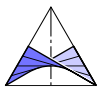


Zweibildersysteme heute die Digitalkamera als Messgerät

Hellmuth Stachel



stachel@dmg.tuwien.ac.at — <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel>



Inhaltsangabe

1. Zentralrisse und lineare Bilder
2. Numerische Rekonstruktion eines Bildpaares
3. Der Algorithmus

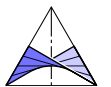
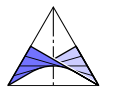


Foto — lineares Bild

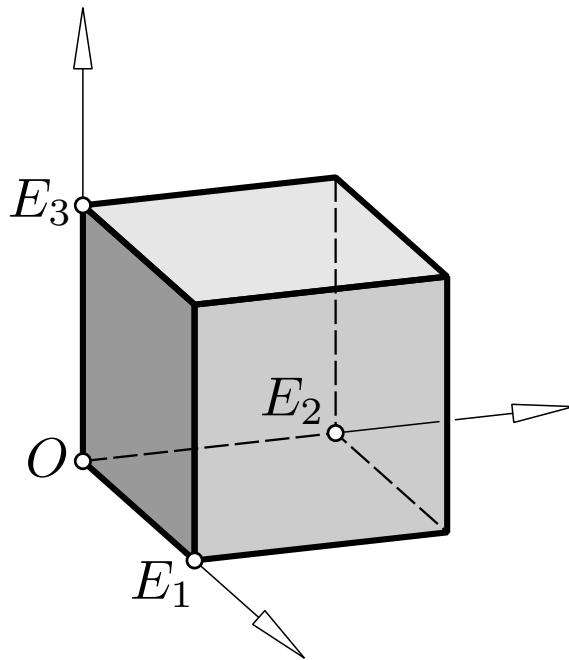


Foto (= Zentralriss) oder Foto eines Fotos (= Zentralaxonometrie) ?



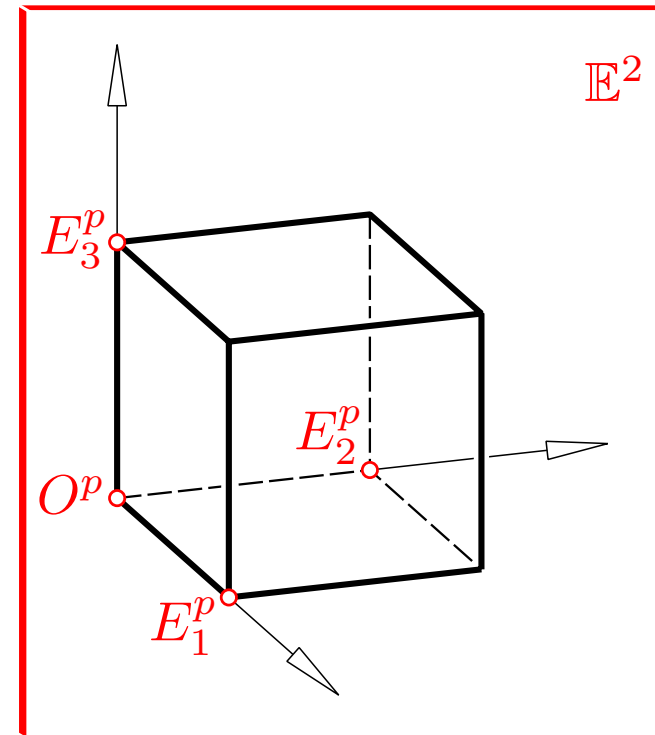
Das axonometrische Prinzip

im Raum \mathbb{E}^3 :



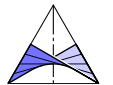
kartesische Basis $O; E_1, E_2, E_3$

in der Bildebene \mathbb{E}^2 :



axonometrisches Bezugssystem

$O^p; E_1^p, E_2^p, E_3^p$



Axonometrie analytisch

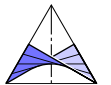
Es gibt genau eine (singuläre) Affinität

$$\alpha: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^2 \quad \text{mit} \quad O \mapsto O^p, \quad E_i \mapsto E_i^p, \quad i = 1, 2, 3.$$

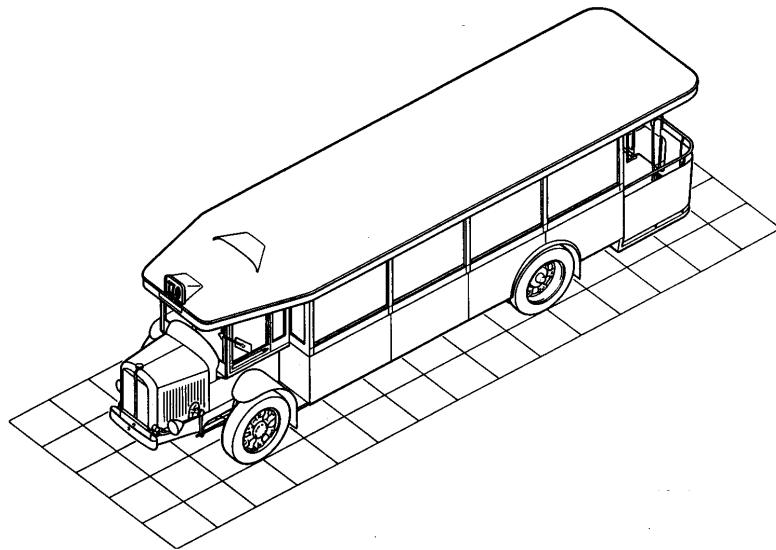
$$\alpha: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x'_1, x'_2), \quad \text{wobei}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \end{pmatrix} + A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{13} \\ a_{21} & \dots & a_{23} \end{pmatrix}.$$

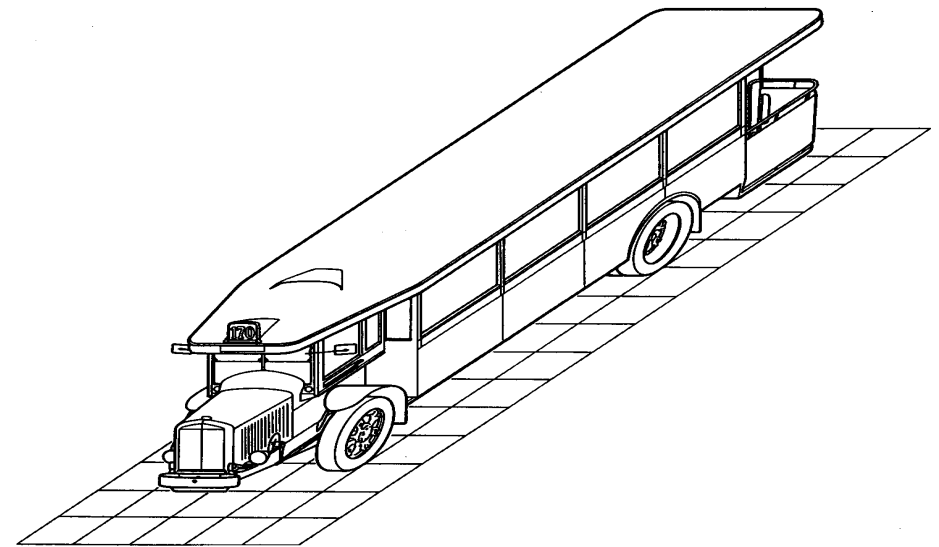
In den Spalten von A stehen die Koordinaten der Vektoren $\mathbf{e}_i = \overrightarrow{O^p E_i^p}$.



Charakterisierung orthogonaler Axonometrien



orthogonale Axonometrie



schiefe Axonometrie

Satz: $\alpha: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^2$ ist eine Orthogonalprojektion \iff die zwei *Zeilen* in der Matrix A sind *zueinander orthogonale Einheitsvektoren*.

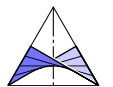
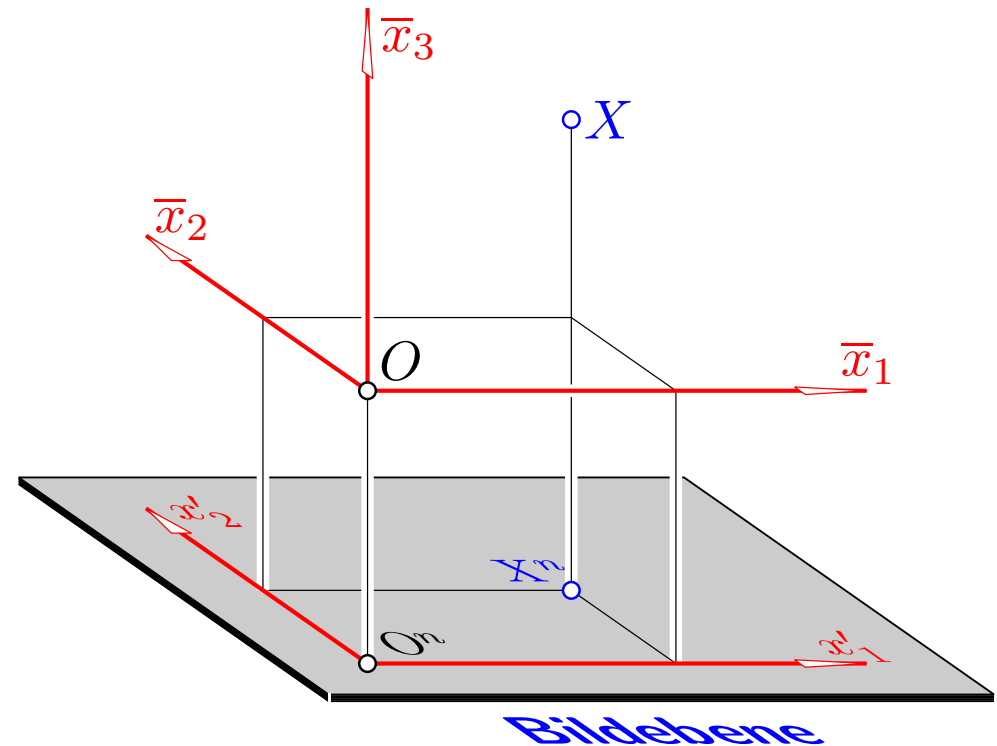
Normale Axonometrie analytisch

Beweis: Bei Verwendung angepasster Raumkoordinaten $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ erhalten wir

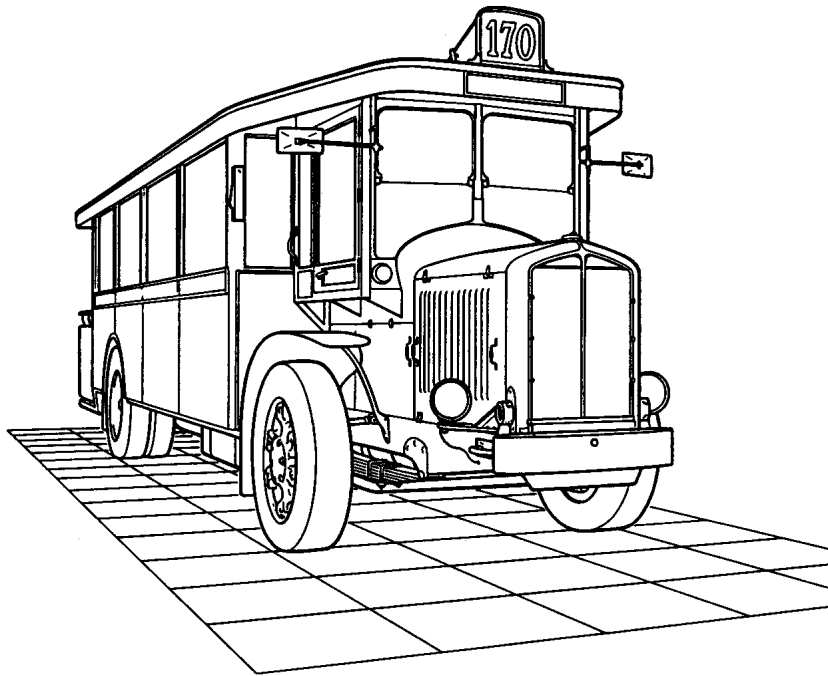
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}.$$

Bei **allgemeinen Weltkoordinaten** mit dem Ursprung O gibt es eine **orthogonale Matrix R** derart, dass

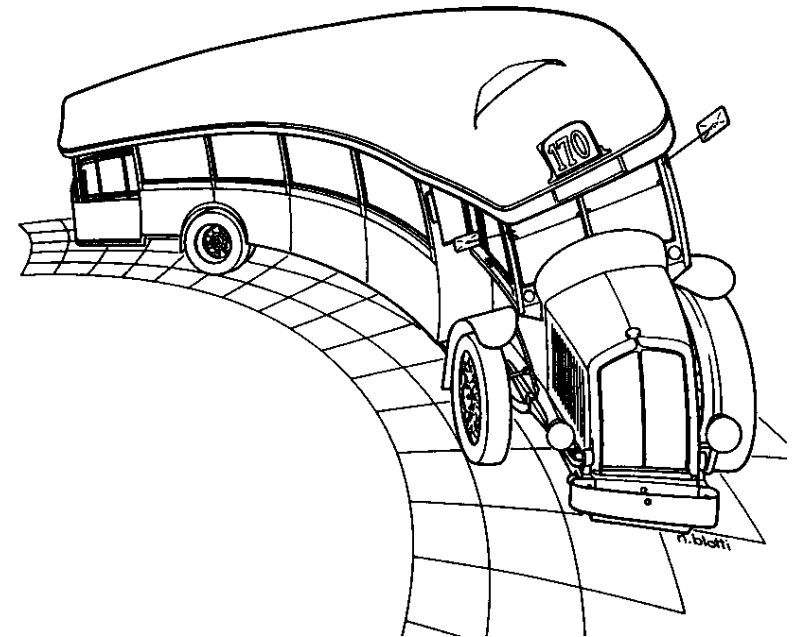
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \cdot R \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$



Perspektive Bilder



lineare Perspektive



kurvierte Perspective

Zentralprojektion

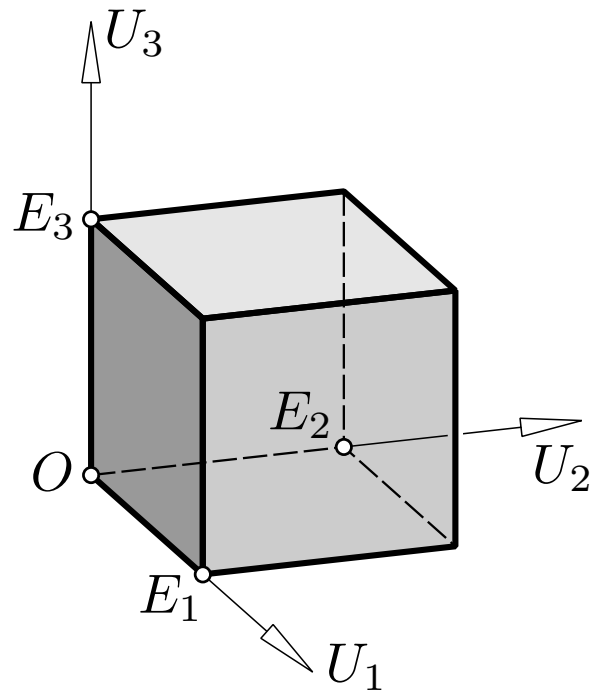
Die Zentralprojektion (nach A. DÜRER)



kann verallgemeinert werden zur Zentralaxonometrie.

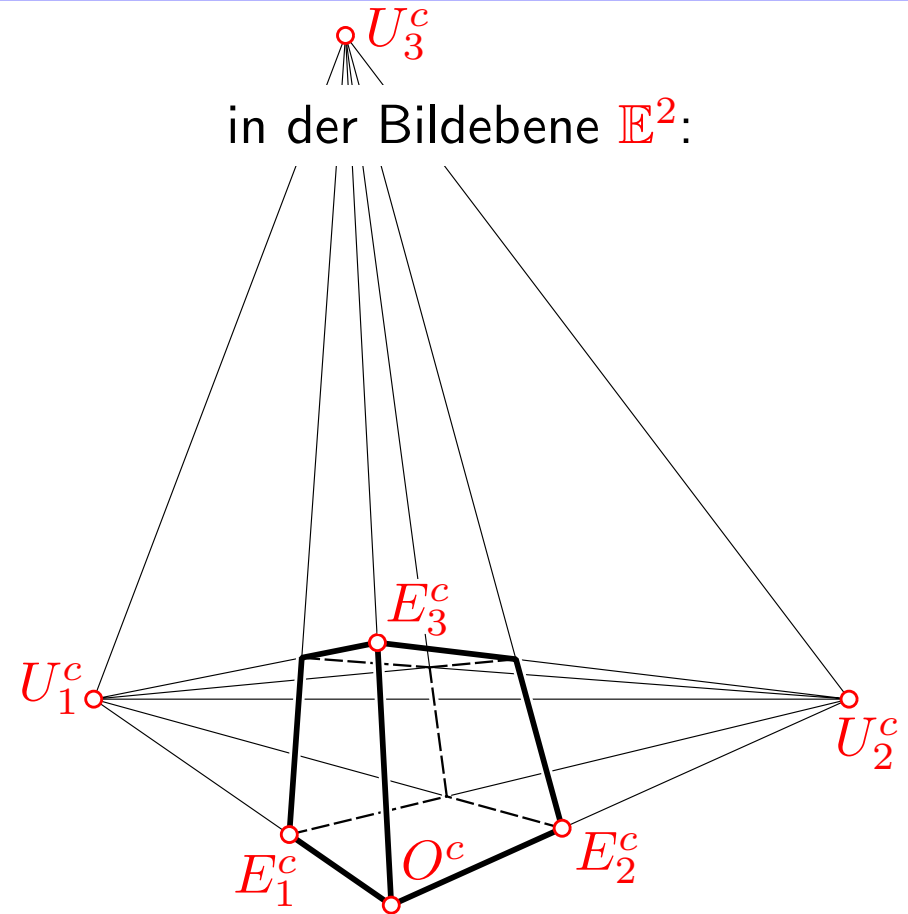
Zentralaxonometrisches Prinzip

im Raum \mathbb{E}^3 :



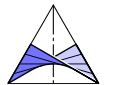
kartesische Basis $O; E_1, E_2, E_3$
samt Fernpunkten U_1, U_2, U_3

in der Bildebene \mathbb{E}^2 :



zentralaxonometrisches Bezugssystem

$O^c; E_1^c, E_2^c, E_3^c; U_1^c, U_2^c, U_3^c$



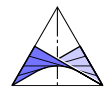
Zentralaxonometrisches Prinzip

Es gibt genau eine **Kollineation**

$$\kappa: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^2 \quad \text{mit} \quad O \mapsto O^c, \quad E_i \mapsto E_i^c, \quad U_i \mapsto U_i^c, \quad i = 1, 2, 3.$$

$$\kappa: \left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \frac{\xi_2}{\xi_0}, \frac{\xi_3}{\xi_0} \right) \mapsto \left(\frac{\xi'_1}{\xi'_0}, \frac{\xi'_2}{\xi'_0} \right), \quad \text{wobei}$$

$$\begin{pmatrix} \xi'_0 \\ \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array} \right).$$



Zentralprojektion analytisch

Bezeichnungen:

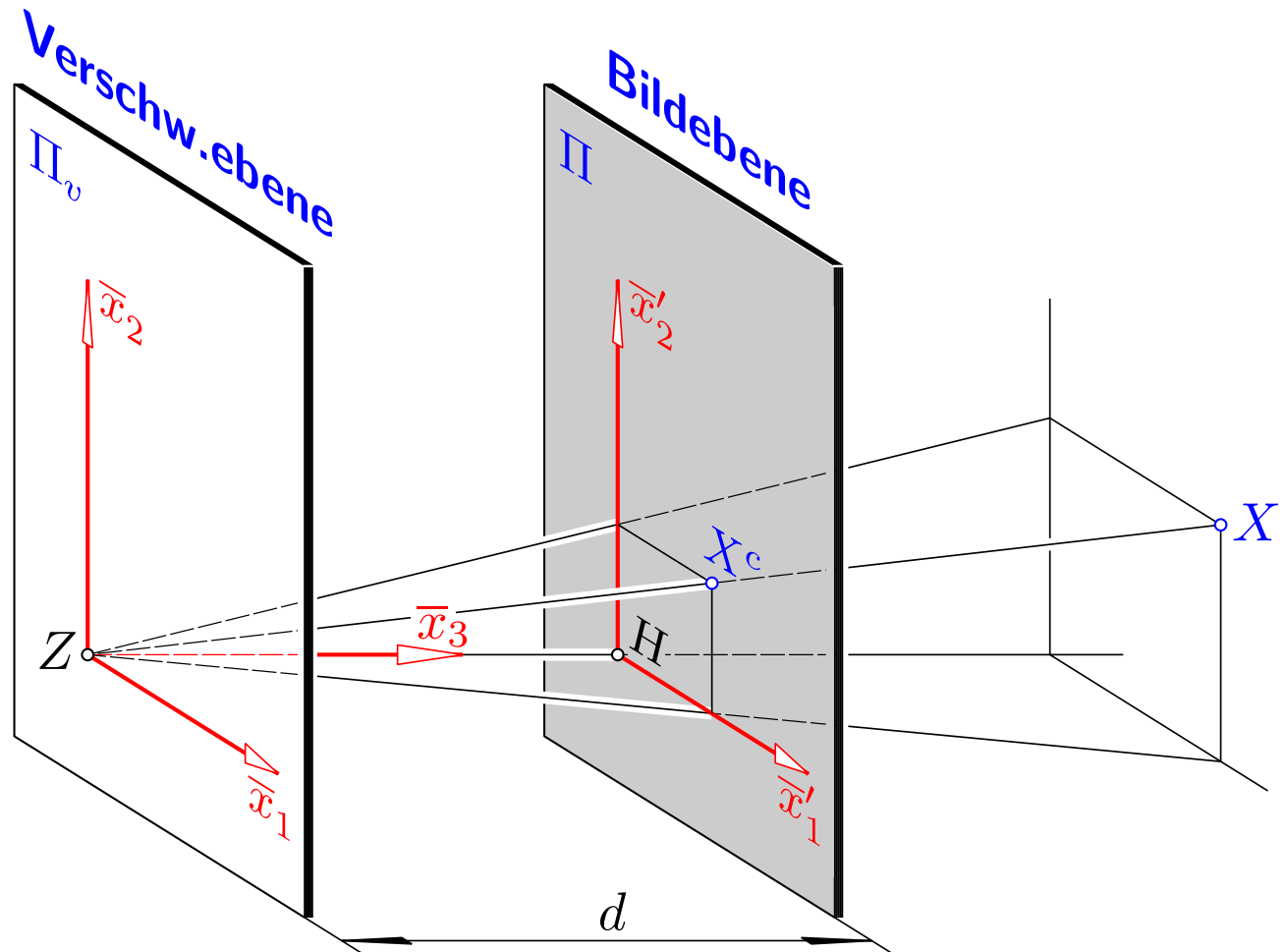
Z ... Zentrum

H ... Hauptpunkt

d ... Distanz
(Brennweite)

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$...
Kamerakoordinaten

\bar{x}'_1, \bar{x}'_2 ...
Bildkoordinaten

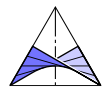


Zentralprojektion analytisch

$$\begin{pmatrix} \bar{x}'_1 \\ \bar{x}'_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{\bar{x}_3} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \text{ oder homogen } \begin{pmatrix} \bar{\xi}'_0 \\ \bar{\xi}'_1 \\ \bar{\xi}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_0 \\ \vdots \\ \bar{\xi}_3 \end{pmatrix}.$$

Umrechnung von Kamerakoordinaten $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ auf beliebige Weltkoordinaten (x_1, x_2, x_3) und Verschiebung der speziellen Bildkoordinaten (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2) in allgemeinere (x'_1, x'_2) ergibt in homogenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi'_0 \\ \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h'_1 & f_1 & 0 \\ h'_2 & 0 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ o_1 & & & \\ \vdots & R & & \\ o_3 & & & \end{pmatrix}}_{\text{Matrix } A} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$

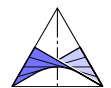


Zentralprojektion analytisch

$$\begin{pmatrix} \bar{x}'_1 \\ \bar{x}'_2 \end{pmatrix} = \frac{d}{\bar{x}_3} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}, \text{ oder homogen } \begin{pmatrix} \bar{\xi}'_0 \\ \bar{\xi}'_1 \\ \bar{\xi}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_0 \\ \vdots \\ \bar{\xi}_3 \end{pmatrix}.$$

Umrechnung von **Kamerakoordinaten** $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ auf beliebige **Weltkoordinaten** (x_1, x_2, x_3) und Verschiebung der speziellen Bildkoordinaten (\bar{x}'_1, \bar{x}'_2) in allgemeinere (x'_1, x'_2) ergibt in homogenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi'_0 \\ \xi'_1 \\ \xi'_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h'_1 & f_1 & 0 \\ h'_2 & 0 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ o_1 & & & \\ \vdots & R & & \\ o_3 & & & \end{pmatrix}}_{\text{Matrix } A} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \vdots \\ \xi_3 \end{pmatrix}.$$



Zentralprojektion analytisch

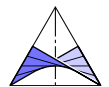
(h'_1, h'_2) sind die Bildkoordinaten von H und f_1, f_2 die Faktoren für mögliche axiale Verzerrungen.

Die Parameter (h'_1, h'_2) und f_1, f_2 zusammen mit der Distanz d bestimmen die **innere Orientierung** des Fotos.

R ist eine orthogonale Matrix.

Die relative Lage des Kamerasystems zum Weltkoordinatensystem bestimmt die **äußere Orientierung** des Fotos.

Fotos mit bekannter innerer Orientation heißen auch kalibriert im Gegensatz zu nicht kalibrierten Bildern (wie z.B. Zentralaxonometrien).



Zentralprojektion analytisch

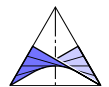
(h'_1, h'_2) sind die Bildkoordinaten von H und f_1, f_2 die Faktoren für mögliche axiale Verzerrungen.

Die Parameter (h'_1, h'_2) und f_1, f_2 zusammen mit der Distanz d bestimmen die **innere Orientierung** des Fotos.

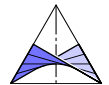
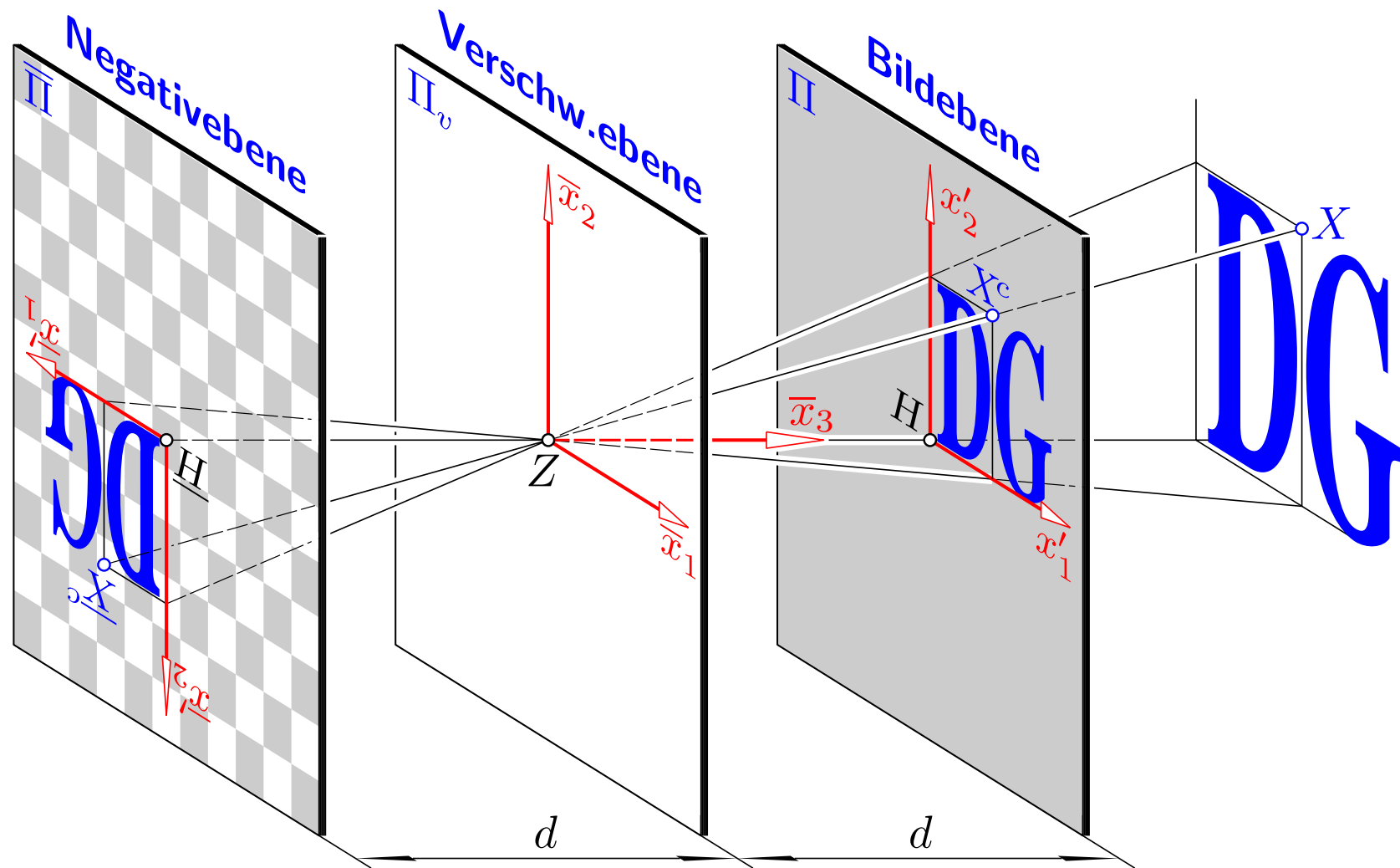
R ist eine orthogonale Matrix.

Die relative Lage des Kamerasystems zum Weltkoordinatensystem bestimmt die **äußere Orientierung** des Fotos.

Fotos mit bekannter innerer Orientation heißen auch **kalibriert** im Gegensatz zu **nicht kalibrierten** Bildern (wie z.B. Zentralaxonometrien).



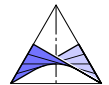
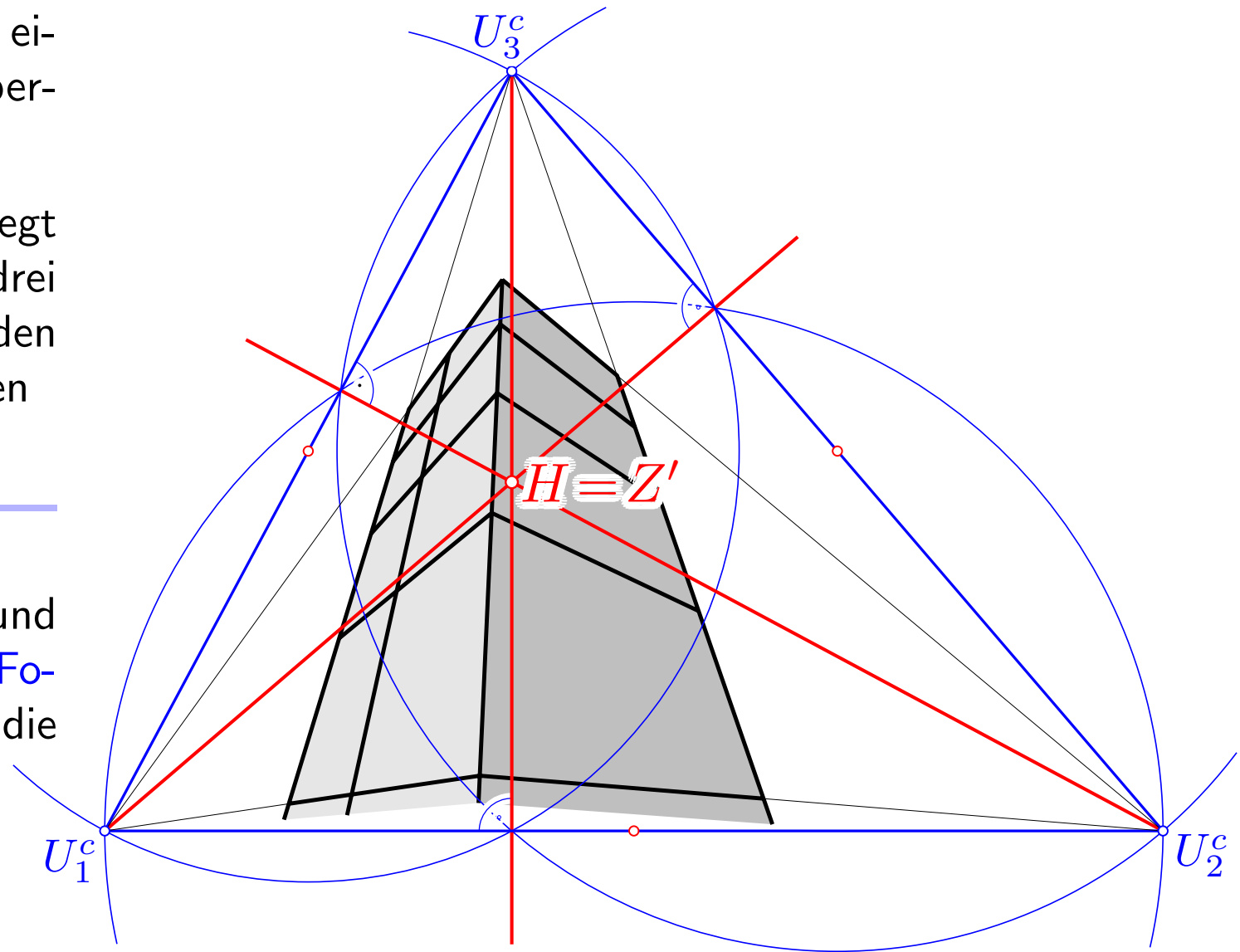
Positiver und negativer Zentralriss



Wie kann man die **innere Orientierung** einer Kamera überprüfen?

Das Zentrum Z liegt im Schnitt der drei Kugeln über den Durchmesserstrecken $U_1^c U_2^c, \dots$

Achtung: **Zoomen** und (automatisches) **Fokussieren** ändern die Brennweite d !

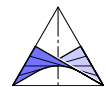
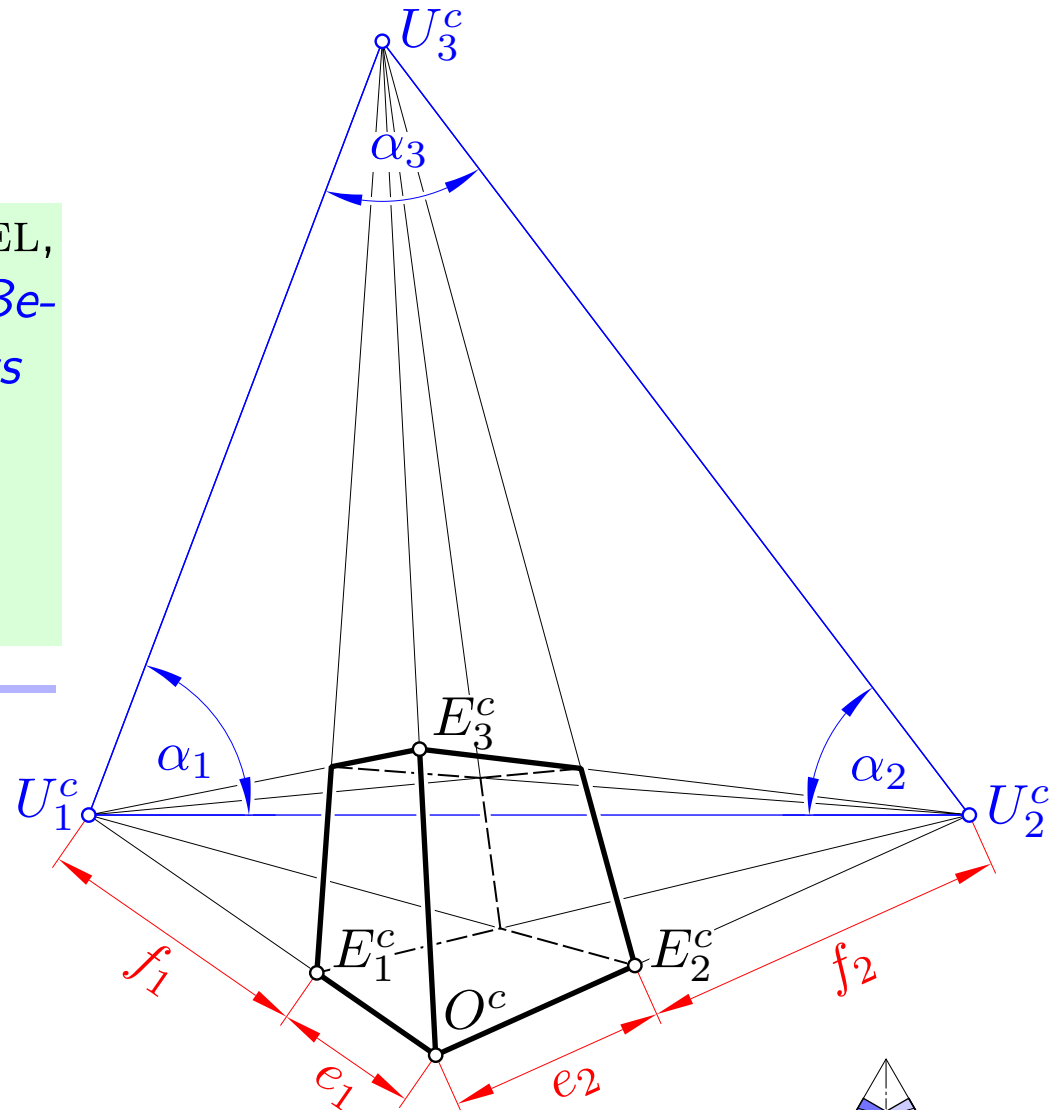


Zentralprojektion — Zentralaxonometrie

Satz (J. SZABÓ, H.S., H. VOGEL, 1994): Ein *zentralaxonometrisches Bezugssystem* bestimmt einen *Zentralriss*

$$\Leftrightarrow \left(\frac{e_1}{f_1} \right)^2 : \left(\frac{e_2}{f_2} \right)^2 : \left(\frac{e_3}{f_3} \right)^2 = \tan \alpha_1 : \tan \alpha_2 : \tan \alpha_3 .$$

Satz: Jede *Zentralaxonometrie* ist affin zu einem *Zentralriss*.



2. Numerische Rekonstruktion eines Bildpaares

GEGEBEN: Zwei lineare Bilder oder Fotos derselben Szene.



Historische Stadtbahnstation 'Karlsplatz' in Wien (Otto Wagner, 1897)

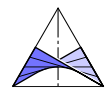
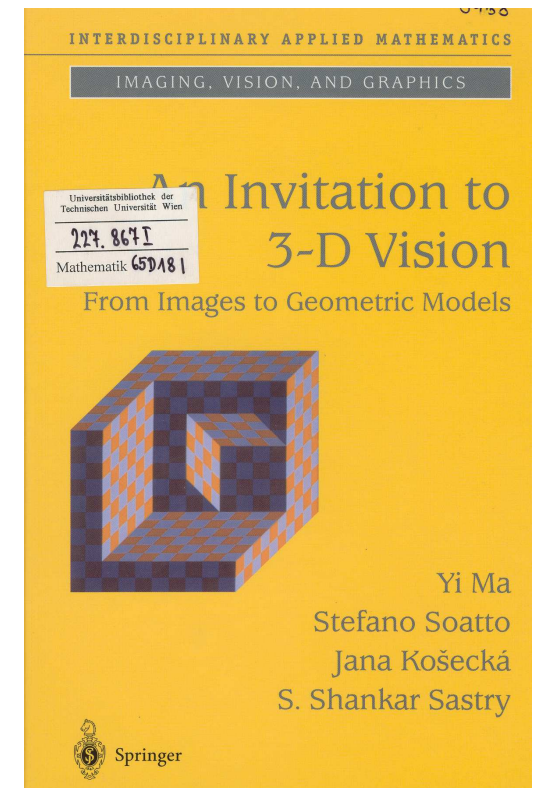
2. Numerische Rekonstruktion eines Bildpaares

Warum jetzt ?

Yi MA, St. SOATTO, J. KOŠECKÁ,
S.Sh. SASTRY: *An Invitation to 3-D Vision*.
Springer-Verlag, New York 2004

Vorteile digitaler Bilder:

- geringere Verzerrung, da keine Papierabzüge,
- exakter Bildrand erkennbar (für Bildmitte), und
- genaue Koordinatenmessung mit Standardsoftware.



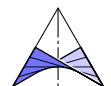
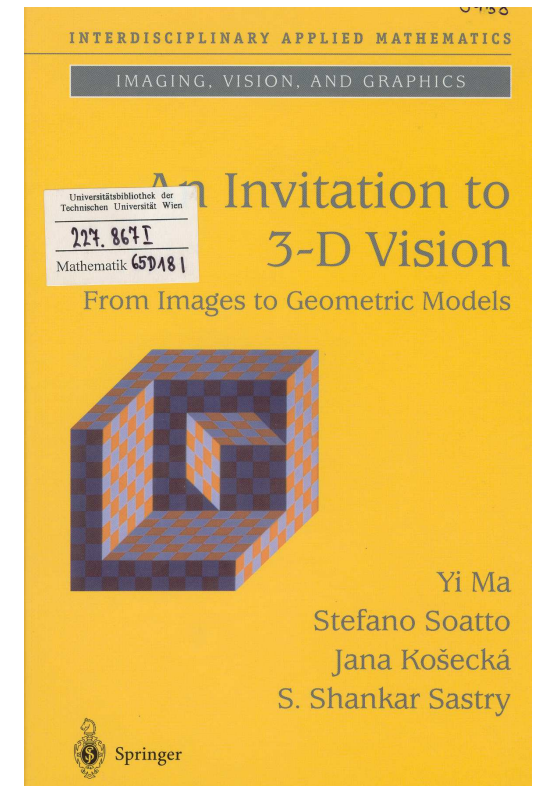
2. Numerische Rekonstruktion eines Bildpaares

Zweibildersysteme sind seit langem ein Forschungsgebiet der Darstellenden Geometrie mit klassischen Ergebnissen (FINSTERWALDER, KRUPPA, KRAMES, WUNDERLICH, BRAUNER, HAVLICEK, H.S., ...).

6.6 Dinner with Kruppa

This last section is dedicated to exploring intrinsic constraints among calibration parameters that date back to the work of Kruppa in 1913. While these were historically the first constraints to be exploited for autocalibration, their use has become less widespread due to the difficulty in solving the strongly nonlinear equations. In this section we will derive the equations and outline their basic properties. We

¹⁵We say “in principle” because in practice, noise may prevent the matrix S recovered from data from being positive definite.



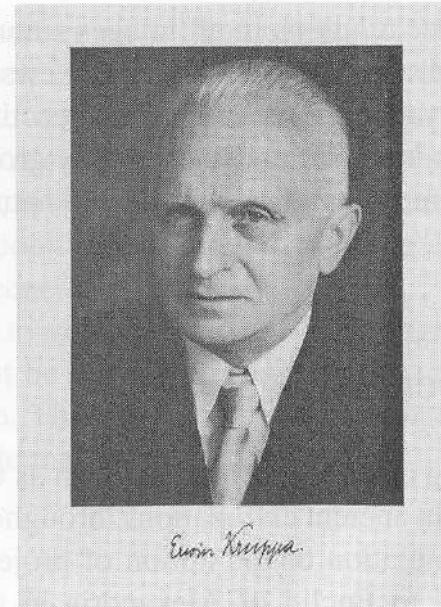


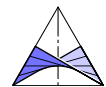
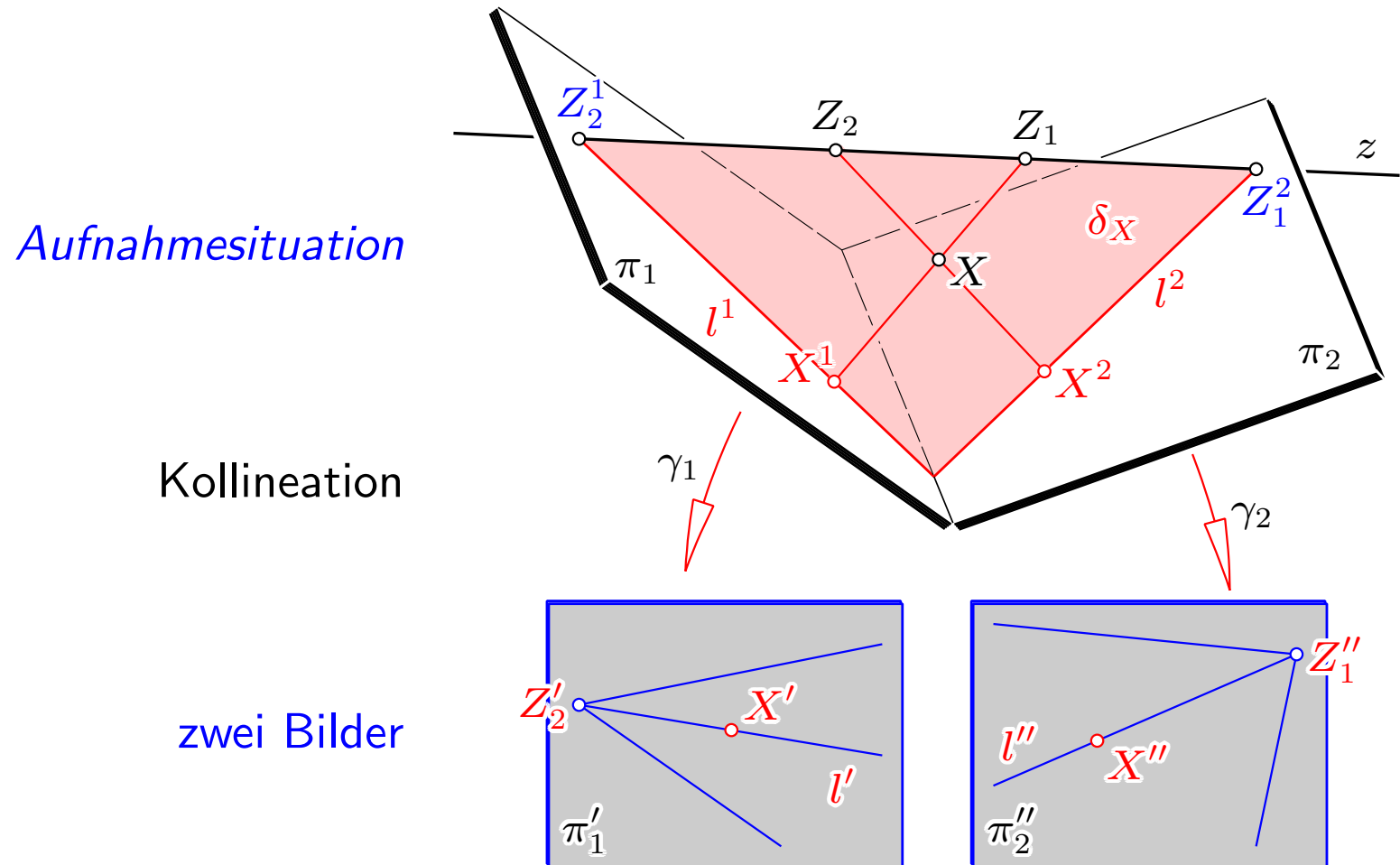
Figure 1.8. Photograph of Erwin Kruppa (courtesy of A. Kruppa).

The first work that is directly related to multiple-view geometry is believed to be a 1913 paper by the German mathematician Kruppa (see Figure 1.8).⁷ He proved that two views of five points are sufficient to determine both the relative transformation between the views and the 3-D location of the points up to finitely many solutions.⁸ Kruppa's proof was done in the traditional projective geometry setting [Kruppa, 1913].

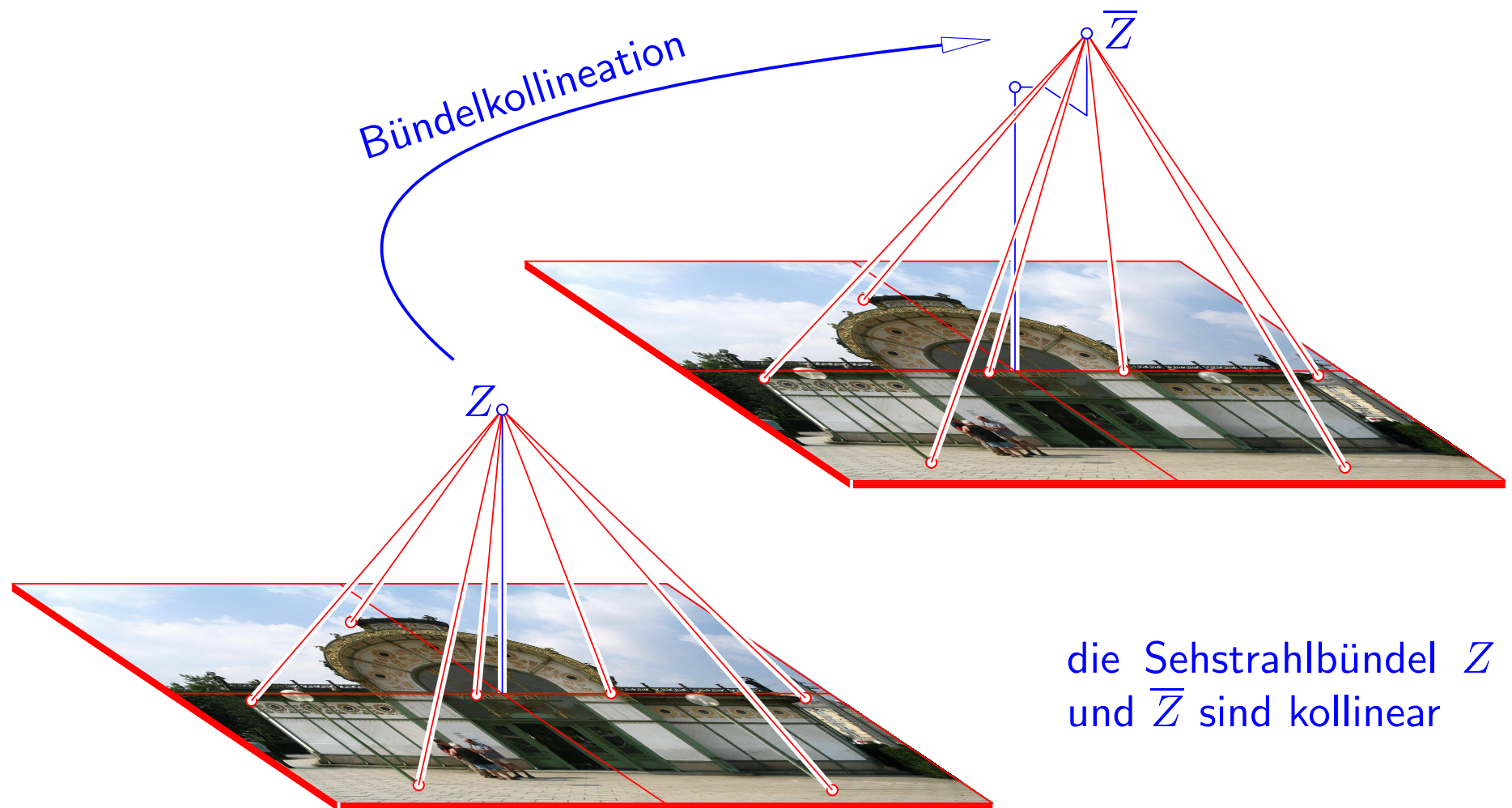
Erfreulicherweise zitieren auch die Autoren des genannten Buches einige dieser Ergebnisse

...

Zweibildersysteme (engl.: epipolar geometry)



Änderung der inneren Orientierung



Zweibildersysteme (engl.: epipolar geometry)

Bezeichnungen:

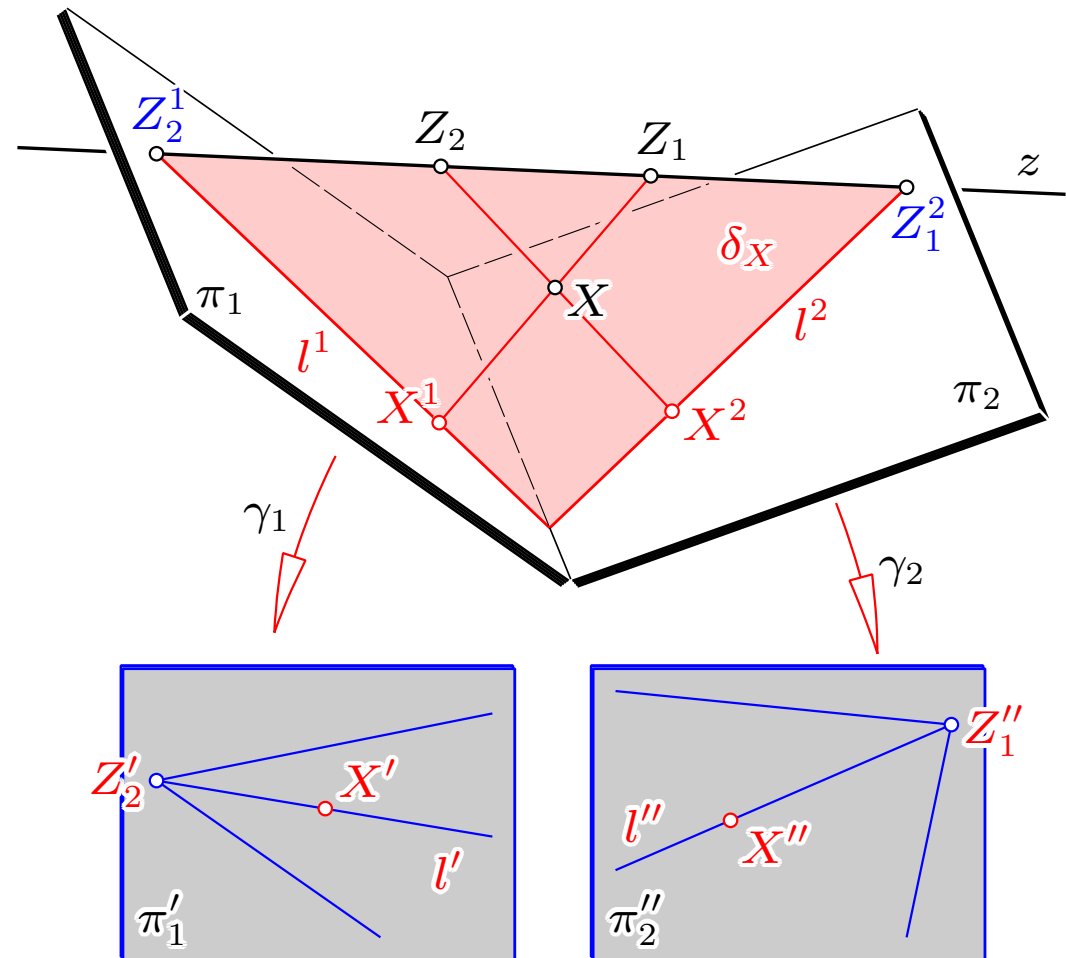
$z = [Z_1 Z_2] \dots$ Kernachse,

$Z'_2, Z''_1 \dots$ Kernpunkte
(engl.: epipoles),

$\delta_X \dots$ Kernebenen (engl.: epipolar planes) zweifach projizierend,

$l', l'' \dots$ Paar zugeordneter
Kerngeraden (epipolar lines),

$(X', X'') \dots$ zugeordnete
Bildpunkte.



Abhängigkeit der Bilder (epipolar constraint)

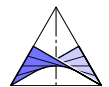
Satz (synthetische Fassung): Für je zwei lineare Bilder derselben Szene gibt es eine **Projektivität zwischen Geradenbüscheln** ('Ordnerprojektivität')

$$Z'_2(\delta'_X) \frown Z''_1(\delta''_X).$$

Die **Bildpunkte X', X''** entsprechen einander \iff sie liegen auf **zugeordneten Geraden** dieser Projektivität (= singuläre Korrelation).

Satz (analytische Fassung): Bei Verwendung homogener Koordinaten in beiden Bildern gibt es eine Bilinearform β vom Rang 2. Zwei Bildpunkte $X' = \mathbf{x}'\mathbb{R} = (\xi'_0 : \xi'_1 : \xi'_2)$ und $X'' = \mathbf{x}''\mathbb{R} = (\xi''_0 : \xi''_1 : \xi''_2)$ entsprechen einander

$$\iff \beta(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \sum_{i,j=0}^2 b_{ij} \xi'_i \xi''_j = (\xi'_0 \ \xi'_1 \ \xi'_2) \cdot (b_{ij}) \begin{pmatrix} \xi''_0 \\ \xi''_1 \\ \xi''_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}'^T \cdot B \cdot \mathbf{x}'' = 0.$$



Abhängigkeit der Bilder (epipolar constraint)

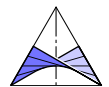
Satz (synthetische Fassung): Für je zwei lineare Bilder derselben Szene gibt es eine **Projektivität zwischen Geradenbüscheln** ('Ordnerprojektivität')

$$Z'_2(\delta'_X) \frown Z''_1(\delta''_X).$$

Die **Bildpunkte X', X'' entsprechen einander** \iff sie liegen auf **zugeordneten Geraden** dieser Projektivität (= singuläre Korrelation).

Satz (analytische Fassung): Bei Verwendung homogener Koordinaten in beiden Bildern gibt es eine **Bilinearform β vom Rang 2**. Zwei Bildpunkte $X' = \mathbf{x}'\mathbb{R} = (\xi'_0 : \xi'_1 : \xi'_2)$ und $X'' = \mathbf{x}''\mathbb{R} = (\xi''_0 : \xi''_1 : \xi''_2)$ **entsprechen einander**

$$\iff \beta(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = \sum_{i,j=0}^2 b_{ij} \xi'_i \xi''_j = (\xi'_0 \ \xi'_1 \ \xi'_2) \cdot (b_{ij}) \begin{pmatrix} \xi''_0 \\ \xi''_1 \\ \xi''_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}'^T \cdot B \cdot \mathbf{x}'' = 0.$$



Abhängigkeit der Bilder (epipolar constraint)

Beweis (analytische Fassung): Mittels homogener Geradenkoordinaten kann die Projektivität zwischen den Büschelgeraden ausgedrückt werden durch

$$\beta: (\mathbf{u}'_1 \lambda_1 + \mathbf{u}'_2 \lambda_2) \mathbb{R} \mapsto (\mathbf{u}''_1 \lambda_1 + \mathbf{u}''_2 \lambda_2) \mathbb{R} \quad \text{für alle } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

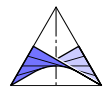
\mathbf{x}' und \mathbf{x}'' entsprechen einander \iff es gibt nichttriviale (λ_1, λ_2) mit

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}'_1 \lambda_1 + \mathbf{u}'_2 \lambda_2) \cdot \mathbf{x}' &= 0 \\ (\mathbf{u}''_1 \lambda_1 + \mathbf{u}''_2 \lambda_2) \cdot \mathbf{x}'' &= 0. \end{aligned}$$

Diese zwei linearen homogenen Gleichungen in den Unbekannten (λ_1, λ_2) haben genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die **Determinante** verschwindet, d.h.,

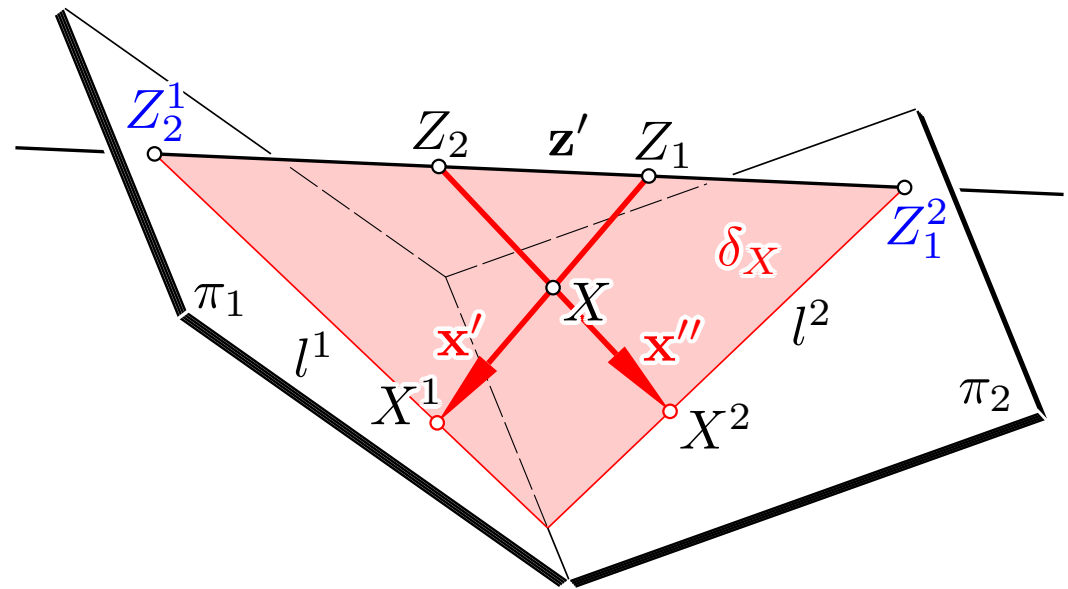
$$\beta(\mathbf{x}', \mathbf{x}'') := (\mathbf{u}'_1 \cdot \mathbf{x}')(\mathbf{u}''_2 \cdot \mathbf{x}'') - (\mathbf{u}'_2 \cdot \mathbf{x}')(\mathbf{u}''_1 \cdot \mathbf{x}'') = \sum_{i,j=0}^2 b_{ij} \xi'_i \xi''_j = 0.$$

Es gibt singuläre Punkte in dieser Korrelation: Z'_2 entspricht allen X'' , und umgekehrt entsprechen alle X' dem Punkt $Z''_1 \implies \text{rk}(b_{ij}) = 2$. □



Ordnerprojektivität bei kalibrierten Bildern

Sind die inneren Orientierungen bekannt, so ist die Matrix $B = (b_{ij})$, welche die Ordnerprojektivität beschreibt, als Produkt einer **schiefsymmetrischen** und einer **orthogonalen Matrix** darstellbar.



Beweis: Wir verwenden die jeweiligen Kamerakoordinaten als homogene Koordinaten $\mathbf{x}' = \overrightarrow{Z_1 X'}$ bzw. $\mathbf{x}'' = \overrightarrow{Z_2 X''}$.

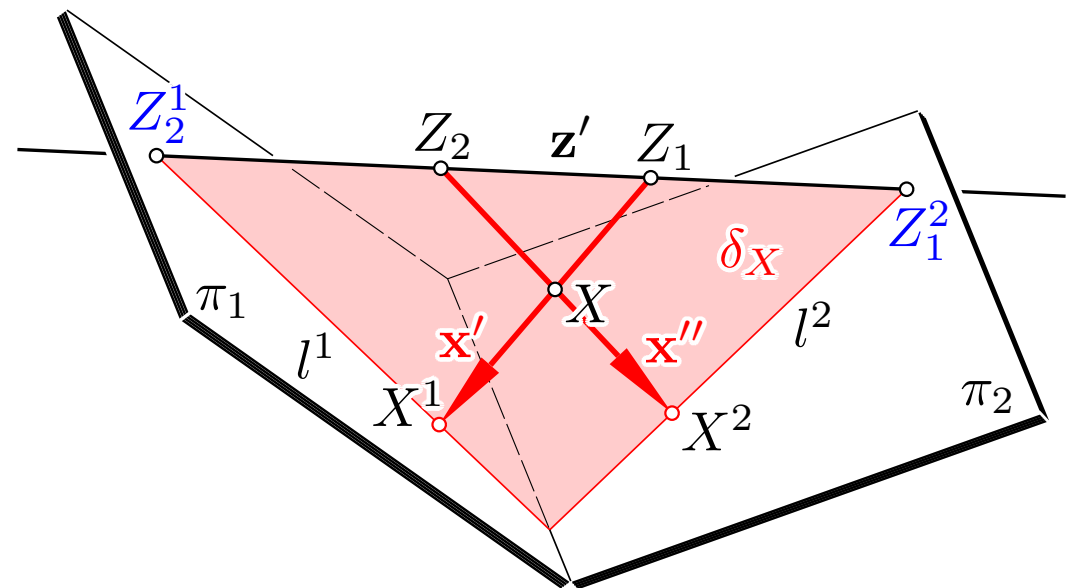
Ordnerprojektivität bei kalibrierten Bildern

Für die Umrechnung vom zweiten Kamera-Koordinatensystem auf das erste gibt es eine orthogonale Matrix R mit

$$\mathbf{x}_1'' = \mathbf{z}' + R \cdot \mathbf{x}_1'' \text{ bei } R^T = R^{-1} \text{ und } \mathbf{z}' = (z'_1, z'_2, z'_3) = \overrightarrow{Z_1 Z_2}.$$

Die Vektoren \mathbf{x}' , \mathbf{x}'' und \mathbf{z}' sind **koplanar** \iff deren Spatprodukt verschwindet, d.h.,

$$0 = \det(\mathbf{x}', \mathbf{z}', \mathbf{x}_1'') = \mathbf{x}' \cdot (\mathbf{z}' \times \mathbf{x}_1'').$$



Ordnerprojektivität bei kalibrierten Bildern

Wir ersetzen das Vektorprodukt $(\mathbf{z}' \times \mathbf{x}_1'')$ durch

$$\mathbf{z}' \times R \cdot \mathbf{x}'' = S_{\mathbf{z}'} \cdot R \cdot \mathbf{x}'' \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -z'_3 & z'_2 \\ z'_3 & 0 & -z'_1 \\ -z'_2 & z'_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

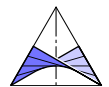
Dabei ist S schiefsymmetrisch und R orthogonal.

$X' \in \delta_X$ bedeutet

$$0 = \mathbf{x}'^T \cdot \underbrace{S_{\mathbf{z}'} \cdot R}_{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{x}'', \quad \text{also} \quad \mathbf{B} = S_{\mathbf{z}'} \cdot R.$$

□

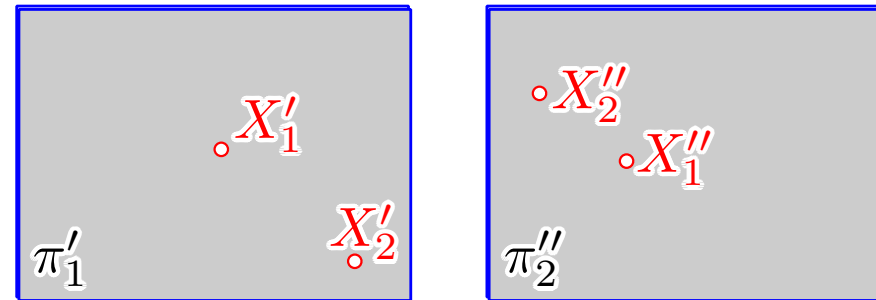
Die Zerlegung von B in diese beiden Faktoren ergibt bereits die relative Lage des zweiten Kamerasystems gegenüber dem ersten !



Was bedeutet 'Rekonstruktion'

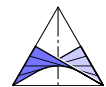
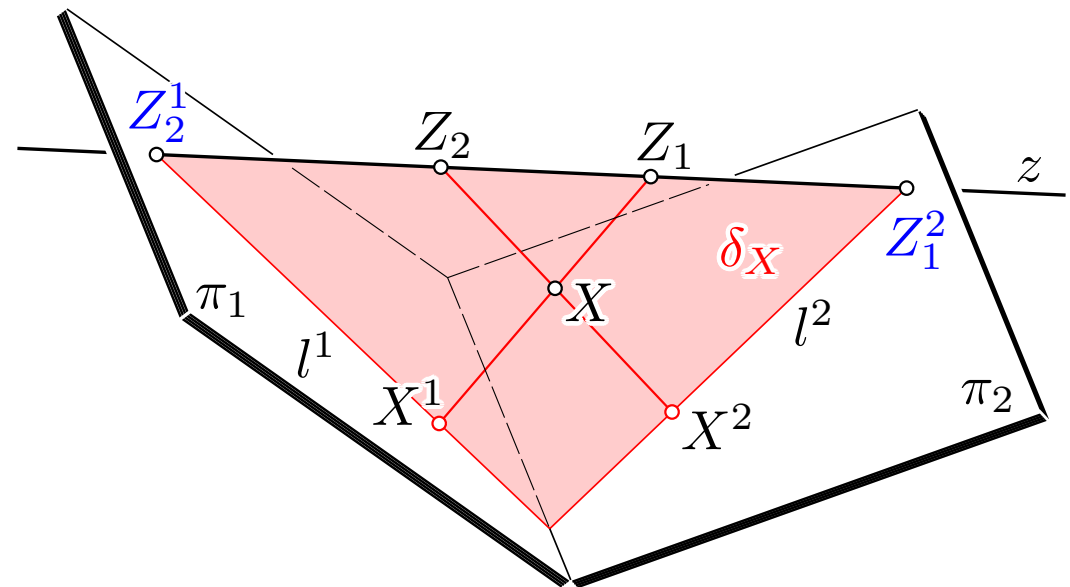
Was bedeutet Rekonstruktion?

GEGEBEN: Zwei kalibrierte oder nicht kalibrierte Bilder.



GESUCHT: 'Aufnahmesituation', d.h.,

- bestimme die **relative Lage** der zwei Zentralprojektionen und
- die **Lage der Raumpunkte X** aus den jeweiligen zwei Rissen (X', X'') .



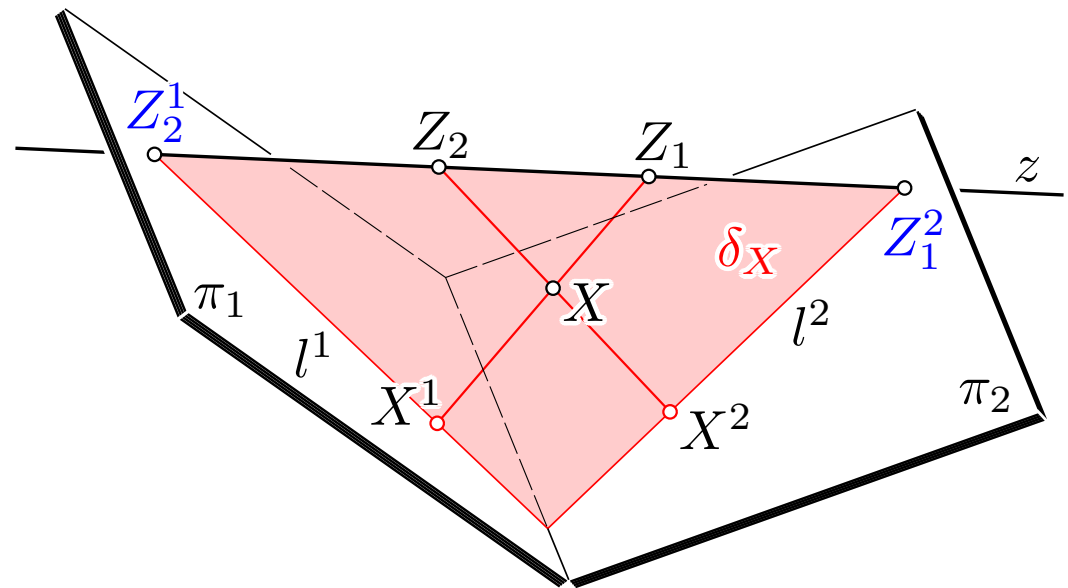
Erster Hauptsatz

Satz:

Aus zwei *nicht kalibrierten Bildern* mit gegebener Ordnerprojektivität ist *das dargestellte Objekt bis auf eine kollineare Transformation eindeutig rekonstruierbar*.

Beweisskizze: Wir platzieren die zwei Bilder derart im Raum, dass die Paare zugeordnete Kerngeraden komplanar liegen. Dann ergeben zwei auf der Kernachse z willkürlich gewählte Zentren Z_1, Z_2 ein mögliches Urbild.

Jede andere Aufnahmesituation führt auf ein *kollinear* transformiertes Urbild. \square



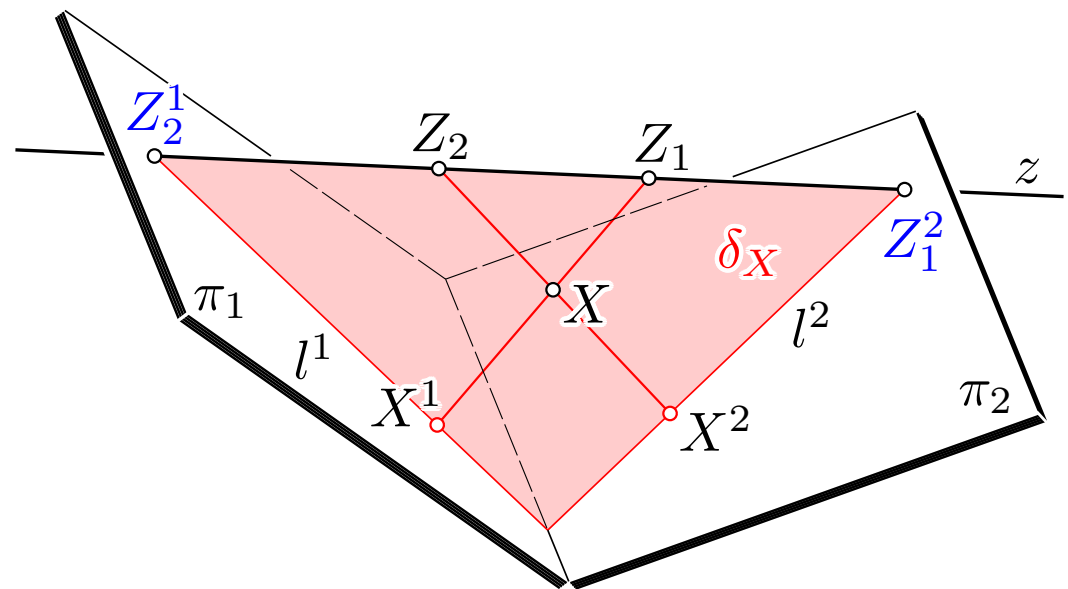
Hauptsatz der Photogrammetrie

Satz (S. FINSTERWALDER, 1899):

Aus zwei *kalibrierten Bilder* mit gegebener Ordnerprojektivität ist das *dargestellte Objekt* bis auf eine *Ähnlichkeit* eindeutig rekonstruierbar.

Beweisskizze: Nun sind die beiden Kernebenenbüschel *kongruent*, und sie können durch eine Bewegung elementeweise zur Deckung gebracht werden. Wird dann relative zu Z_1 das Zentrum Z_2 auf z festgesetzt, so entsteht ein mögliches Urbild.

Jede andere Wahl von Z_2 ergibt ein *ähnliches* Urbildobjekt. \square



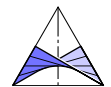
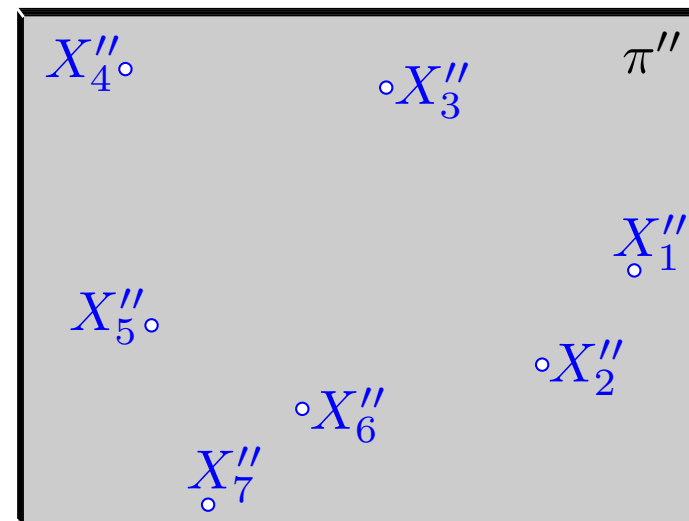
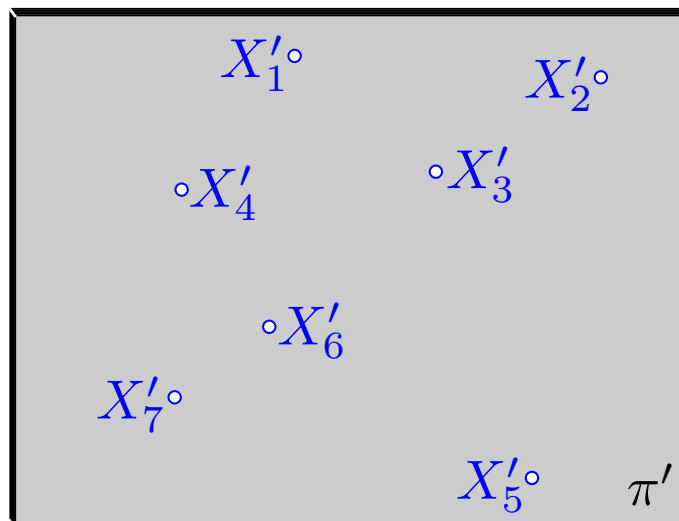
Kernpunktbestimmung — geometrisch

Problem der Projektivität:

GEGEBEN: **7** Paare entsprechender Punkte $(X'_1, X''_1), \dots, (X'_7, X''_7)$.

GESUCHT: Ein Punktepaar (S', S'') (=epipoles) mit der Eigenschaft, dass projektive Büschel entstehen

$$S'([S'X'_1], \dots, [S'X'_7]) \propto S''([S'X''_1], \dots, [S''X''_7]).$$



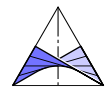
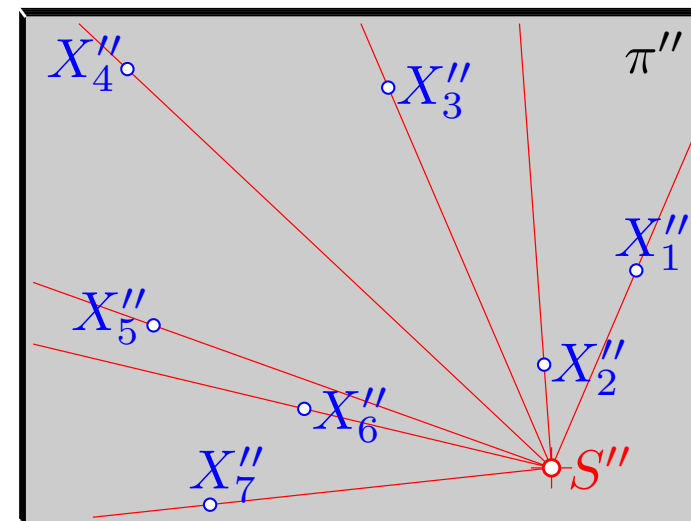
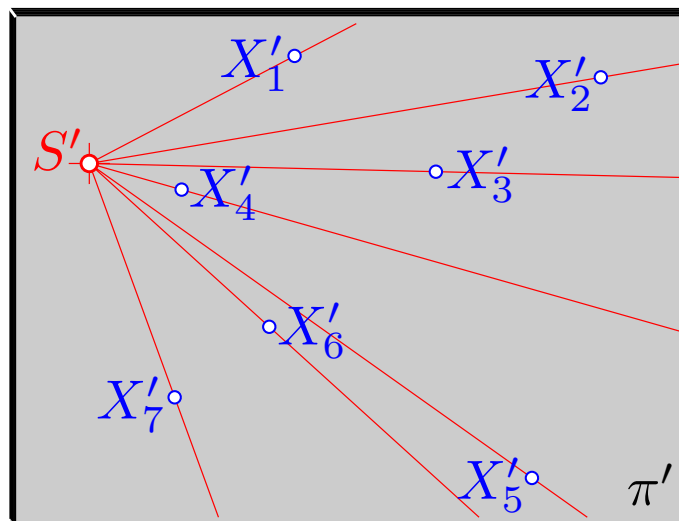
Kernpunktbestimmung — geometrisch

Problem der Projektivität:

GEGEBEN: **7** Paare entsprechender Punkte $(X'_1, X''_1), \dots, (X'_7, X''_7)$.

GESUCHT: Ein Punktepaar (S', S'') (=epipoles) mit der Eigenschaft, dass projektive Büschel entstehen

$$S'([S'X'_1], \dots, [S'X'_7]) \propto S''([S''X''_1], \dots, [S''X''_7]).$$



Kernpunktbestimmung — analytisch

Satz: Liegen **7** Paare entsprechender Punkte $(X'_1, X''_1), \dots, (X'_7, X''_7)$ vor, so ist die *Bestimmung der Kernpunkte* ein *kubisches Problem*.

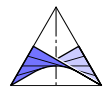
Beweis: Die 7 Punktepaare ergeben 7 lineare homogene Gleichungen

$$\beta(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}''_i) = \mathbf{x}_i'^T \cdot B \cdot \mathbf{x}_i'' = 0, \quad i = 1, \dots, 7,$$

für die 9 Elemente in der (3×3) -Matrix $B = (b_{ij})$ (engl.: *essential matrix*).

$\det(b_{ij}) = 0$ ergibt eine zusätzliche kubische Gleichung, welche die b_{ij} bis auf einen gemeinsamen Faktor festlegt. \square

Bei unscharfen Daten (z.B. Messdaten) ist es empfehlenswert, mehr als 7 Punktepaare zu verwenden und dafür anschließend Methoden der linearen Optimierung zur Bestimmung der 'bestmöglichen' Matrix $B = (b_{ij})$:



Kernpunktbestimmung — analytisch

Satz: Liegen **7** Paare entsprechender Punkte $(X'_1, X''_1), \dots, (X'_7, X''_7)$ vor, so ist die *Bestimmung der Kernpunkte* ein *kubisches Problem*.

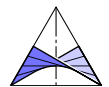
Beweis: Die 7 Punktepaare ergeben 7 lineare homogene Gleichungen

$$\beta(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}''_i) = \mathbf{x}_i'^T \cdot B \cdot \mathbf{x}_i'' = 0, \quad i = 1, \dots, 7,$$

für die 9 Elemente in der (3×3) -Matrix $B = (b_{ij})$ (engl.: *essential matrix*).

$\det(b_{ij}) = 0$ ergibt eine zusätzliche kubische Gleichung, welche die b_{ij} bis auf einen gemeinsamen Faktor festlegt. \square

Bei *unscharfen Daten* (z.B. Messdaten) ist es empfehlenswert, mehr als 7 Punktepaare zu verwenden und dafür anschließend *Methoden der linearen Optimierung* zur Bestimmung der 'bestmöglichen' Matrix $B = (b_{ij})$:



Kernpunktbestimmung — analytisch

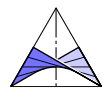
1) Sei A die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Elemente in der Matrix B . Dann ist die 'beste Lösung' dieses überbestimmten Systems ein **Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert der Matrix $A^T \cdot A$** .

2) Da die Matrix B den Rang 2 haben muß, benutzen wir die 'Projection auf den Raum der singulären Matrizen'. Das heißt, führt die Singulärwertzerlegung von B auf die Darstellung

$$B = U \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot V \text{ mit orthogonalen } U, V \text{ und } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3,$$

dann ist im nicht kalibrierten Fall $B = U \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0) \cdot V$ optimal
und im kalibrierten Fall

$$B = U \cdot \text{diag}(\lambda, \lambda, 0) \cdot V \text{ mit } \lambda_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2.$$



Kernpunktbestimmung — analytisch

1) Sei A die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der Elemente in der Matrix B . Dann ist die 'beste Lösung' dieses überbestimmten Systems ein **Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert der Matrix $A^T \cdot A$** .

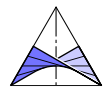
2) Da die Matrix B den **Rang 2** haben muß, benutzen wir die 'Projection auf den Raum der singulären Matrizen'. Das heißt, führt die **Singulärwertzerlegung** von B auf die Darstellung

$$B = U \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot V \text{ mit orthogonalen } U, V \text{ und } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3,$$

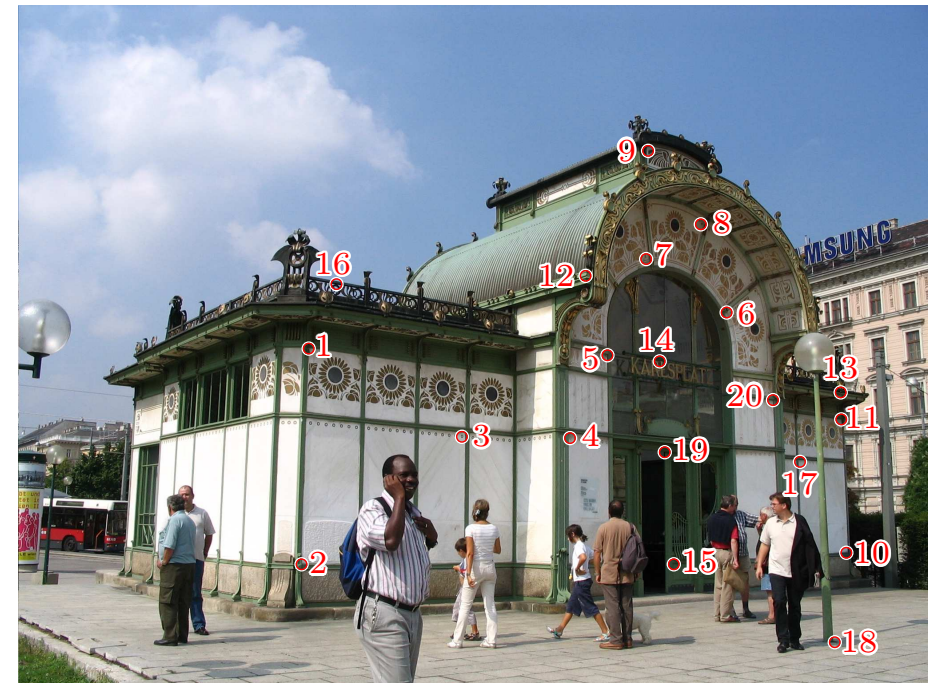
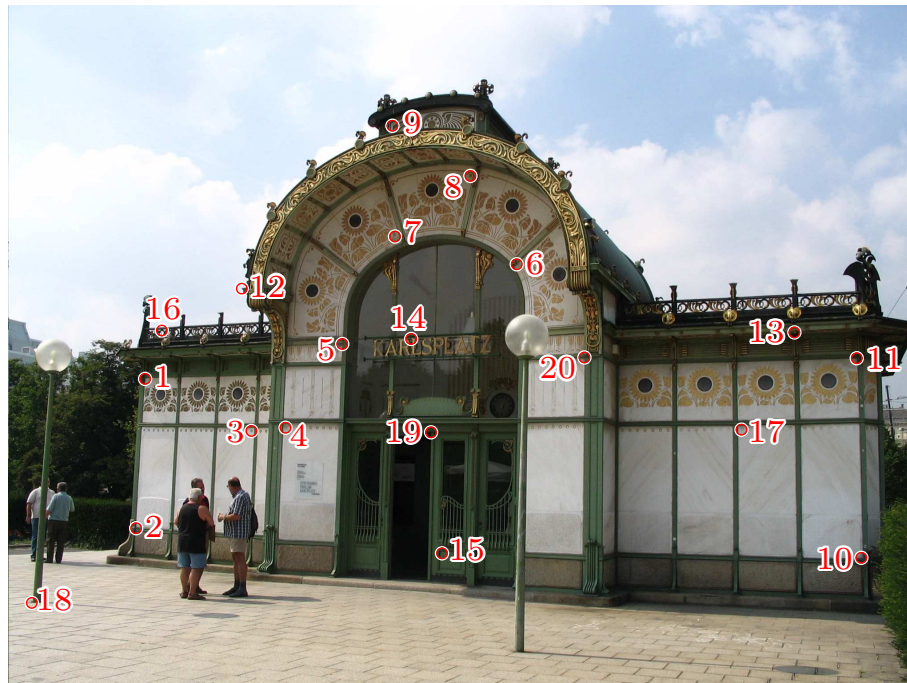
dann ist im **nicht kalibrierten Fall** $B = U \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0) \cdot V$ optimal

und im **kalibrierten Fall**

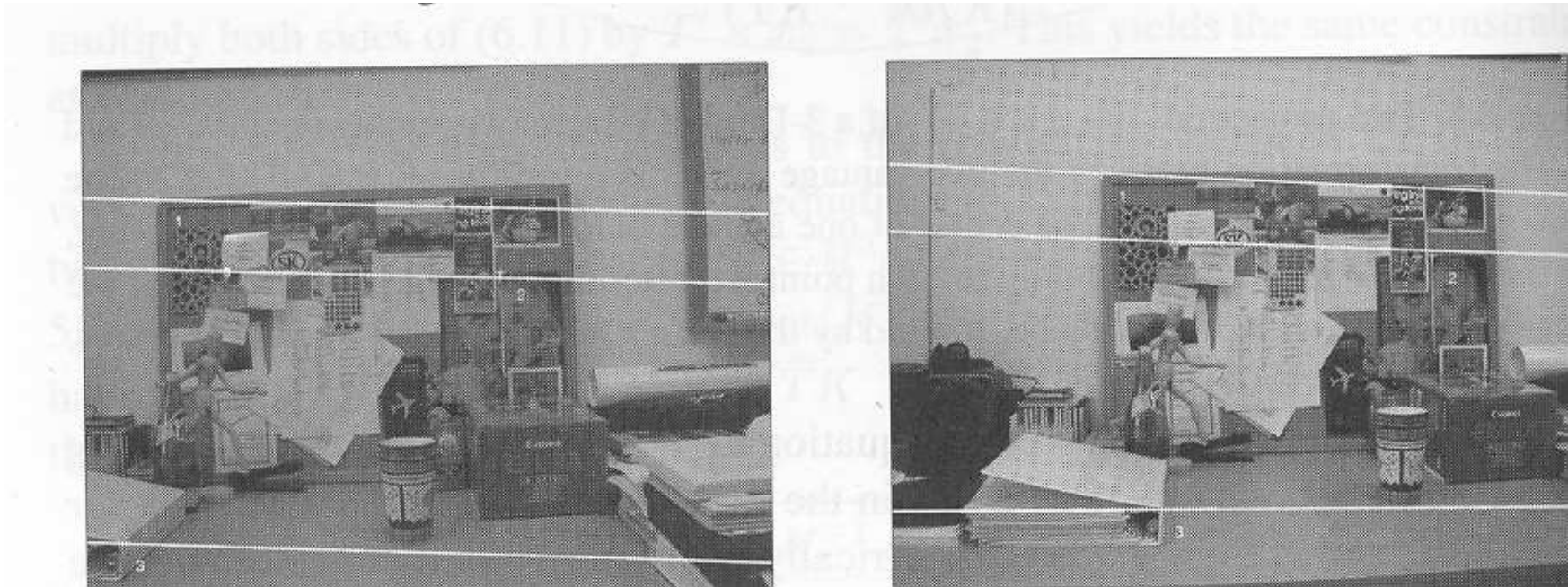
$$B = U \cdot \text{diag}(\lambda, \lambda, 0) \cdot V \text{ mit } \lambda_1 = (\lambda_1 + \lambda_2)/2.$$



1. Schritt 1: Wähle mindestens 7 Passpunkte



2. Schritt: Berechne die Matrix B



Zwei Bilder mit Paaren entsprechender Kerngeraden

Bemerkung: Im **kalibrierten** Fall genügen ≥ 5 **Passpunkte**, denn bei der Zerlegung $B = S_z \cdot R$ hängt jeder Faktor nur von 3 Parametern ab. Wegen der Homogenität bleiben 5 Unbekannte.

2. Schritt: Berechne die Matrix B



Paare entsprechender Kerngeraden

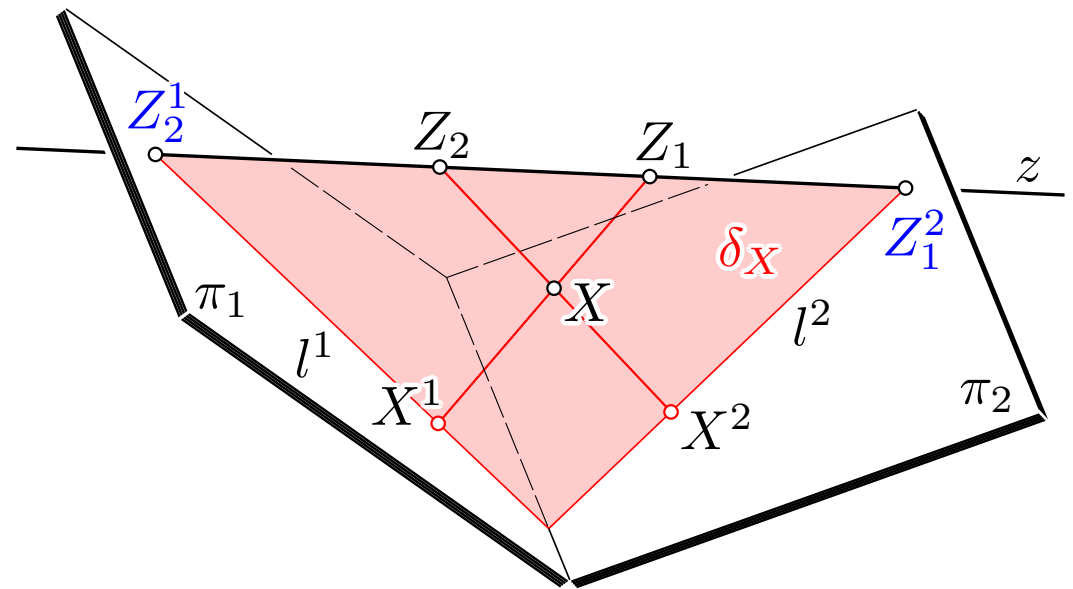
3. Schritt: Rekonstruktion der Aufnahmesituation

- Die für die beiden Bilder bestimmten Kernebenenbündel sind im nicht kalibrierten Fall zueinander **projektiv**, im kalibrierten Fall **kongruent**.

- Gemäß der beiden Hauptsätze können die beiden Bündel **elemente-weise zur Deckung** gebracht werden.

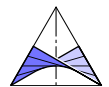
Im kalibrierten Fall bestimmen die Faktoren der Zerlegung $B = S_{z'} \cdot R$ bereits die **relative Lage der beiden Kamera-Koordinatensysteme**.

- Für jedes Paar (X', X'') entsprechender Risse sind die Sehstrahlen Z_1X' und Z_2X'' komplanar, und sie **schneiden** einander im gesuchten Raumpunkt X .

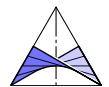


Literatur

- H. BRAUNER: *Lehrbuch der konstruktiven Geometrie*. Springer, Wien 1986.
- H. BRAUNER: *Lineare Abbildungen aus euklidischen Räumen*. Beitr. Algebra Geom. **21**, 5–26 (1986).
- A. DÜR: *An Algebraic Equation for the Central Projection*. J. Geometry Graphics **7**, 137–143 (2003).
- D. HAASE, H. STACHEL: *Almost-orthonormal Vector Systems*. Beitr. Algebra Geom. **37**, 367–381 (1996).
- V. HAVEL: *O rozkladu singulárních lineárních transformací*. Časopis Pěst. Mat. **85**, 439–447 (1960).



- H. HAVLICEK: *On the Matrices of Central Linear Mappings*. Math. Bohem. **121**, 151–156 (1996).
- M. HOFFMANN: *On the Theorems of Central Axonometry*. J. Geometry Graphics **2**, 151–155 (1997).
- E. KRUPPA: *Zur achsonometrischen Methode der darstellenden Geometrie*. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **119**, 487–506 (1910).
- YI MA, ST. SOATTO, J. KOŠECKÁ, S. SH. SASTRY: *An Invitation to 3-D Vision*. Springer-Verlag, New York 2004.
- H. STACHEL: *Mehrdimensionale Axonometrie*. Proceedings of the Congress of Geometry, Thessaloniki 1987, 159–168.
- H. STACHEL: *Parallel Projections in Multidimensional Space*. Proceedings of Compugraphics '91, Sesimbra (Portugal) 1991: Vol. I, 119–128.



- H. STACHEL: *Zur Kennzeichnung der Zentralprojektionen nach H. Havlicek*. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **204**, 33–46 (1995).
- H. STACHEL: *On Arne Dür's Equation Concerning Central Axonometries*. J. Geometry Graphics **8**, 215–224 (2004).
- E. STIEFEL: *Zum Satz von Pohlke*. Comment. Math. Helv. **10**, 208–225 (1938).
- E. STIEFEL: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*. 3. Aufl., Basel, Stuttgart 1971.
- J. SZABÓ, H. STACHEL, H. VOGEL: *Ein Satz über die Zentralaxonometrie*. Sitzungsber., Abt. II, österr. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. **203**, 3–11 (1994).
- K. VALA: *A propos du théorème de Pohlke*. Ann. Acad. scient. Fennicae **270**, 3–5 (1959).

