Inversion an Kegelschnitten mit CINDERELLA

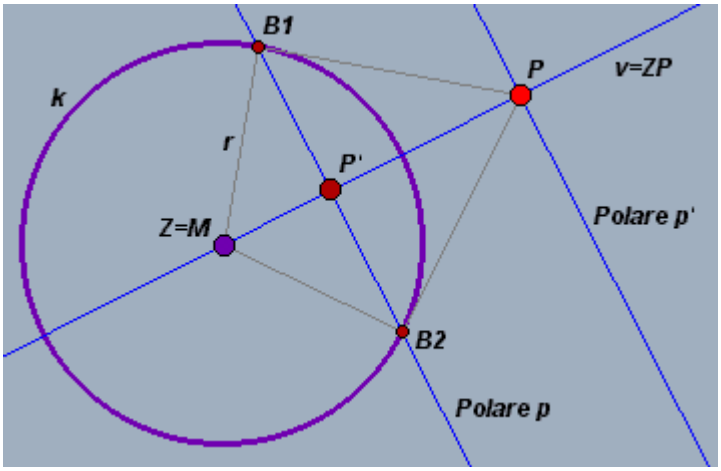
Hermann Vogel, TU-München

In diesem Vortrag wird aufgezeigt, wie man mit Hilfe des Programms CINDERELLA die bekannte Inversion am Kreis auf die Inversion an Kegelschnitten in der projektiven Ebene verallgemeinern und deren Eigenschaften untersuchen kann, vgl. auch www-m10.ma.tum.de/~vogel/Vortraege/Inversion/Inversion.html.

Inversion am Kreis k(M,r)

Die Inversion am Kreis k ist bekanntlich die Abbildung, die jedem Punkt P außerhalb des Kreises den Höhenfußpunkt P' des rechtwinkligen Dreiecks MPB1 zuordnet. Dabei ist B1 der Berührpunkt einer Tangente von P an den Kreis k. Nach dem **Kathetensatz** gilt dann für die Strecken: **MP*MP' = r²**.

Ordnet man umgekehrt dem Punkt P' innerhalb des Kreises wieder den Punkt P als Bildpunkt zu, so erhält man für P ≠ M eine bijektive involutorische Abbildung der euklidischen Ebene, deren Fixpunkte auf dem Kreis k liegen. Den Mittelpunkt M bezeichnet man auch als Inversionszentrum Z.



Aus Symmetriegründen liegt P' auf der Verbindungsgeraden der Berührpunkte B1, B2 der beiden Tangenten von P an den Kreis k. Die Gerade B1B2 ist die Polare p von P bezüglich des Kreises k. Somit kann man die Inversion für P ≠ Z deuten als Abbildung:

$$\mathbf{P \rightarrow P' = v \cap p} \quad \text{mit v = ZP und der Polaren p von P bezüglich k.}$$

Dass die Inversion am Kreis k: $x^*x = r^2$ (M Ursprung des xy-Koordinatensystems) für P ≠ Z bijektiv und involutorisch ist, zeigt bei dieser Deutung der **Hauptsatz der Polarentheorie:**

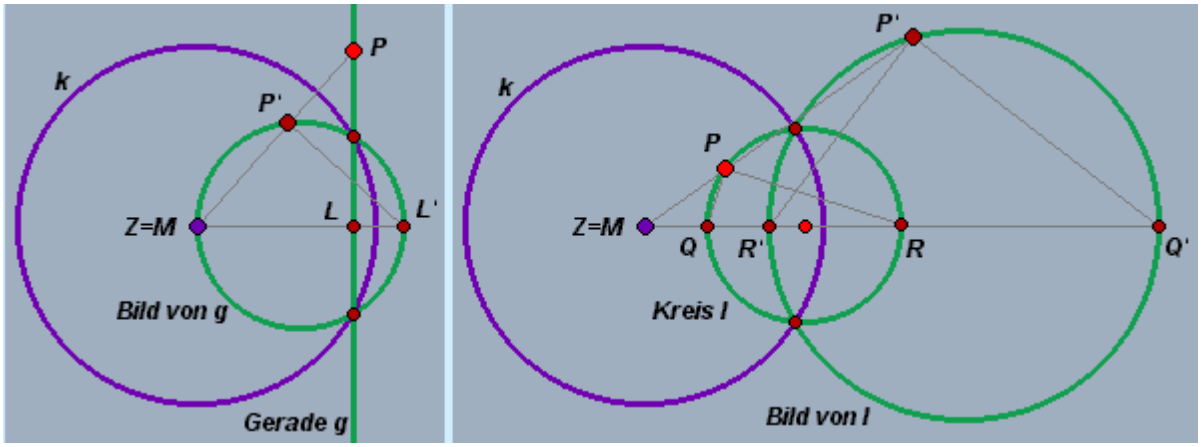
$$\mathbf{P' \in p} : p^*x = r^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P \in p'} : p'^*x = r^2.$$

Aus der Polarentheorie folgt unmittelbar: $P = P' \in p \Leftrightarrow p^*p = r^2 \Leftrightarrow P \in k$, d.h. alle Fixpunkte liegen auf dem Inversionskreis k. Die Polare eines Punktes des Kreises k ist die Kreistangente in diesem Punkt.

CINDERELLA bietet ein Tool zur Konstruktion der Polaren zu einem Punkt und umgekehrt zur Konstruktion des Pols zu einer Geraden bezüglich eines Kegelschnitts. Mit Hilfe der Polaren kann man die Tangenten von einem Punkt an einen Kegelschnitt einfach konstruieren.

Eigenschaften der Inversion am Kreis

Die Inversion am Kreis ist kreistreu, d.h. das Bild einer Geraden oder eines Kreises ist eine Gerade oder ein Kreis.



Insbesondere gilt:

- Die Geraden durch Z sind Fixgeraden.
- Das Bild einer Geraden, die Z nicht enthält, ist ein Kreis durch Z und umgekehrt.
- Das Bild eines Kreises, der Z nicht enthält, ist ein Kreis, der Z nicht enthält.

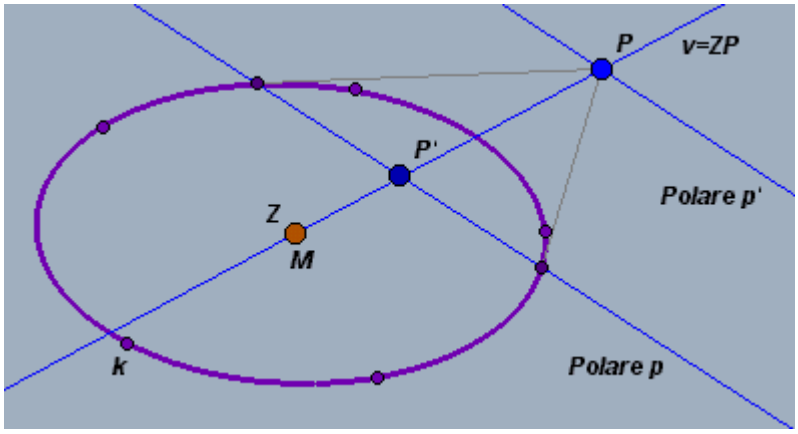
Diese Aussagen lassen sich leicht elementargeometrisch beweisen.

Mit CINDERELLA kann man Applets für HTML-Seiten erzeugen, in denen zum einen der Betrachter der Seite die Figur verändern kann, z.B. den Punkt P auf der Geraden g verschieben oder die Lage von g so verändern, dass sie den Punkt Z = M enthält. Zum anderen kann das Applet auch animiert dargestellt werden, z.B. der Punkt P den Kreis l durchlaufen.

Inversion an Kegelschnitten und deren Ausnahmemenge

Ersetzt man nun den Inversionskreis durch einen (nichtentarteten) Kegelschnitt k: $x^T E x = 0$ (in homogenen Koordinaten x), so kann man in der projektiv erweiterten euklidischen Ebene folgende Abbildung untersuchen:

$\mathbf{P \rightarrow P' = v \cap p}$ mit v = ZP und der Polaren p von P bezüglich k.

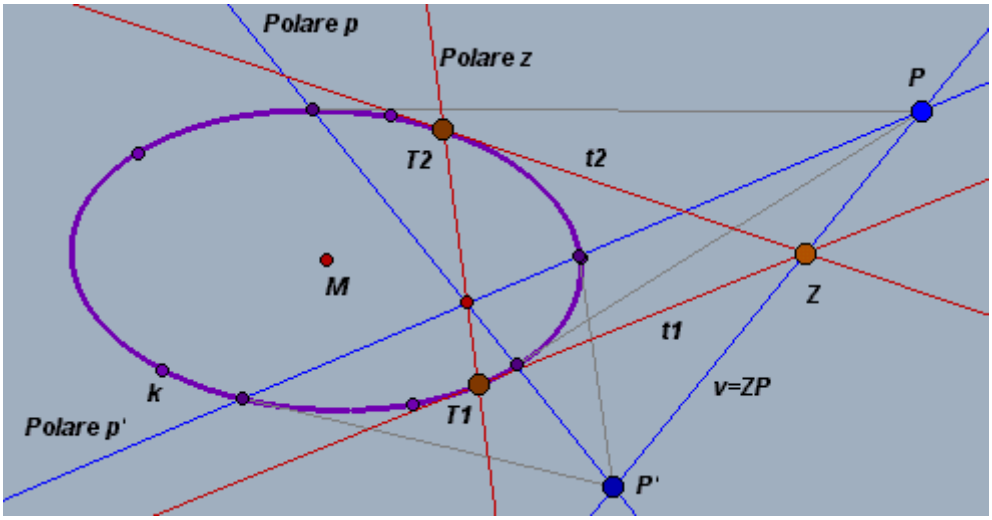


Mit Hilfe des

Hauptsatzes der Polarentheorie: $\mathbf{P' \in p} : p^T E x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P \in p'} : p'^T E x = 0$

erhält man für Z innerhalb von k, dass die Abbildung für P,P'≠Z bijektiv und involutorisch ist.

Bei der Frage, welche Punkte P auf P' = Z abgebildet werden, liefert **(HP)** die Polare z von Z bezüglich k. Diese ist für Z = M die Ferngerade.



Wählt man Z außerhalb von k, so versagt die Konstruktion der Bildpunkte auch für die Berührpunkte T1, T2 der beiden Tangenten t1, t2 von Z an k, da z.B. die Polare von T1 mit der Geraden v = ZT1 = t1 zusammenfällt.

Die Punkte der Tangenten t1, t2 ohne die Ausnahmepunkte Z, T1, T2 werden jeweils auf T1 bzw. T2 abgebildet, da nach **(HP)** z.B. die Polare eines Punktes von t1 deren Pol T1 enthält. Es gilt somit:

Die Inversion am (nichtentarteten) Kegelschnitt k: P → P' = v ∩ p ist bijektiv und involutorisch, wenn P nicht in der Ausnahmemenge A := {{Z, T1, T2} ∪ z ∪ t1 ∪ t2} liegt. Die Punkte Z, T1, T2 besitzen keine Bilder, jedoch die Geraden z, t1, t2 als Urbilder.

Aus der Polarentheorie folgt unmittelbar: P = P' ∈ p ⇔ $p^T E p = 0$ ⇔ P ∈ k, d.h. alle Fixpunkte liegen auf dem Inversionskegelschnitt k.

Bild einer Geraden bei Inversion an Kegelschnitten

Die analytische Betrachtung der Inversion am Kegelschnitt k: $x^T E x = 0$ zeigt, dass eine quadratische Abbildung vorliegt. Man erhält für das Bild P' von P:

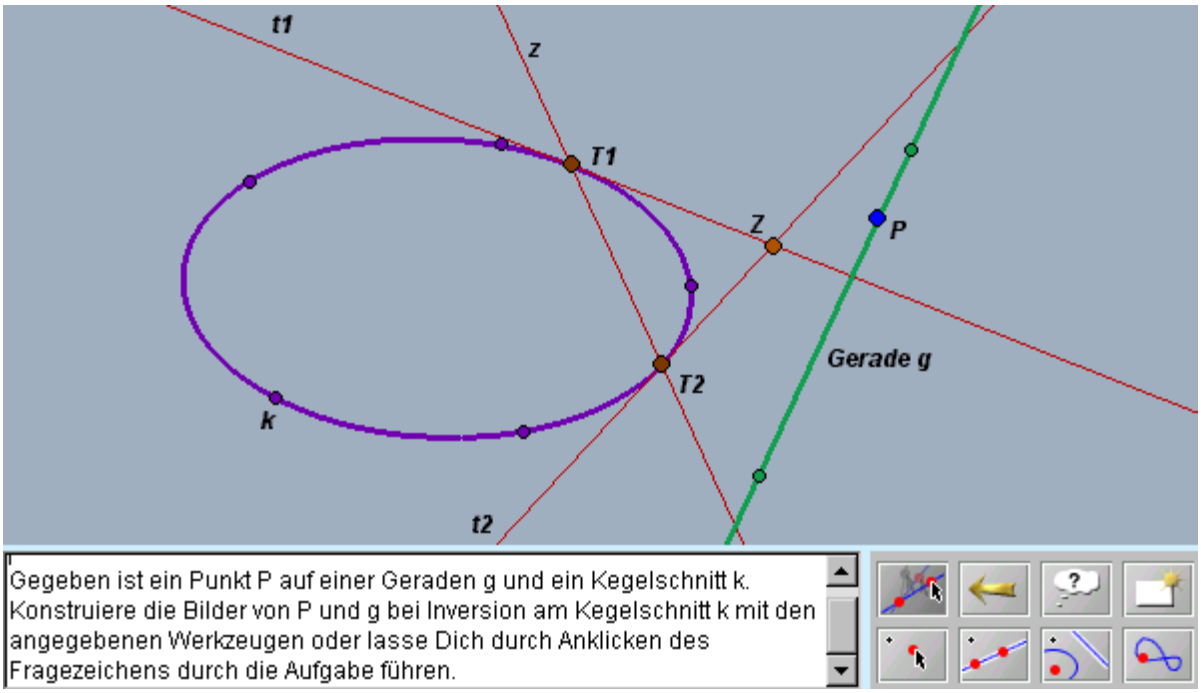
$$p' = (p^T E z)\, p - (p^T E p)\, z \quad \text{als Linearkombination von } p \text{ und } z \text{ mit } p'^T E p = 0$$

und für das Urbild P* von P aufgrund der Involution: $p = (p^{*T} E z)\, p^* - (p^{*T} E p^*)\, z$.

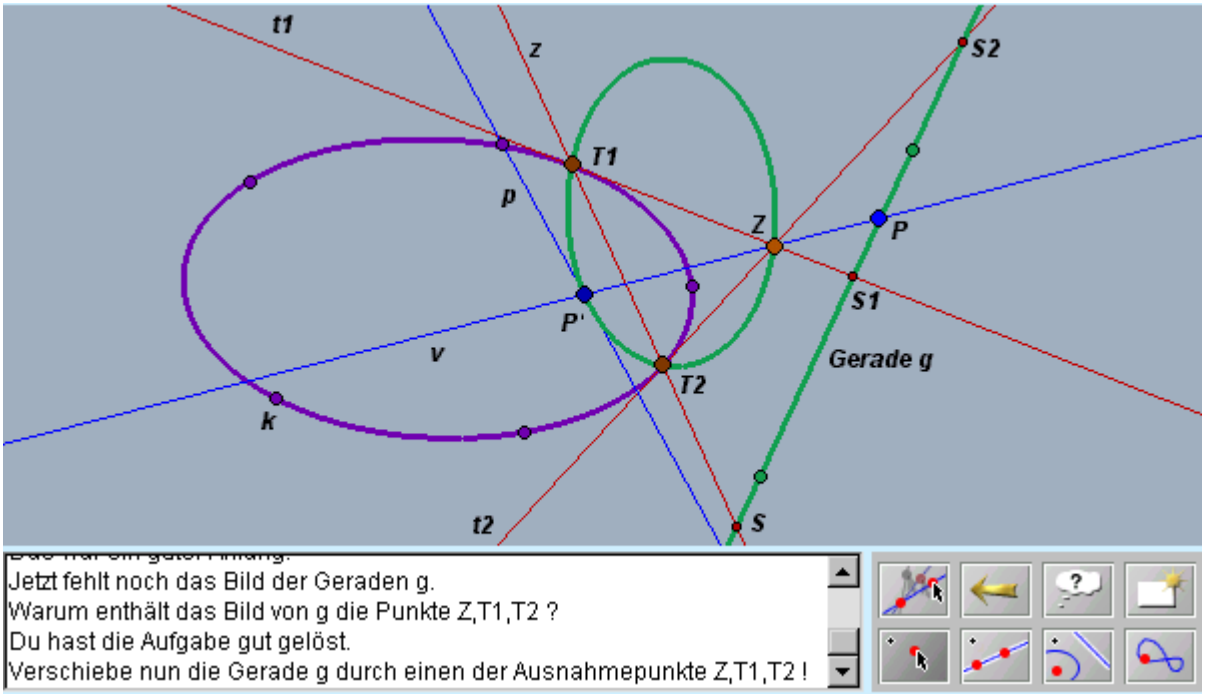
Geht man nun der Frage nach, was das Bild einer Geraden g: $g^T x = 0$ ist, so erhält man nach Einsetzen der Abbildungsgleichung, dass das Urbild der Geraden g ein eventuell entarteter Kegelschnitt g* ist. Da die Inversion mit Ausnahme der Ausnahmemenge A involutorisch ist, folgt: Das Bild g' der Geraden g liegt auf dem Kegelschnitt g*.

Wie man diese Aussagen konstruktiv erhalten kann, zeigt folgende interaktive Aufgabe, die mit CINDERELLA für eine HTML-Seite erzeugt wurde. Dabei kann der Aufgabensteller im Zeichenfenster eine Figur vorgeben, die Konstruktionswerkzeuge einschränken und im Textfenster den Aufgabentext sowie weitere Hinweise bereitstellen.

Der Bearbeiter der Aufgabe kann sich durch Anklicken des Fragezeichens durch die Aufgabe führen lassen, wobei die Konstruktion schrittweise ergänzt wird, oder selbstständig mit den vorgegebenen Werkzeugen die Aufgabe lösen. CINDERELLA kontrolliert dabei den Lösungsweg und gibt entsprechend vorbereitete Hinweise und Rückmeldungen.



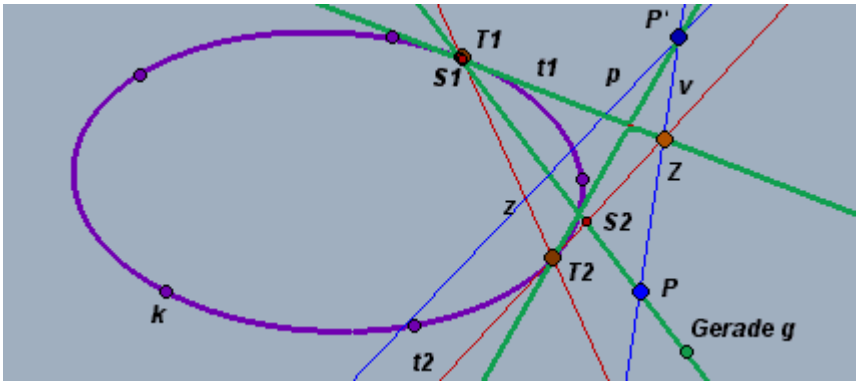
Nach Kurzem erhält man folgendes Bild:



Das Bild von g erhält man dabei als Ortslinie des Punktes P', wenn P die Gerade g durchläuft. In der Konstruktionsbeschreibung gibt CINDERELLA an, dass diese Ortslinie ein Kegelschnitt ist.

	Wer?	Was?	Wo?
●	P'	Schnittpunkt(v;p)	(7,44|5,83)
○	C1	Ortslinie(P;Gerade g;P')	,01x² - ,02y² + ,03xy - ,3x - ,01y + 1 = 0

Im Laufe der Lösung kann der Aufgabensteller zusätzliche Fragen aufwerfen, z.B. warum das Bild von g in der gegebenen Figur die Ausnahmepunkte Z, T1, T2 enthält, oder weitere Arbeitsaufträge vorgeben, z.B. die Lage der Geraden g zu verändern. Durch Verschieben des Punktes P auf der Geraden g erkennt man spielerisch, dass die Schnittpunkte S, S1, S2 der Geraden g mit den Ausnahmegeraden z, t1, t2 auf die Ausnahmepunkte Z, T1, T2 abgebildet werden.

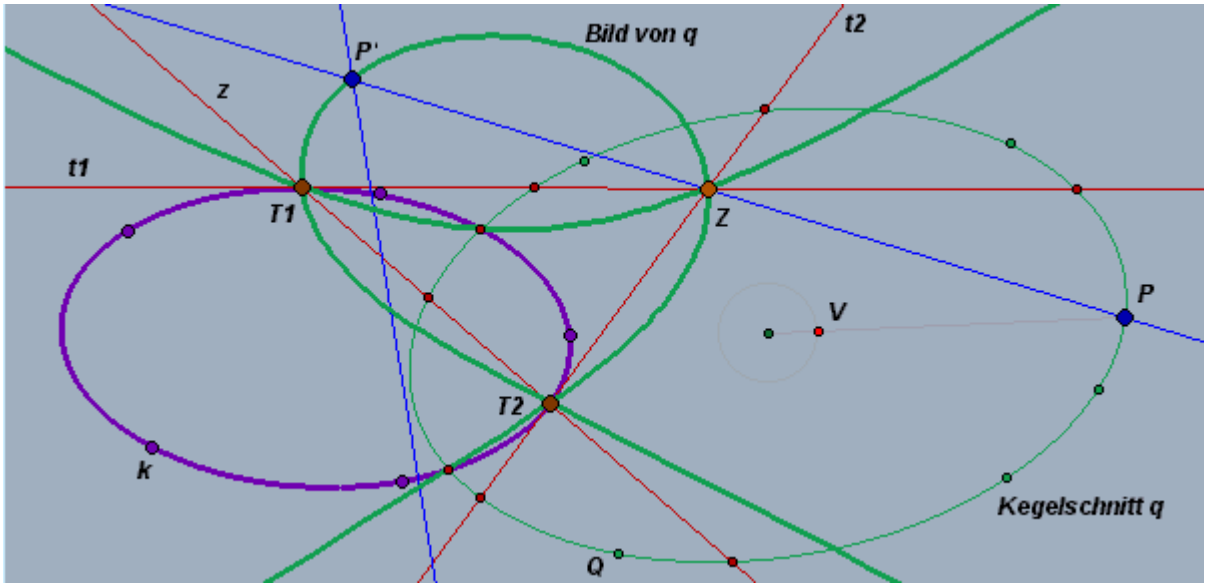


Verschiebt man die Gerade durch einen der Ausnahmepunkte Z, T1, T2, so erhält man entartete Kegelschnitte g*. Insbesondere gilt:

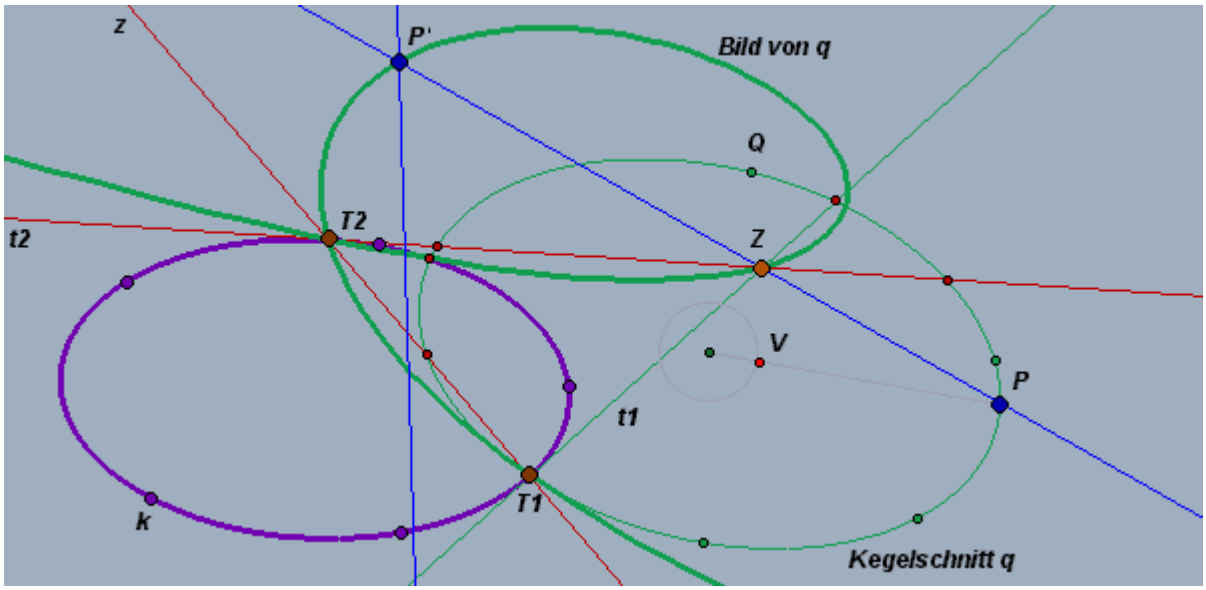
- Enthält die Gerade g das Inversionszentrum Z, so zerfällt das Urbild von g in die Geraden z (das Urbild von Z) und die Gerade g, womit g = g' eine Fixgerade ist.
- Enthält die Gerade g einen Berührpunkt T1 oder T2, so zerfällt das Urbild von g in die Gerade t1 bzw. t2 (die Urbilder von T1, T2) und eine weitere Gerade, das Bild g' von g.
- Enthält die Gerade g zwei verschiedene Ausnahmepunkte, so ist sie selbst eine Ausnahmegerade, deren Urbild in zwei Ausnahmegeraden (die Urbilder der Ausnahmepunkte) zerfällt und deren Bild der dritte Ausnahmepunkt ist.

Bild eines Kegelschnitts bei Inversion an Kegelschnitten

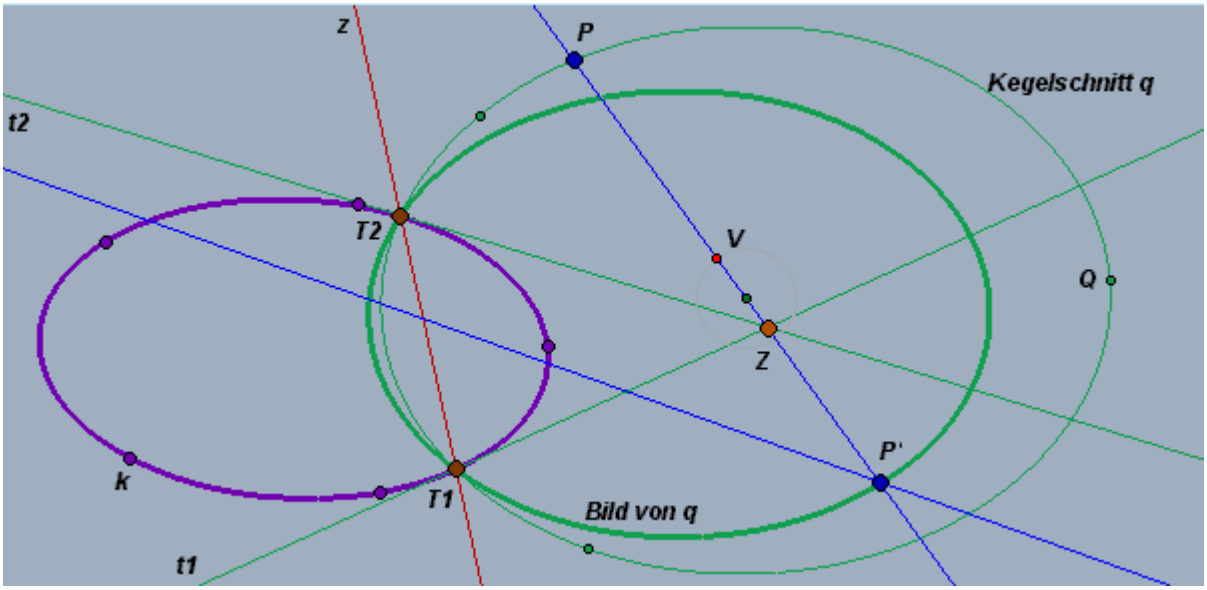
Bei der Frage nach dem Bild eines Kegelschnitts q: $x^T Ax = 0$ ergibt sich nach Einsetzen der Abbildungsgleichung, dass das Urbild q* von q eine eventuell zerfallende Kurve 4. Ordnung ist.



Das Bild q' von q liegt also auf einer Kurve 4. Ordnung und durchläuft die Ausnahmepunkte Z, T1, T2 zweimal, wenn der Kegelschnitt q wie in obiger Figur die Ausnahmegeraden z, t1, t2 jeweils in zwei reellen Punkten schneidet.
Wie beim Bild von Geraden kann man zeigen, dass das Bild eines Kegelschnitts q genau dann zerfällt, wenn q einen Ausnahmepunkt Z, T1, T2 enthält.

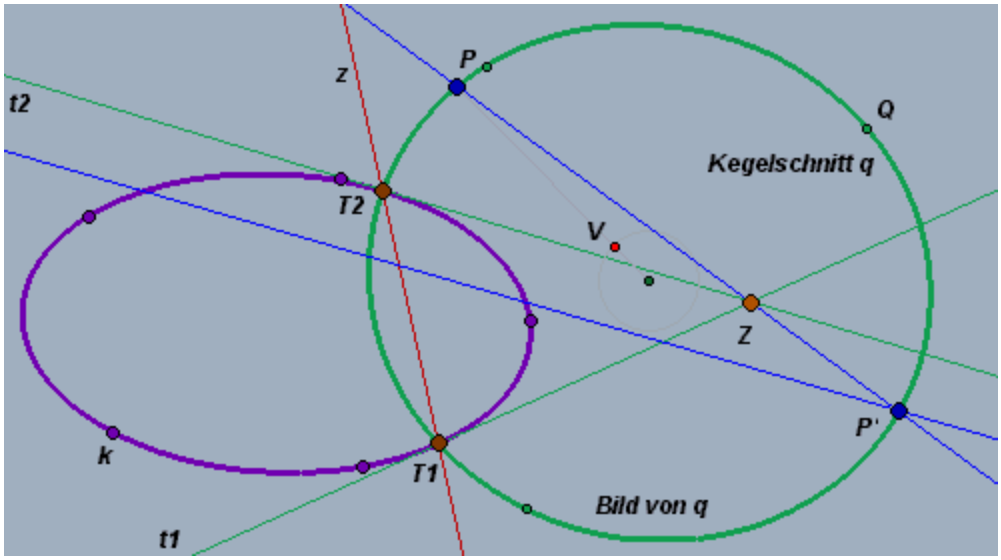


Enthält der Kegelschnitt q genau einen Ausnahmepunkt Z, T1, T2, so enthält das Urbild q* von q die zugehörige Ausnahmegerade z, t1 oder t2. Das Urbild q* von q zerfällt dann in eine Kurve 3. Ordnung, das Bild q' von q, und eine Ausnahmegerade (hier t1).
Enthält der Kegelschnitt q einen weiteren Ausnahmepunkt, so spaltet sich von q* noch eine weitere Ausnahmegerade ab.

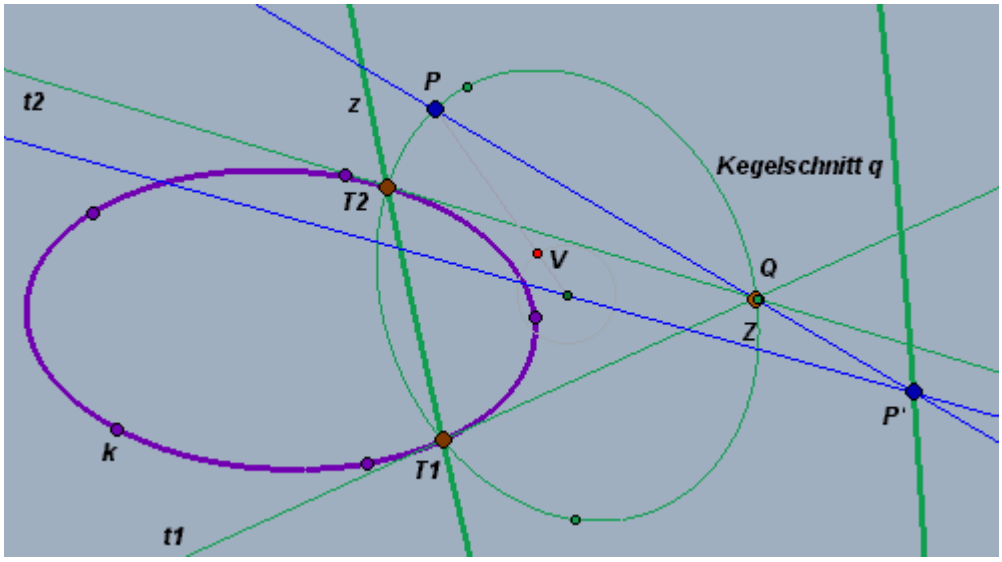


Enthält der Kegelschnitt q genau zwei Ausnahmepunkte Z, T1, T2, so enthält das Urbild q* von q die beiden zugehörigen Ausnahmegeraden z, t1 oder t2. Das Urbild q* von q zerfällt dann in einen Kegelschnitt, das Bild q' von q, und die beiden Ausnahmegeraden (hier t1 und t2).

Durch Verschieben des Punktes Q kann man der Frage nachgehen, welche Kegelschnitte auf sich abgebildet werden. Einen solchen Fixkegelschnitt zeigt folgende Figur.



Enthält der Kegelschnitt q alle drei Ausnahmepunkte Z, T1, T2, so zerfällt q* in die drei Ausnahmegeraden z, t1, t2 und eine weitere Gerade, das Bild q' von q. Das Bild dieser Geraden ist dann nach obigem wieder der Kegelschnitt q.



Verschiebt man Z in das Innere des Inversionskegelschnitts k, so kann man erkennen, dass CINDERELLA mit den konjugiert komplexen Ausnahmepunkten T1, T2 weiter arbeitet. Es gilt:

Das Bild eines Kegelschnitts q bei Inversion an Kegelschnitten ist genau dann ein Kegelschnitt, wenn q genau zwei der (eventuell konjugiert komplexen) Ausnahmepunkte Z, T1, T2 enthält.

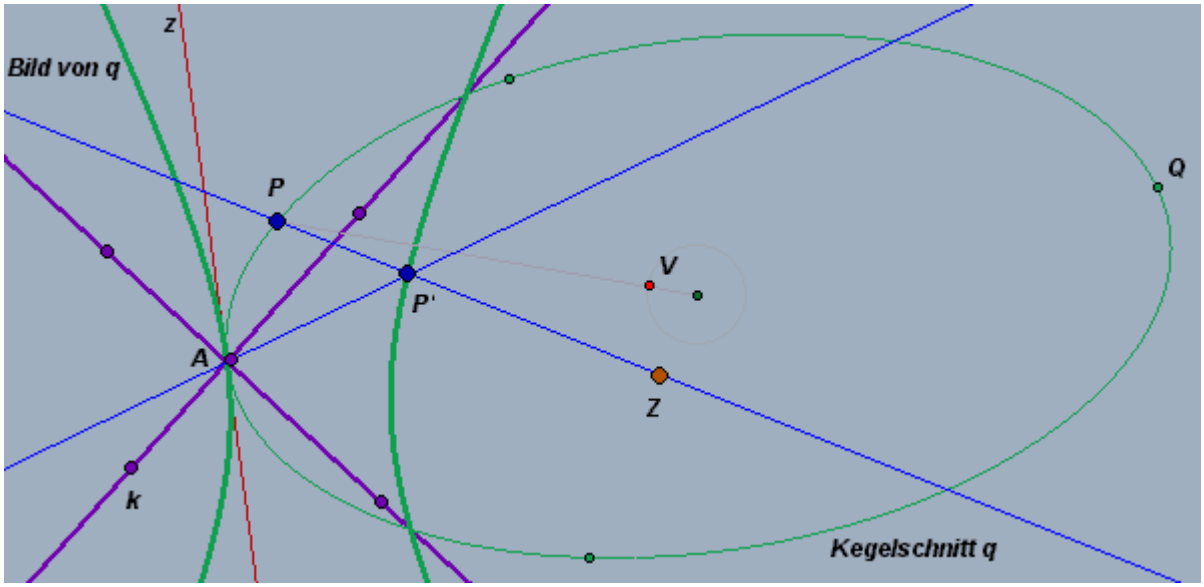
Wählt man als Inversionskegelschnitt k speziell einen Kreis k(M,r) und dessen Mittelpunkt M als Inversionszentrum Z, so sind die Ausnahmepunkte T1, T2 die absoluten Kreispunkte. Da Kegelschnitte, welche die absoluten Kreispunkte T1 und T2 enthalten, Kreise sind, gilt:

- Kreise, die Z nicht enthalten, werden auf Kreise und Kreise durch Z auf Geraden abgebildet.
- Sonstige nichtentartete Kegelschnitte q werden auf nicht zerfallende Kurven 3.- oder 4. Ordnung abgebildet, je nachdem, ob q das Inversionszentrum Z = M enthält oder nicht.

Dies ist die vorher erwähnte Eigenschaft der Kreisinversion.

Schlußbemerkung

Bei den gezeigten Figuren wurden als Kegelschnitte jeweils Ellipsen gewählt. Durch Verschieben der bestimmenden fünf Punkte erhält man mit CINDERELLLA entsprechende Figuren mit Hyperbeln und Parabeln oder auch zerfallenden Kegelschnitten.



Zerfällt der Inversionskegelschnitt in zwei Geraden, so fallen offenbar die beiden Ausnahmepunkte T1, T2 mit deren Schnittpunkt, dem singulären Punkt A des Kegelschnitts, zusammen. In diesem Fall ist Z = A auszuschließen, da sonst die Inversion auf die Abbildung P' = A degeneriert.

Mit Hilfe des Programms CINDERELLA kann man diesen Grenzfall näher untersuchen oder weiteren interessanten Fragen nachgehen, z.B. nach Berührеigenschaften oder den Sonderfall, dass Z auf dem Inversionskegelschnitt liegt.

Literaturangaben:

- **URSULA KRETSCHMANN:** Inversion an Quadriken, Staatsexamensarbeit, TU-München 2003
- **HERMANN SCHMIDT:** Die Inversion und Ihre Anwendungen, Oldenbourg, München 1950
- **MARIA STARY:** Beiträge zur Projektiven Inversion und deren Linearisierung, Dissertation, TU-München 1985

Dr. Hermann Vogel
Technische Universität München
Zentrum Mathematik, M10
Boltzmannstr. 3, 85747 Garching

E-mail: vogel@ma.tum.de
URL: www-m10.ma.tum.de/~vogel