Strecken $[X', X''](\varphi)$ mit festgewähltem Teilverhältnis λ , so durchläuft der Teilungspunkt C nach Hohenberg eine Ellipse (vgl. Fig. 6).

Legt man dabei insbesondere die (in gleichem Maßstab vorliegenden) Bildstrecken k' und k'' so in die Bildebene, dass sie zueinander normal sind und ihre Mitten M' und M'' zusammenfallen, so hat $[X', X''](\varphi)$ feste Länge. Das feste Teilverhältnis λ erzeugt daher einen auf der Strecke $[X', X''](\varphi)$ festliegenden Teilungspunkt C , der somit sowohl im Sinne von Hohenberg als auch nach der bekannten Papierstreifenkonstruktion (vgl. Fig. 1) eine Ellipse durchläuft.

Es versteht sich von selbst, dass die bekannte, zwei perspektive Affinitäten benutzende De la Hire–Konstruktion einer Ellipse im Sinne von Eckart als Einschneideergebnis aufgefasst werden kann, wobei die beiden Scheitelkreise zwei affine Bilder einer im Raum liegenden Ellipse zu deuten sind (vgl. Fig. 1).

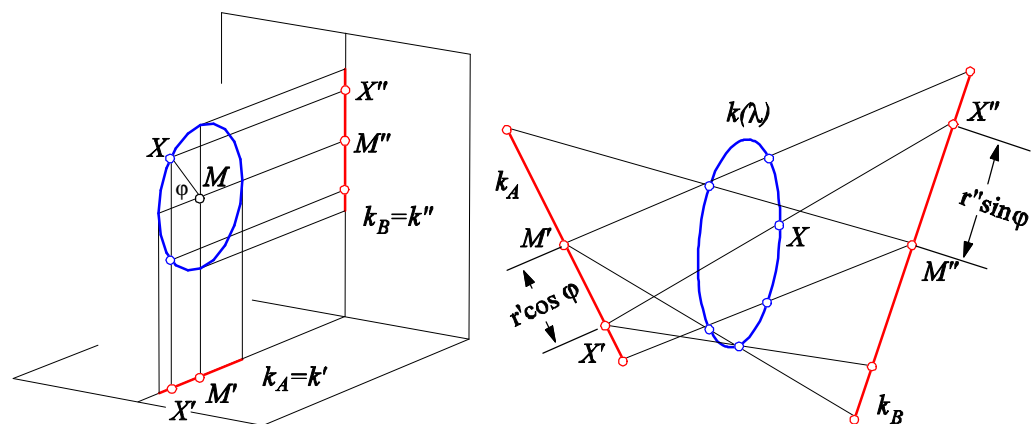


Fig. 6

Der DG-Aspekt „geschickte Aufstellung“ am Beispiel *Tetraederhöhenregulus*

Der Begriff „Geschickte Aufstellung“ meint *nicht primär* eine spezielle Lage des Objektes zum gewählten Koordinatensystem, sondern die Wahl zweckmäßiger Abbildungsverfahren. In solchen lassen sich dann die Bildebenen unter Umständen auch als Koordinatenebenen auffassen.

Ein Tetraeder T wird in diesem Sinne zweckmäßig normal auf eine seiner Facettenebenen projiziert. Hierdurch unterscheiden wir die drei *Basis-ecken* A, B, C des Tetraeders von der vierten Ecke D , die fortan als *Pyramidenspitze* fungiert, wobei wir die Vorstellung einer horizontalen Basis-ebene haben und die Normalprojektion auf diese als *Grundrissabbildung* auffassen.

Die Tetraederhöhe h_D durch D ist projizierend, während die durch die Basis-ecken gehenden Höhenggeraden wegen des „Satzes vom Normalriss eines rechten Winkels“ in die elementaren Dreieckshöhen des Basisdreiecks projizieren (vgl. Fig. 7). Somit sind h'_A, h'_B, h'_C kopunktal mit dem Höhenschnittpunkt H_D des Basisdreiecks (A, B, C) .

Wir unterscheiden nun die Fälle (a) $D' = H_D$ und (b) $D' \neq H_D$.

- (a) Im ersten Fall wird h_D von allen anderen Höhen getroffen. Durch Ändern der Aufstellung machen wir etwa A zur Pyramidenspitze und (B, C, D) zum Basisdreieck, auf das normalprojiziert werden soll. Da h_D von allen übrigen Höhen getroffen wird und die Treffpunkte speziell mit h_B und h_C (mit dem Höhenschnittpunkt H_A von (B, C, D)) zusammenfallende Bilder haben, also auch im Raum zusammenfallen, müssen alle vier Höhen durch ein und denselben Treffpunkt gehen, der dann als Höhenschnittpunkt H von T anzusprechen ist (vgl. Fig. 8).

Den Satz vom Normalriss eines rechten Winkels erneut benutzend, lesen wir aus dem Grundriss noch folgendes ab:

- Fällt der Grundriss von D auf *genau eine* der Basisdreieckshöhen, etwa h_A , so schneiden einander die Höhenggeraden h_A und h_D und die Tetraederkanten AD und BC sind orthogonal (vgl. Fig. 9). Dann liegen die zu AD sicher normalen Höhenggeraden h_B und h_C ebenfalls in einer Ebene und sind daher gleichfalls schneidend (vgl. Fig. 9 und 10). Die Schnittpunkte schneidender Höhenpaare sind dabei verschieden! (Ihre Grundrisse fallen in D' und in H_D .)
- Besitzt T *zwei* Paare orthogonaler Gegenkantenpaare, so fällt der Grundriss von D in den Höhenschnittpunkt H_D des Basisdreiecks und alle drei Paare von Gegenkanten von T sind orthogonal. Genau dann also besitzt T einen Höhenschnittpunkt (vgl. Fig. 8).

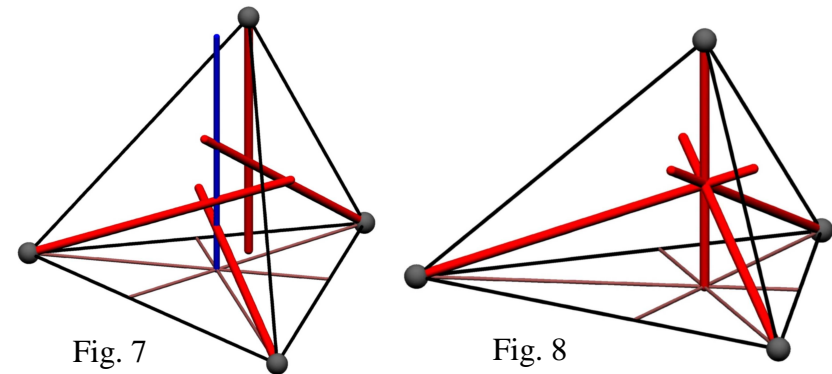


Fig. 7

Fig. 8

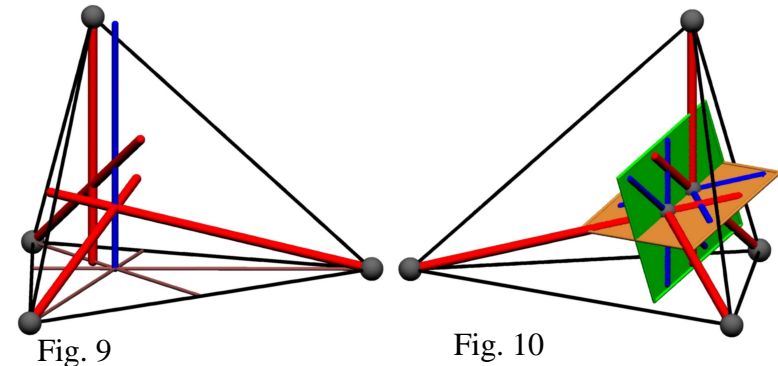


Fig. 9

Fig. 10

(b) Im zweiten Fall dürfen wir also annehmen, dass T kein Paar orthogonaler Gegenkanten besitzt. Dann ist h_D parallel zu einer erstprojizierenden Treffgeraden g_D durch den Höhenschnittpunkt H_D des Basisdreiecks (vgl. Fig. 7). In „projektiv-geometrischer Sprechweise“ trifft g_D daher alle vier Höengeraden von T . Durch Ändern der Aufstellung machen wir hintereinander A, B, C zur Pyramidenspitze und folgern so die Existenz von vier verschiedenen Treffgeraden g_A, \dots, g_D der Tetraederhöhen. Der nicht elementare Schluss, dass damit alle 4 Höengeraden auf einem Hyperboloid Φ liegen müssen, wird so plausibel: Die Treffgeraden von drei windschiefen Geraden erfüllen bekanntlich eine Erzeugendenschar auf einem einschaligen Hyperboloid oder einer HP-Fläche Φ . Soll eine 4. Gerade ebenfalls getroffen werden, so ist diese mit Φ zu schneiden, denn nur durch einen solchen Schnittpunkt kann eine alle vier Geraden treffende Erzeugende existieren. Es kann somit i. Allg. höchstens zwei Treffgeraden aller 4 Geraden geben, es sei denn, die 4. Gerade liegt ebenfalls auf Φ und wird dann von allen Erzeugenden der einen Schar getroffen. Somit gilt also:

- Besitzt T kein Paar orthogonaler Gegenkanten, so sind die vier Höengeraden von T windschief und gehören einem einschaligen Hyperboloid Φ an (vgl. Fig. 11). (Eine HP-Fläche Φ scheidet aus, weil die vier Höengeraden von T keine gemeinsame Richtebeane haben können.)

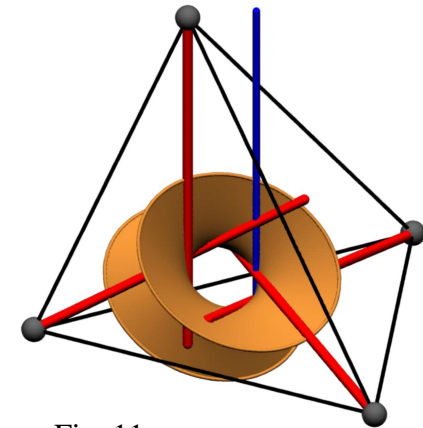


Fig. 11

Anmerkung: Neben den üblichen Tetraederhöhen kann man auch die sogenannten „Kantenhöhen“, also die Gemeinnormalen windschiefer Kantenpaare von T betrachten. Für ihre konstruktive Festlegung erweist sich eine Zentralprojektion (Perspektive) aus der Pyramidenspitze D auf die Basis-ebene ABC als zweckmäßigstes Abbildungsverfahren.

Der DG-Aspekt „Modellwechsel“ am Beispiel Zyklographie

Von den vielen *Übertragungsprinzipien*, mit denen Geometrie-Studierende vertraut gemacht werden, ist das der *Zyklographie* ein auch für Schüler leicht zugängliches Prinzip:

Jeder Kreis p der Bildebene π wird als Distanzkreis von zwei bezüglich π symmetrisch liegenden Punkten aufgefasst. Eindeutigkeit der Zuordnung wird üblicherweise dadurch hergestellt, dass man zu p noch die beiden möglichen Drehsinne hinzufügt und das Paar $(p, \text{eine Orientierung von } p)$ den Bildzykel p^z eines π nicht angehörenden Punktes P nennt.

Es würde zu weit führen, wenn an dieser Stelle eine detaillierte Einführung in die konstruktive Behandlung der Zyklographie erfolgen würde. (Diese konstruktive Behandlung verwendet im Wesentlichen Perspektive und kotierte Projektion als den zwischen π und dem Punktraum vermittelnden Abbildungsverfahren.)

Bemerkung: Schüler sollten nach Meinung des Autors durchaus die Erfahrung machen, dass Punkte nicht immer auf Punkte abgebildet werden müssen und dass der ganze Punktraum und die ebene Zykelmengewechselseitig füreinander „Modell“ sind.

Anmerkung: Die (euklidische) Tangentialentfernung zweier Zyklen überträgt sich in den Punktraum als pseudoeuklidischer Abstand der zugehörigen Raumpunkte. Hierdurch wird die Brücke zur geometrischen Visualisierung einer physikalischen Welt aus zwei Raumdimensionen und einer Zeitdimension geschlagen, in welcher z. B. die lichtartigen (geradlinigen) Weltlinien eben als die unter 45° geböschten Geraden erscheinen.

Der DG-Aspekt „Visualisierung“ am Beispiel Schattengrenzen

Wie bei der Übertragung physikalischer Sachverhalte in geometrische Sachverhalte (siehe obige Anmerkung) und deren zweckmäßiger Visualisierung, unterstützen („richtige“) Bilder von geometrischen Raumobjekten die Vorstellung von diesen. Die Anfertigung von Freihandskizzen und am Bildschirm beweglichen „3D-Modellen“ (!) dient allein diesem Zweck. Daneben sind „gute“ Visualisierungen ein effektives Mittel zur Kommunikation räumlicher Sachverhalte, wie das folgende Beispiel verdeutlichen soll:

Bekanntlich ist die Tangente t an die Eigenschattengrenze e einer Fläche Φ zum Lichtstrahl l konjugiert. Die übliche Konstruktion von t beruht daher auf der Festlegung der Involution konjugierter Flächentangenten im Schattengrenzenpunkt P . Diese Involution stimmt mit der Involution konjugierter Durchmesser der Dupin'schen Indikatrix von P überein, so dass die Konstruktion von t auf differentialgeometrischen Begriffsbildungen 2. Ordnung fußt.

Eine andere Überlegung benützt die *Normalenfläche* Ψ längs der zunächst nur punktwise bestimmten Schattengrenze e , Fig. 12. Beherrscht man in drei Punkten einer Regelflächenerzeugenden n die Tangentialebene, so bekanntlich in allen Punkten. (Das Doppelverhältnis von 4 Punkten stimmt mit demjenigen der Tangentialebenen überein, so dass die Vervollständigung der „Berührprojektivität“ durch Doppelverhältnisübertragung geschieht und daher eine lineare Aufgabe ist.) Die Normalenfläche Ψ ist eine Regelfläche mit einer zu l normalen Richtebene, so dass zwei weitere Erzeugendenpunkte mit bekannter Tangentialebene die Berührprojektivität festlegen. Damit kann t dann als Schnitt der Tangentialebenen von Φ und Ψ in P gefunden werden (vgl. Fig. 12).

Insbesondere für eine Torusfläche Φ treffen die Erzeugenden von Ψ einerseits die Torusachse und andererseits den Mittenkreis. Also liegen die benötigten Angaben für die (lineare) Konstruktion der Schattengrenzentangenten vor (vgl. Fig. 13) und Ψ entpuppt sich als Konoid 4. Grades.

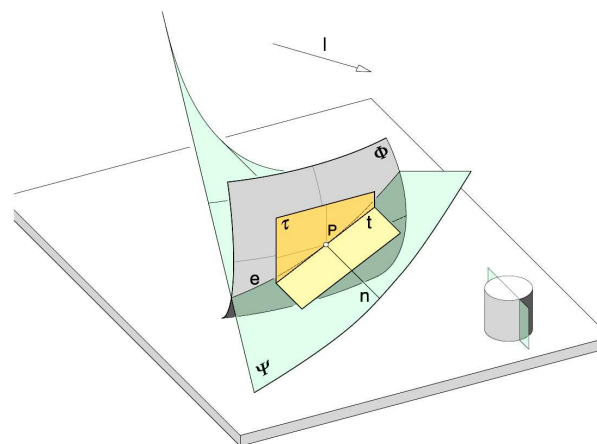


Fig. 12

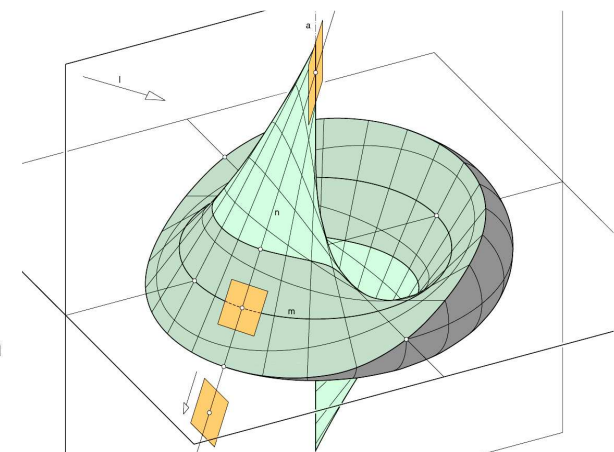
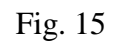
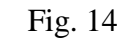


Fig. 13

Anmerkung: Obige Überlegungen lassen sich auf zahlreiche Flächenklassen und sogar auf Zentralbeleuchtung ausdehnen (vgl. Fig. 15) und waren Gegenstand einer Dissertation zum Themengebiet „Konstruktive Geometrie“.



Schlussbemerkung

Die Figuren und Beispiele sind folgenden Literaturstellen entnommen:

Fig. 1 bis 6: Weiß, G.: Räumliche Deutungen von Ellipsenkonstruktionen. IBDG 2/1998.

Fig. 7 bis 11: Havlicek, H.; Weiss, G.: Altitudes of a Tetrahedron and Traceless Quadratic Forms. (erscheint in American Mathematical Monthly).

Weiss, G.; Havlicek, H.: Ecken- und Kantenhöhen im Tetraeder. KoG.6-2001/02.

Fig. 12 bis 15: Lordick D.: Konstruktion von Schattengrenzen krummer Flächen, mit Hilfe von Begleitflächen. Dissertation, Shaker Verlag Aachen, 2001.