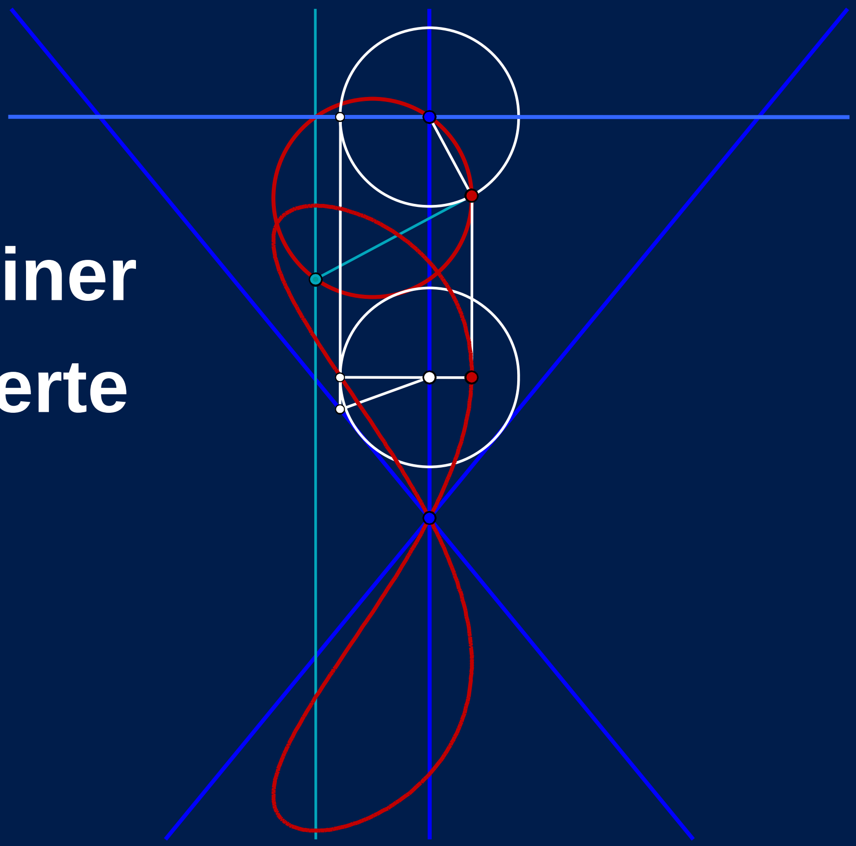


Durch ebene Schnitte einer Drehkegelfläche induzierte Ortskurven

27. Fortbildungstagung für Geometrie

Strobl, November 06 – 09, 2006

Marco Hamann

Einleitung

Aufgabe:

Man untersuche den geometrischen Ort aller Brennpunkte von (nicht-zerfallenden) Kegelschnitten, die durch ein Ebenenbüschel aus einer Drehkegelfläche geschnitten werden.

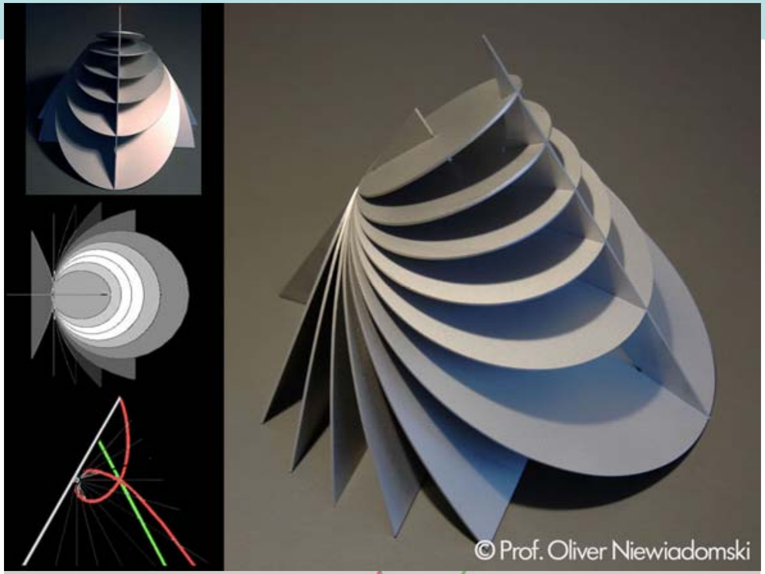
Der Einfluss der Lage des Trägers des Ebenenbüschels in Bezug auf die Drehkegelfläche ist zu untersuchen.

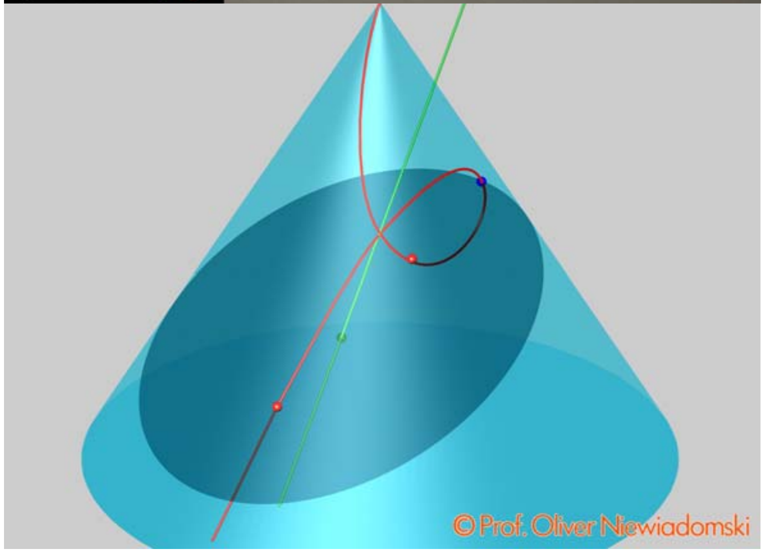
Einleitung

Aufgabe:

Man untersuche den geometrischen Ort aller Brennpunkte von (nicht-zerfallenden) Kegelschnitten, die durch ein Ebenenbüschel aus einer Drehkegelfläche geschnitten werden.

Der Einfluss der Lage des Trägers des Ebenenbüschels in Bezug auf die Drehkegelfläche ist zu untersuchen.





Prof. Oliver Niewiadomski, Hochschule für Künste Bremen

Gliederung

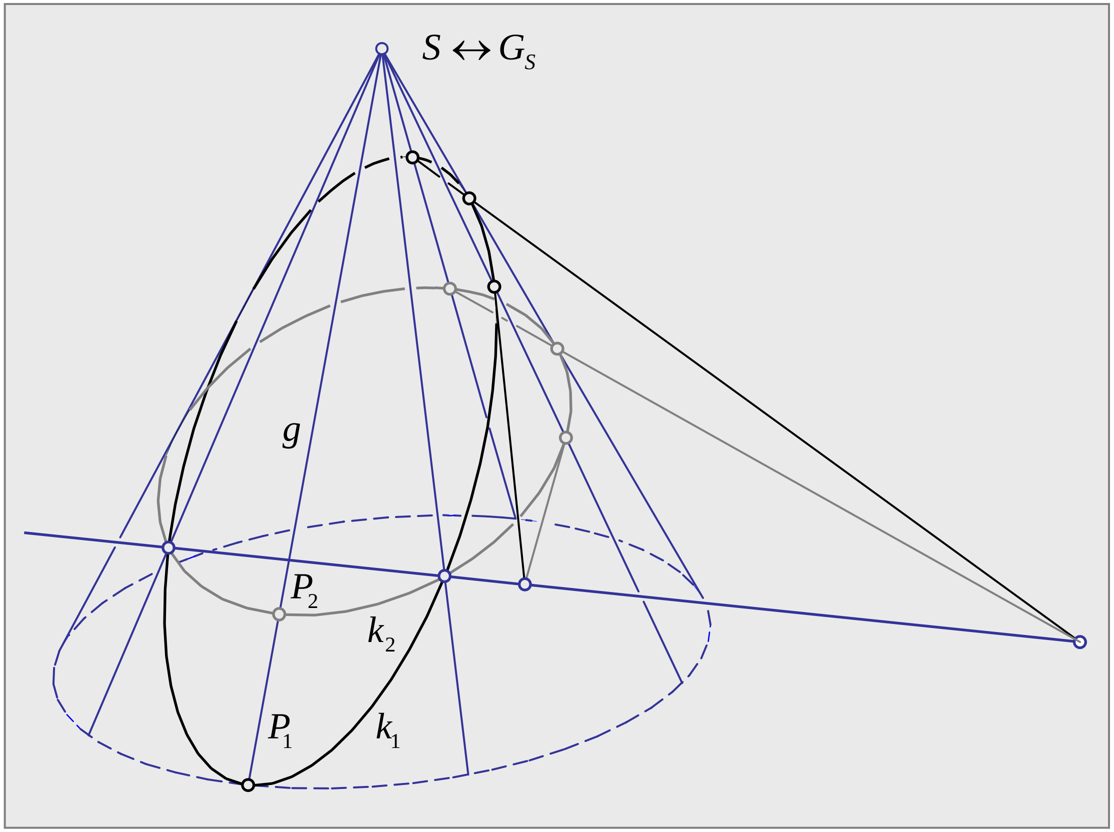
- Darstellungsgeometrische Erzeugung unter Verwendung der Figur von DANDELIN,
- Kennzeichnung der Kurven (im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum), Varianten ihrer Konstruktion,
- Bemerkenswerte Eigenschaften und ihre Darstellung,

Perspektivität zwischen Kegelschnitten

Zwei ebene Schnitte k_1, k_2 einer (Dreh-)Kegelfläche sind perspektiv bezüglich ihrer Erzeugenden.

$S \ldots$ Spitze der - (Träger des Bündels G_S)

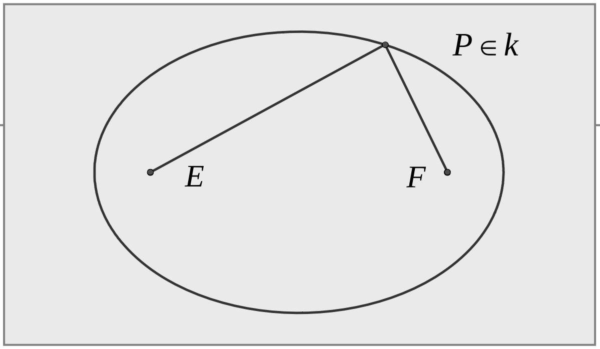
$g \ldots$ Erzeugende der Kegelfläche (Bündelstrahl)



Brennpunkte eines Kegelschnittes

Die **Brennpunkte** der Kegelschnitte sind Begriffe der euklidischen Geometrie.

↓

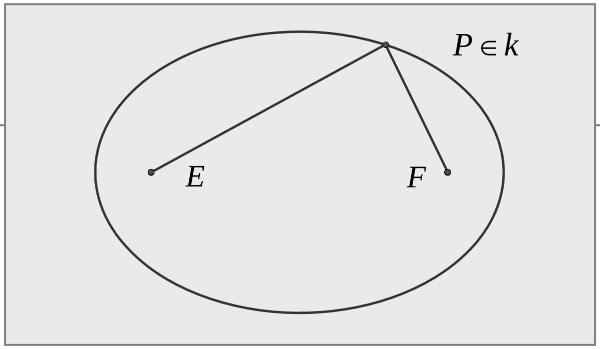


1. Planimetrische Definition der Kegelschnitte über ihre Brennpunkte (und Leitlinie); z.B.: Gärtner-Konstruktion der Ellipse.
2. Die Brennpunkte lassen sich räumlich als Berührpunkte der DANDELIN-Kugeln mit der Schnittebene der Drehkegelfläche deuten.
3. Projektive Kennzeichnung: Die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind die eigentlichen Schnittpunkte der aus den absoluten Punkten an ihn legbaren Tangenten.

Brennpunkte eines Kegelschnittes

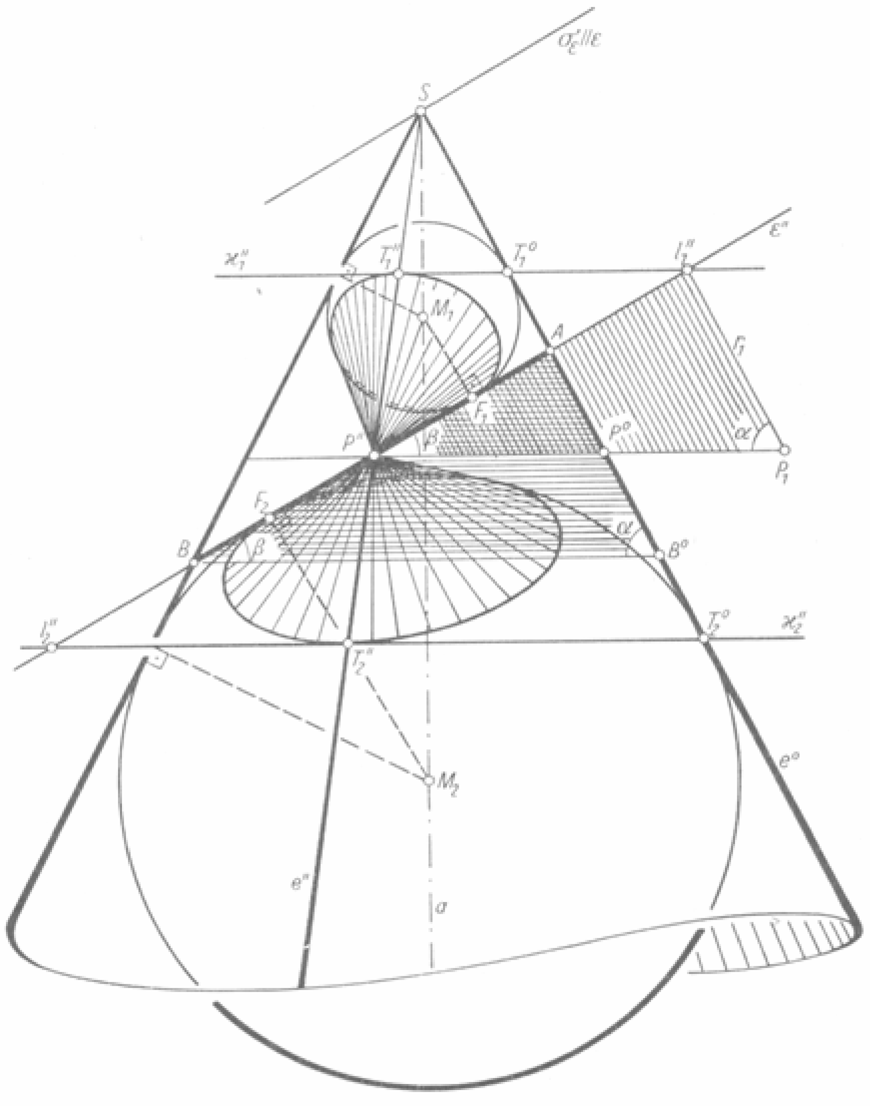
Die **Brennpunkte** der Kegelschnitte sind Begriffe der euklidischen Geometrie.

↓



1. Planimetrische Definition der Kegelschnitte über ihre Brennpunkte (und Leitlinie); z.B.: Gärtner-Konstruktion der Ellipse.
2. Die Brennpunkte lassen sich räumlich als Berührpunkte der DANDELIN-Kugeln mit der Schnittebene der Drehkegelfläche deuten.
3. Projektive Kennzeichnung: Die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind die eigentlichen Schnittpunkte der aus den absoluten Punkten an ihn legbaren Tangenten.

Darstellungsgeometrische Verfahren



Figur von DANDELIN

Quelle: R: Bereis:

Darstellende Geometrie. Bd. 1

Darstellungsgeometrische Verfahren

Konstruktion im Grund – Aufriss –Verfahren

1. Die Aufrissebene wird so gewählt, dass die (tangential an Φ liegende) Trägergerade darin projizierend ist.
   O. B. d. A. wird die Grundrissebene parallel zur Achse a von Φ gewählt.
2. Die Aufrisse der Brennpunkte sind unter Verwendung der Figur von DANDELIN als Berührpunkte der Kugelumrisse mit der (projizierenden) Ebene ε konstruierbar.
3. Ihre Grundrisse lassen sich über die Konstruktion der Fallgeraden durch den Schnittpunkt $T := \varepsilon \cap a$ bezüglich einer mit ihm inzidierenden Ebene $\Pi := T \perp a$ festlegen (wiederholtes Konstruieren der Normalebene).

Darstellungsgeometrische Verfahren

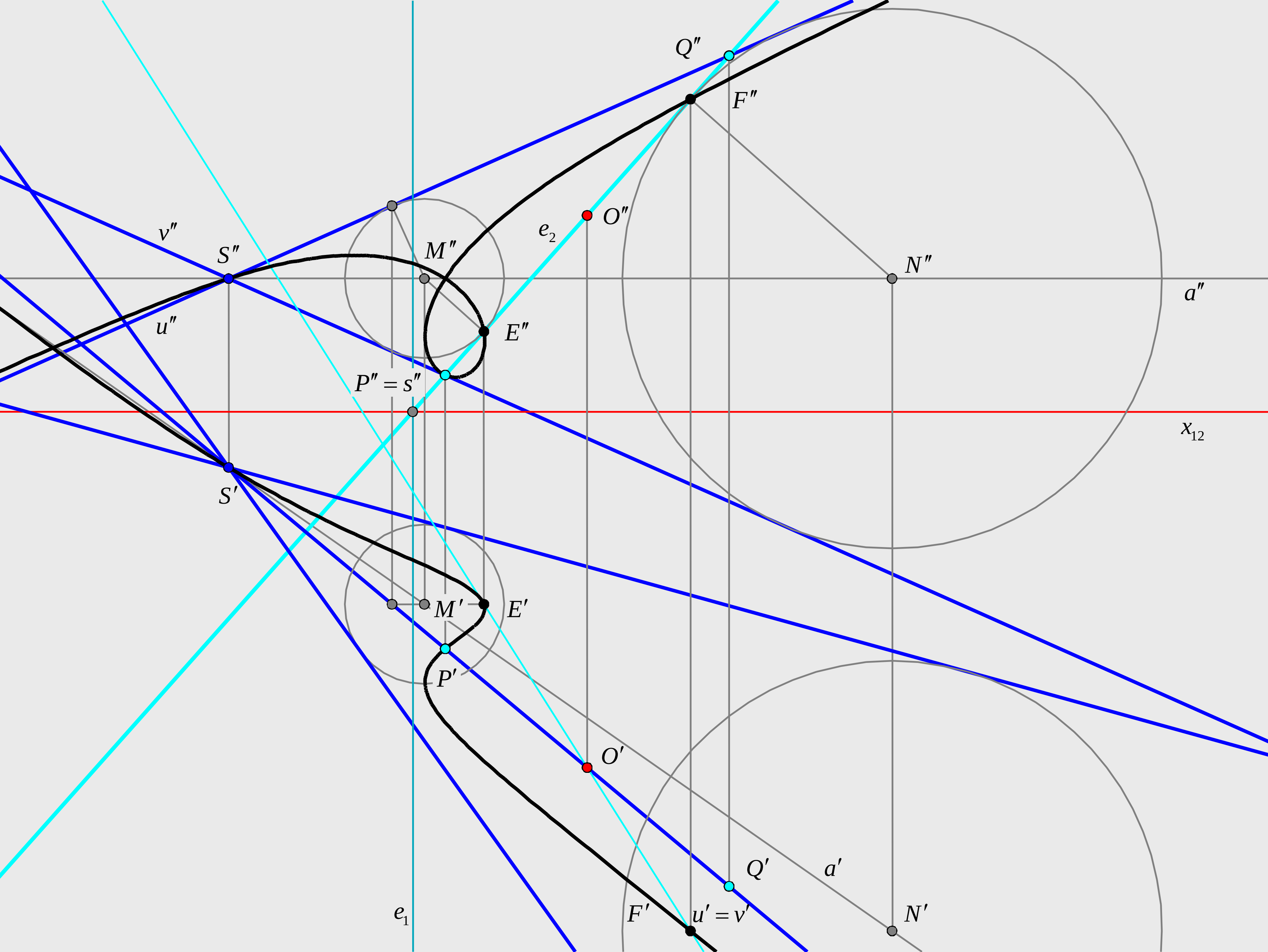
Konstruktion im Grund – Aufriss –Verfahren

1. Die Aufrissebene wird so gewählt, dass die (tangential an Φ liegende) Trägergerade darin projizierend ist.
   O. B. d. A. wird die Grundrissebene parallel zur Achse a von Φ gewählt.
2. Die Aufrisse der Brennpunkte sind unter Verwendung der Figur von DANDELIN als Berührpunkte der Kugelumrisse mit der (projizierenden) Ebene ε konstruierbar.
3. Ihre Grundrisse lassen sich über die Konstruktion der Fallgeraden durch den Schnittpunkt $T := \varepsilon \cap a$ bezüglich einer mit ihm inzidierenden Ebene $\Pi := T \perp a$ festlegen (wiederholtes Konstruieren der Normalebene).

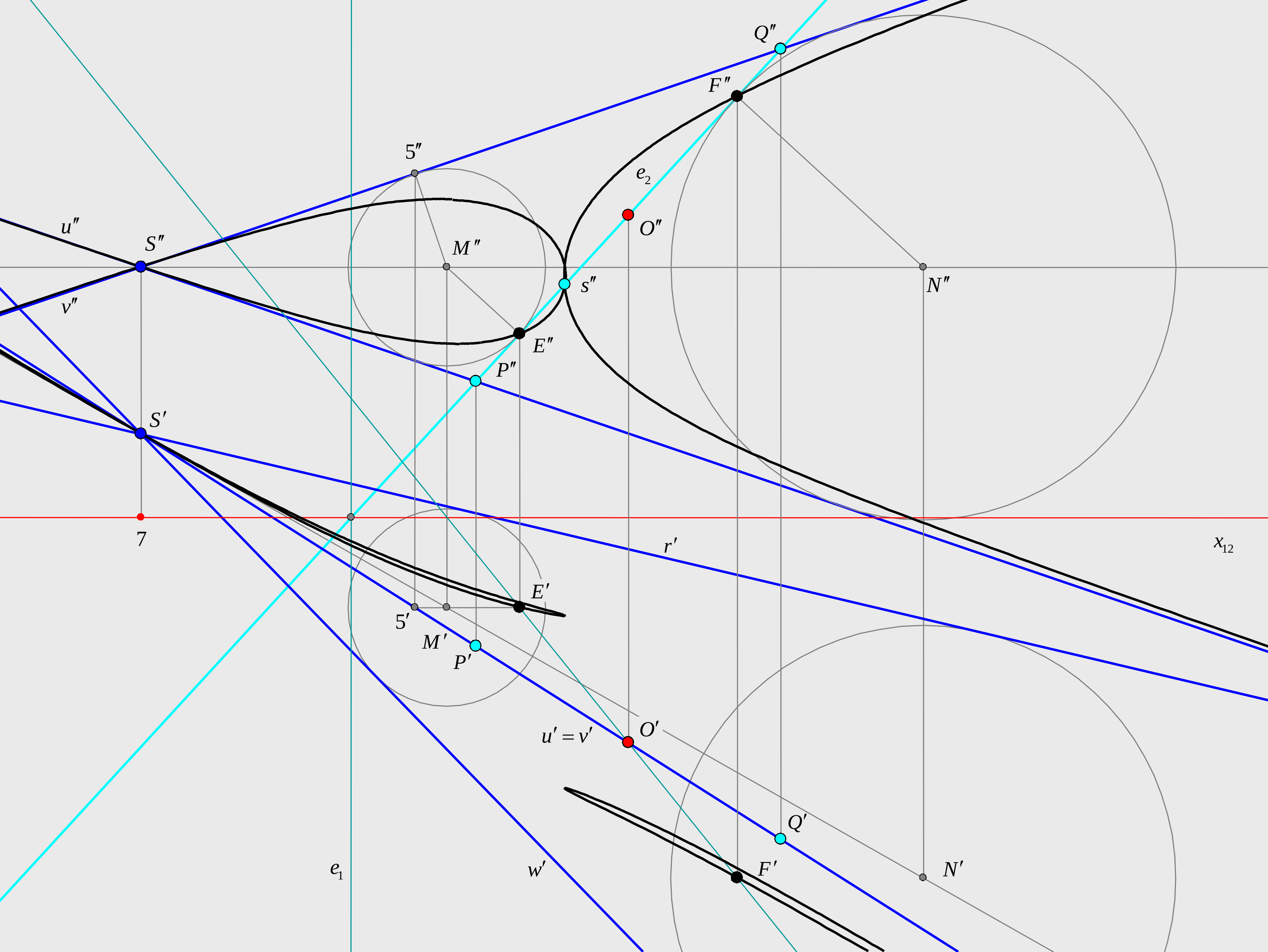
Darstellungsgeometrische Verfahren

Konstruktion im Grund – Aufriss –Verfahren

1. Die Aufrissebene wird so gewählt, dass die (tangential an Φ liegende) Trägergerade darin projizierend ist.
   O. B. d. A. wird die Grundrissebene parallel zur Achse a von Φ gewählt.
2. Die Aufrisse der Brennpunkte sind unter Verwendung der Figur von DANDELIN als Berührpunkte der Kugelumrisse mit der (projizierenden) Ebene ε konstruierbar.
3. Ihre Grundrisse lassen sich über die Konstruktion der Fallgeraden durch den Schnittpunkt $T := \varepsilon \cap a$ bezüglich einer mit ihm inzidierenden Ebene $\Pi := T \perp a$ festlegen (wiederholtes Konstruieren der Normalebene).



Q''
F''
O''
e_2
v''
S''
M''
N''
a''
u''
E''
$P'' = s''$
x_{12}
S'
M'
E'
P'
O'
Q'
a'
e_1
F'
$u' = v'$
N'

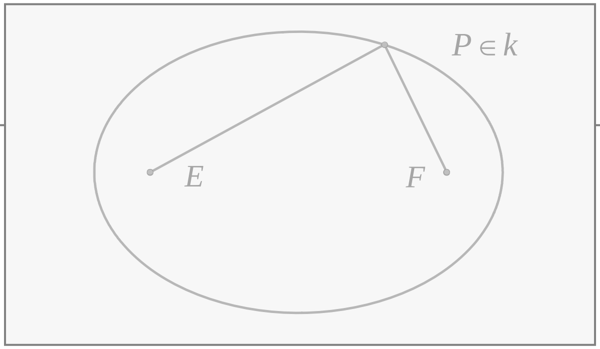


Q″
F″
5″
e₂
O″
u″
S″
M″
N″
s″
v″
E″
P″
S′
7
r′
x₁₂
E′
5′
M′
P′
u′ = v′
O′
Q′
F′
N′
e₁
w′

Brennpunkte eines Kegelschnittes

Die **Brennpunkte** der Kegelschnitte sind Begriffe der euklidischen Geometrie.

↓



1. Planimetrische Definition der Kegelschnitte über ihre Brennpunkte (und Leitlinie); z.B.: Gärtner-Konstruktion der Ellipse.

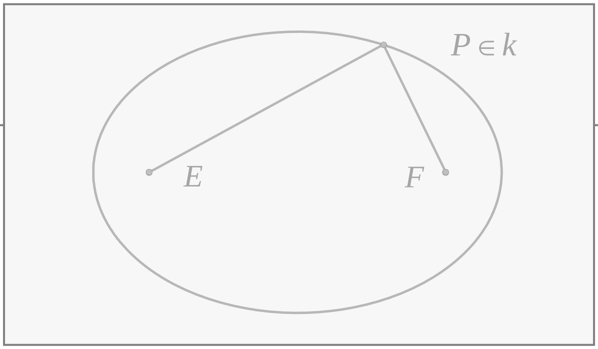
2. Die Brennpunkte lassen sich räumlich als Berührpunkte der DANDELIN-Kugeln mit der Schnittebene der Drehkegelfläche deuten.

3. Projektive Kennzeichnung: Die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind die eigentlichen Schnittpunkte der aus den absoluten Punkten an ihn legbaren Tangenten.

Brennpunkte eines Kegelschnittes

Die **Brennpunkte** der Kegelschnitte sind Begriffe der euklidischen Geometrie.

↓



1. Planimetrische Definition der Kegelschnitte über ihre Brennpunkte (und Leitlinie); z.B.: Gärtner-Konstruktion der Ellipse.

2. Die Brennpunkte lassen sich räumlich als Berührpunkte der DANDELIN-Kugeln mit der Schnittebene der Drehkegelfläche deuten.

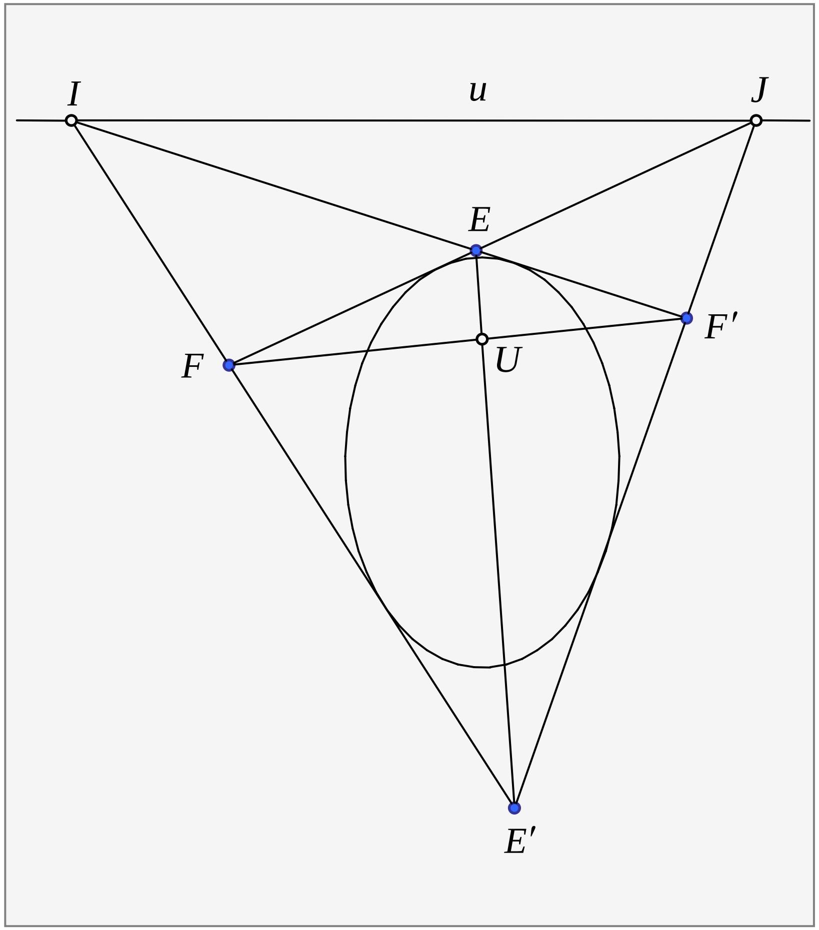
3. Projektive Kennzeichnung: Die Brennpunkte eines Kegelschnittes sind die eigentlichen Schnittpunkte der aus den absoluten Punkten an ihn legbaren Tangenten.

! **Beachte**: Projektiver Abschluss und komplexe Erweiterung notwendig.

Brennpunkte eines Kegelschnittes

Die zwei Paare von Tangenten an einen Kegelschnitt aus den absoluten Kreispunkten erzeugen ein (vollständiges) Viereck mit den Gegeneckenpaaren (E, E'), (F, F') und (I, J).

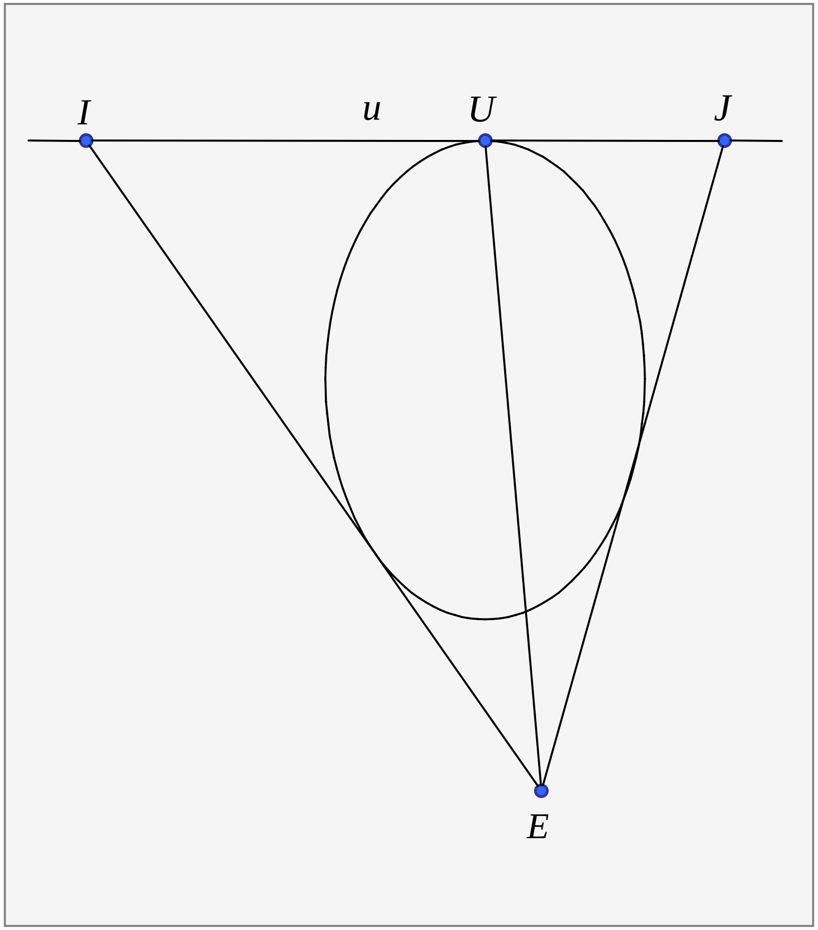
Die Punkte E, E', F und F' heißen **Brennpunkte** des Kegelschnittes.



Brennpunkte eines Kegelschnittes

Eine Parabel berührt die uneigentliche Gerade u in U.
In diesem Fall existiert genau ein eigentlicher **Brennpunkt** E.

Die (uneigentlichen) Punkte E', F und F' fallen mit U, I und J zusammen.

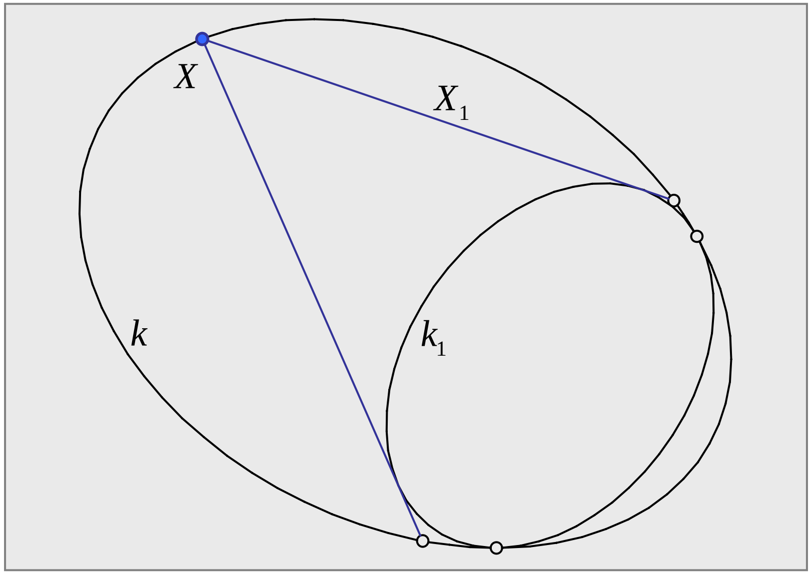


Mehrdeutige geometrische Verwandtschaften

Eine **$[n, n_1]$-deutige Korrespondenz** zwischen Grundgebilden liegt vor, wenn - vermittelt durch eine algebraische Korrespondenzgleichung - jedem Element X des ersten Gebildes n_1 Elemente X_1 des zweiten Gebildes und jedem aus diesem n Elemente aus jenem zugeordnet sind.

(R. STURM: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Bd. 1)

Beispiel:
Die Korrespondenz $k \overset{2,2}{\barwedge} k_1$ zwischen den Punkten $X \in k$ und den Geraden $X_1 \in k_1$ (Tangenten an k_1).

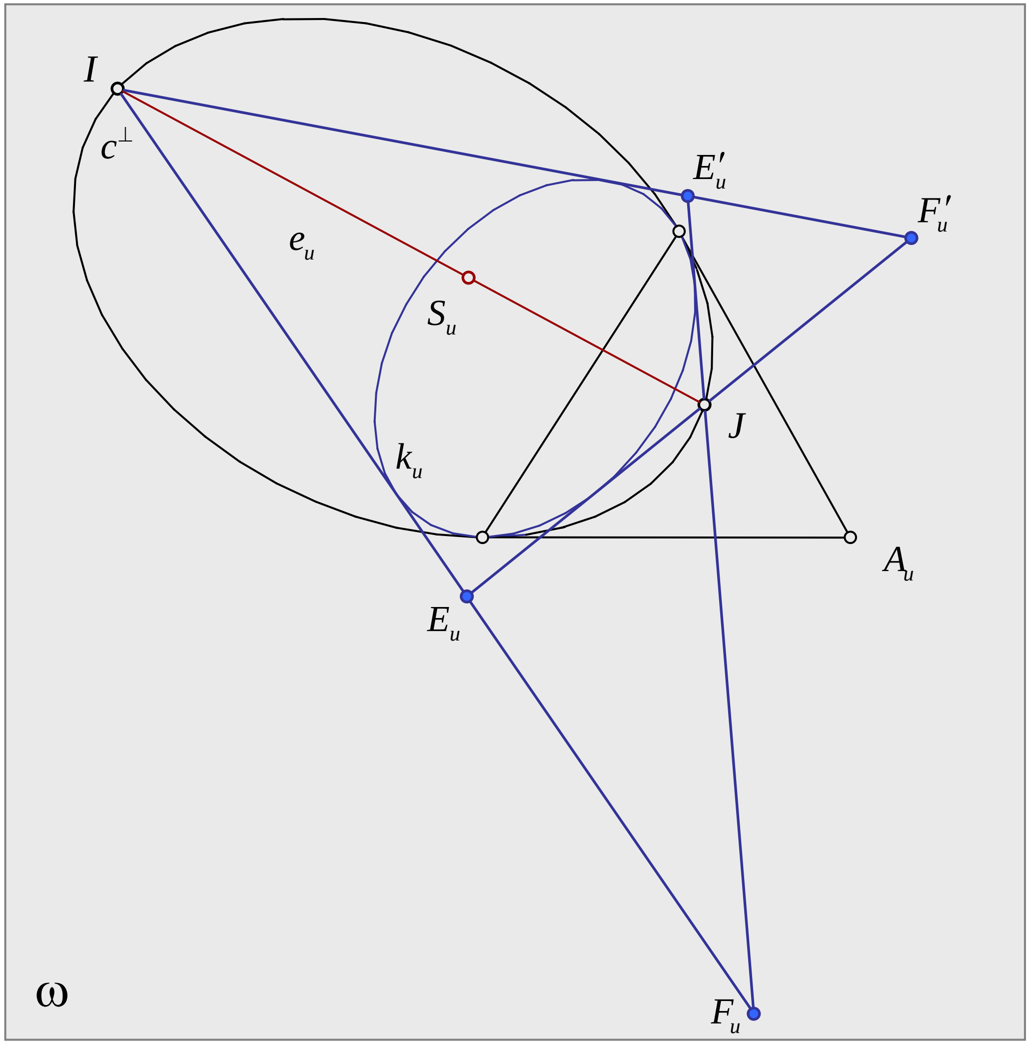


Projektivgeometrische Erzeugung der Kurven

Perspektivität $I \overline{\overline{\wedge}} J$ der Punktreihe $P_{c^\perp}$ vermöge des Geradenbüschels G_{S_u}

Korrespondenz $\overset{2,2}{\overline{\wedge}}$ zwischen der Punktreihe $P_{c^\perp}$ und dem Tangentenbüschel G_{k_u}

Erzeugnis resultierender projektiver Verwandtschaft in G_{k_u} ist Kurve 4. Ordnung

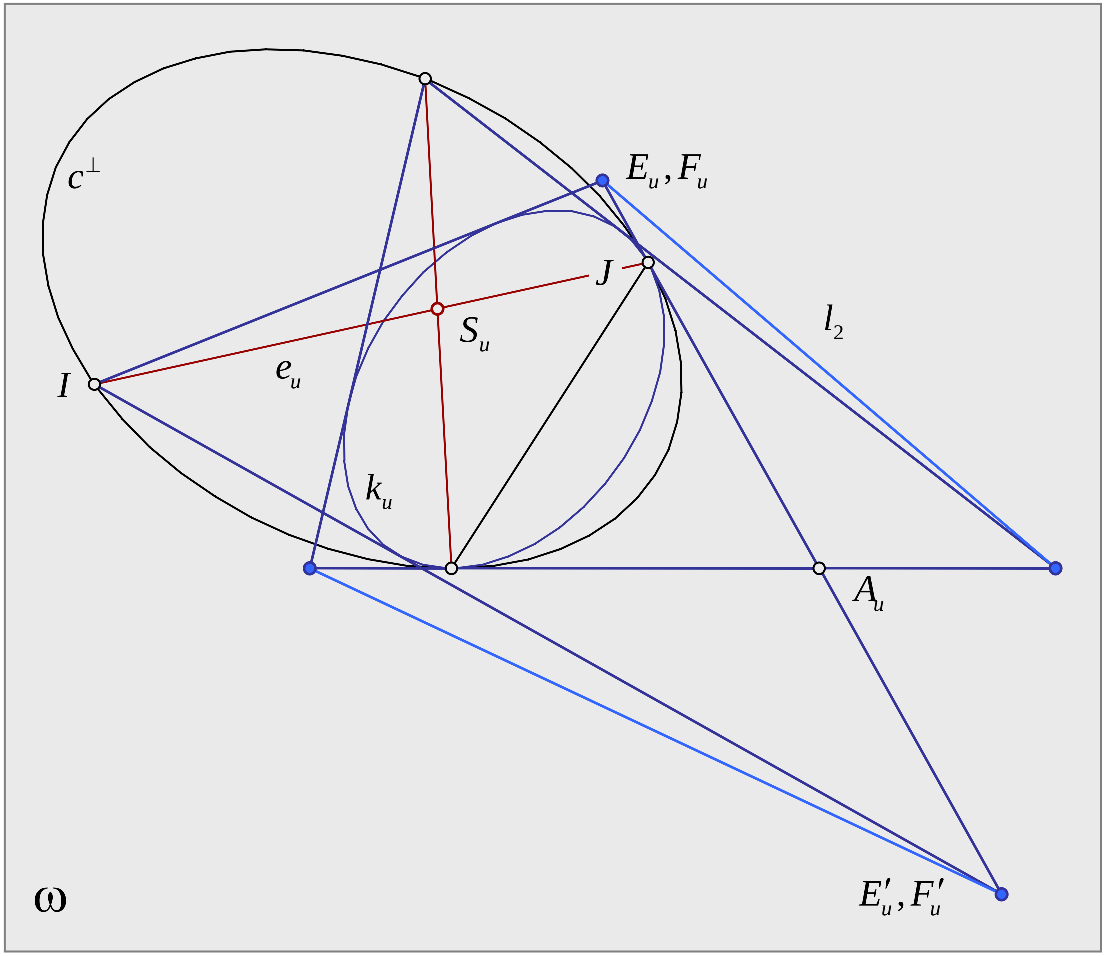


Projektivgeometrische Erzeugung der Kurven

Eine irreduzible Kurve k_n der Ordnung n kann nicht mehr als $\binom{n-1}{2}$ singuläre Punkte besitzen $(n > 2)$.

(W. BURAU: Algebraische Kurven und Flächen. Bd. 1)

Die Kurve 4. Ordnung zerfällt in eine Kurve k_2 2. Ordnung und ein Geradenpaar l_2 über $\mathbb{C}$.

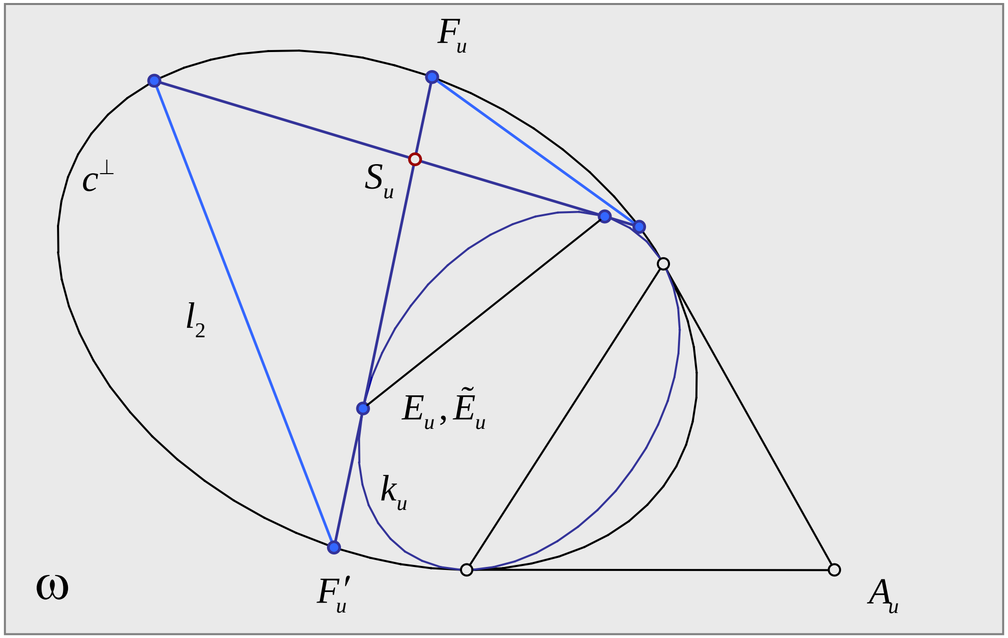


Projektivgeometrische Erzeugung der Kurven

Es gelte **zusätzlich**

$s \nparallel e \Leftrightarrow S_u \notin k_u$

($e \ldots$ Erzeugende).

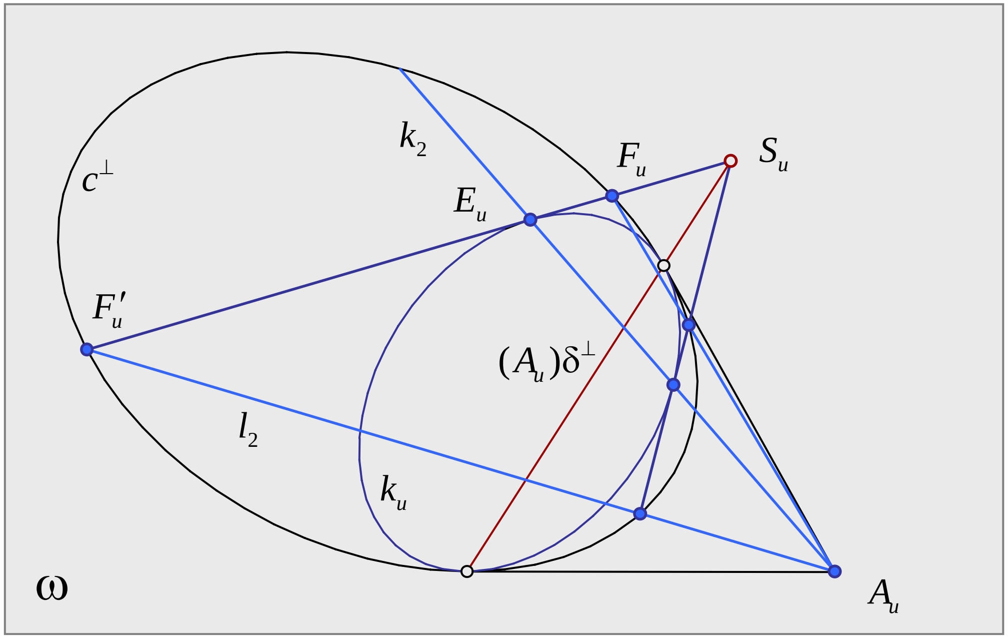


Die Kurve k_2 berührt für die gewählten Lagen des Trägers s_u des schneidenden Ebenenbüschels E_{s_u} den uneigentlichen Kegelschnitt k_u der Drehkegelfläche doppelt.

Projektivgeometrische Erzeugung der Kurven

Es gelte **zusätzlich**

$s \perp a \Leftrightarrow S_u \in (A_u)\delta^{\perp}.$

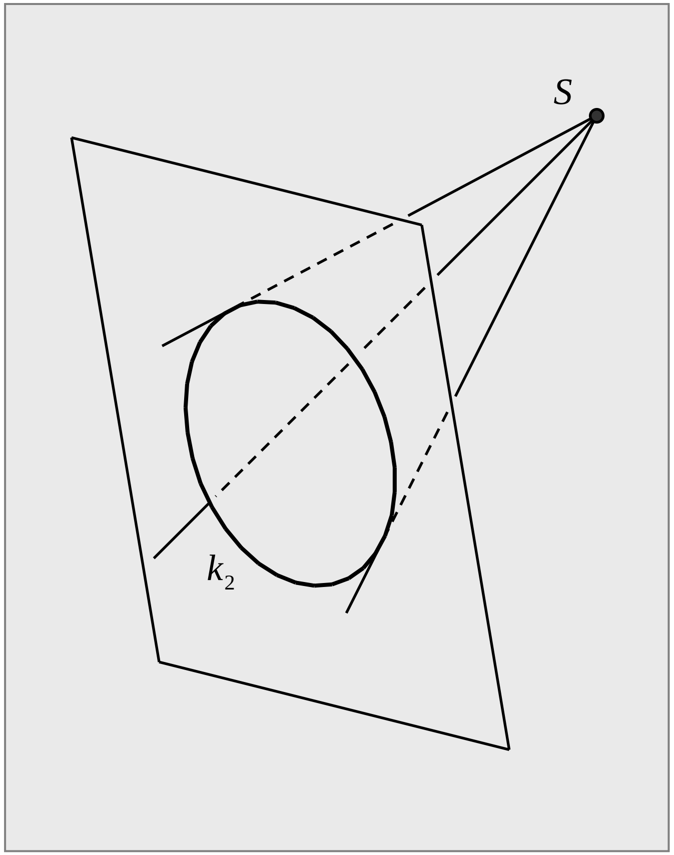


Der uneigentliche Punkt A_u der Achse a ist ein vierfach zu zählender Punkt der Kurve 4. Ordnung. Sie zerfällt in eine doppelt zu zählende Gerade k_2 (absolute Polare zu S_u) und ein Geradenpaar l_2 über $\mathbb{C}$.

Projektivgeometrische Erzeugung der Kurven

Folgerungen

- Verbindet man für $s \not\perp a$ die (reelle) nichtzerfallende Kurve $2.$ Ordnung k_2 punktweise mit der Spitze S von Φ, so entsteht eine Kegelfläche $2.$ Ordnung. Diese ist Träger der Brennpunktkurve.
- Für $s \perp a$ ist $(k_2 \vee S)$ zweifach zu zählende Ebene. Die Brennpunktkurve ist dann eine ebene Kurve.



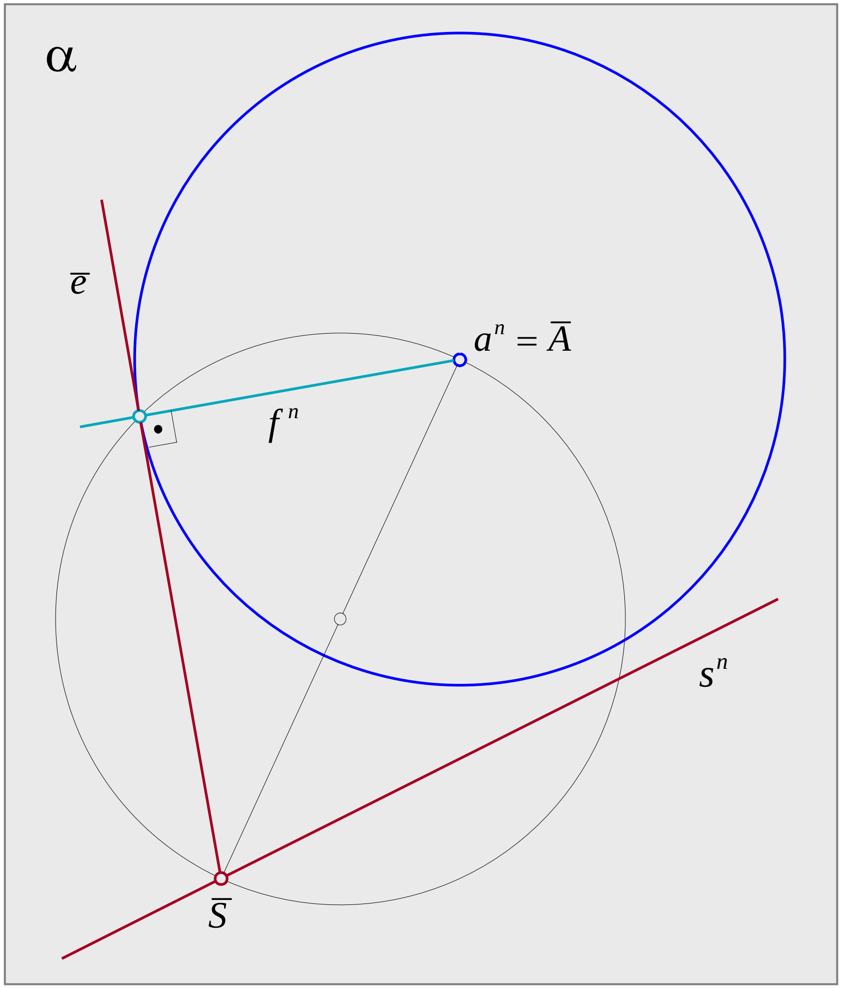
Projektivgeometrische Erzeugung der Kurven

α … (Kreisschnitt-) Ebene $(\alpha \perp a)$,

$\bar{S}$ … Spur des Trägers $(\Leftrightarrow s \measuredangle a)$,

$\bar{e}$ … Spur einer Ebene E des Büschels

Die Hauptachsenregelfläche bildet für $s \not\measuredangle a$ ein orthogonales Hyperboloid. Jede (Schichten-) Ebene α mit $\alpha \perp a$ schneidet dieses in einem Kreis.



Projektivgeometrische Erzeugung der Kurven

Ergebnisse

- Für $s \not\perp a$ und s tangential an Φ entsteht die Brennpunktkurve als teilweiser Schnitt beider Flächen $2.$ Ordnung, die eine weitere Gerade gemeinsam haben.
  Die Brennpunktkurve ist daher eine räumliche Kurve $3.$ Ordnung.
- Liegt $s \not\perp a$ nicht tangential an Φ, so ist die Brennpunktkurve im Allgemeinen als nichtzerfallende Schnittkurve zweier Flächen $2.$ Ordnung erzeugbar, also von $4.$ Ordnung.
- Für $s \perp a$ und s (nicht) tangential an Φ ist die Brennpunktkurve eine ebene Kurve $3.$ $(4.)$ Ordnung.

Projektivgeometrische Erzeugung der Kurven

Ergebnisse

- Für $s \not\perp a$ und s tangential an Φ entsteht die Brennpunktkurve als teilweiser Schnitt beider Flächen $2.$ Ordnung, die eine weitere Gerade gemeinsam haben.
  Die Brennpunktkurve ist daher eine räumliche Kurve $3.$ Ordnung.
- Liegt $s \not\measuredangle a$ nicht tangential an Φ, so ist die Brennpunktkurve im Allgemeinen als nichtzerfallende Schnittkurve zweier Flächen $2.$ Ordnung erzeugbar, also von $4.$ Ordnung.
- Für $s \perp a$ und s (nicht) tangential an Φ ist die Brennpunktkurve eine ebene Kurve $3.\,(4.)$ Ordnung.

Projektivgeometrische Erzeugung der Kurven

Ergebnisse

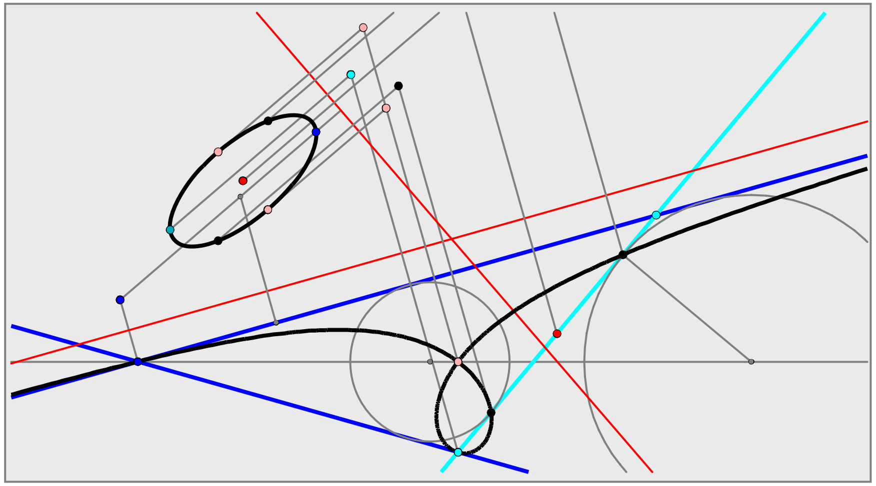
- Für $s \not\perp a$ und s tangential an Φ entsteht die Brennpunktkurve als teilweiser Schnitt beider Flächen $2.$ Ordnung, die eine weitere Gerade gemeinsam haben.
  Die Brennpunktkurve ist daher eine räumliche Kurve $3.$ Ordnung.
- Liegt $s \not\perp a$ nicht tangential an Φ, so ist die Brennpunktkurve im Allgemeinen als nichtzerfallende Schnittkurve zweier Flächen $2.$ Ordnung erzeugbar, also von $4.$ Ordnung.
- Für $s \perp a$ und s (nicht) tangential an Φ ist die Brennpunktkurve eine ebene Kurve $3.$ $(4.)$ Ordnung.

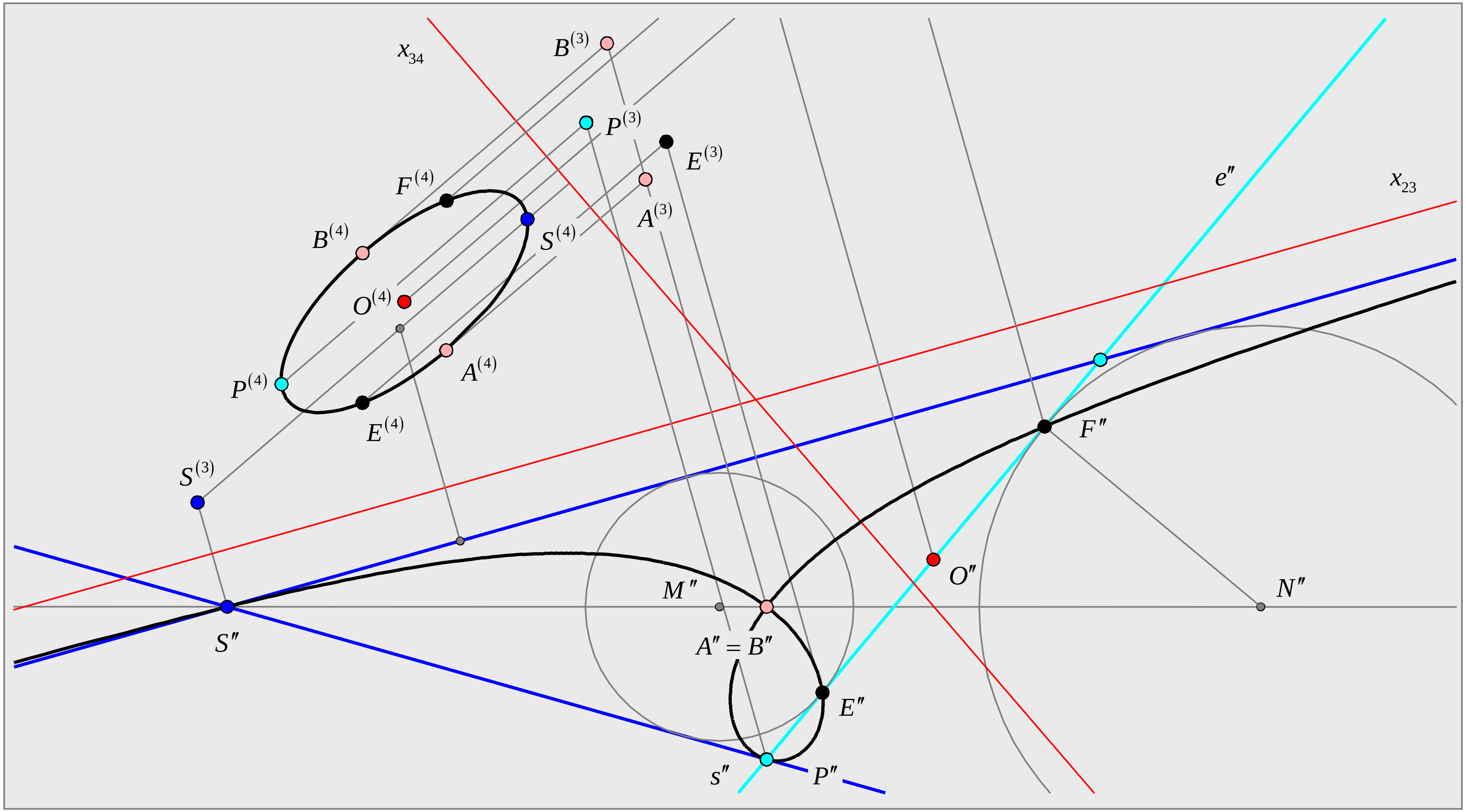
Eigenschaften und ihre Darstellung

Eine räumliche Kurve $3.$ Ordnung wird aus allen ihren Punkten durch Kegel $2.$ Ordnung projiziert.

Beispiel

Für $s \not\angle a$ sowie s tangential an Φ ist die Brennpunktkurve durch einen Zylinder $2.$ Ordnung projiziert, dessen Erzeugende parallel zur Asymptotenrichtung sind.



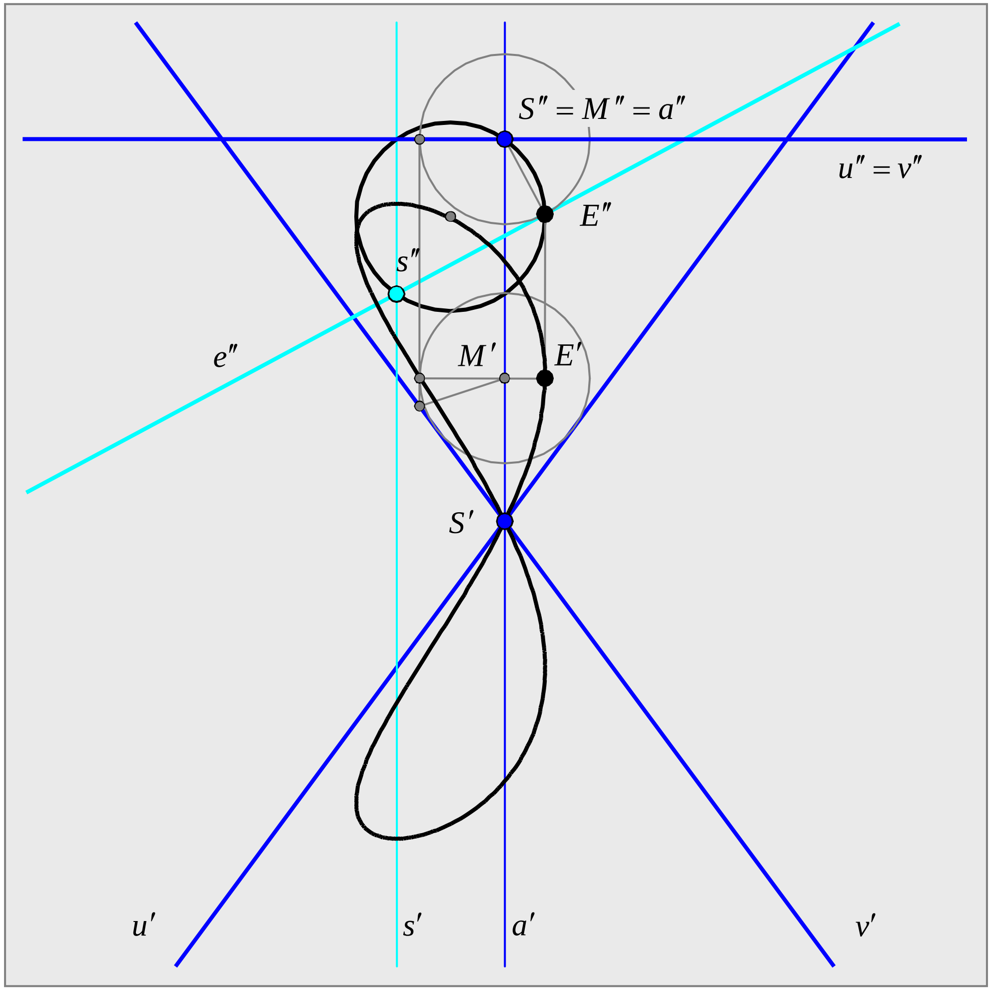


x_{34}
$B^{(3)}$
$P^{(3)}$
$E^{(3)}$
$A^{(3)}$
$F^{(4)}$
$B^{(4)}$
$S^{(4)}$
$O^{(4)}$
$A^{(4)}$
$P^{(4)}$
$E^{(4)}$
$S^{(3)}$
e''
x_{23}
F''
O''
M''
N''
S''
$A'' = B''$
E''
s''
P''

Eigenschaften und ihre Darstellung

Für $s \,||\, a$ ist die aus den Hauptachsen gebildete Regelfläche eine Drehzylinderfläche.

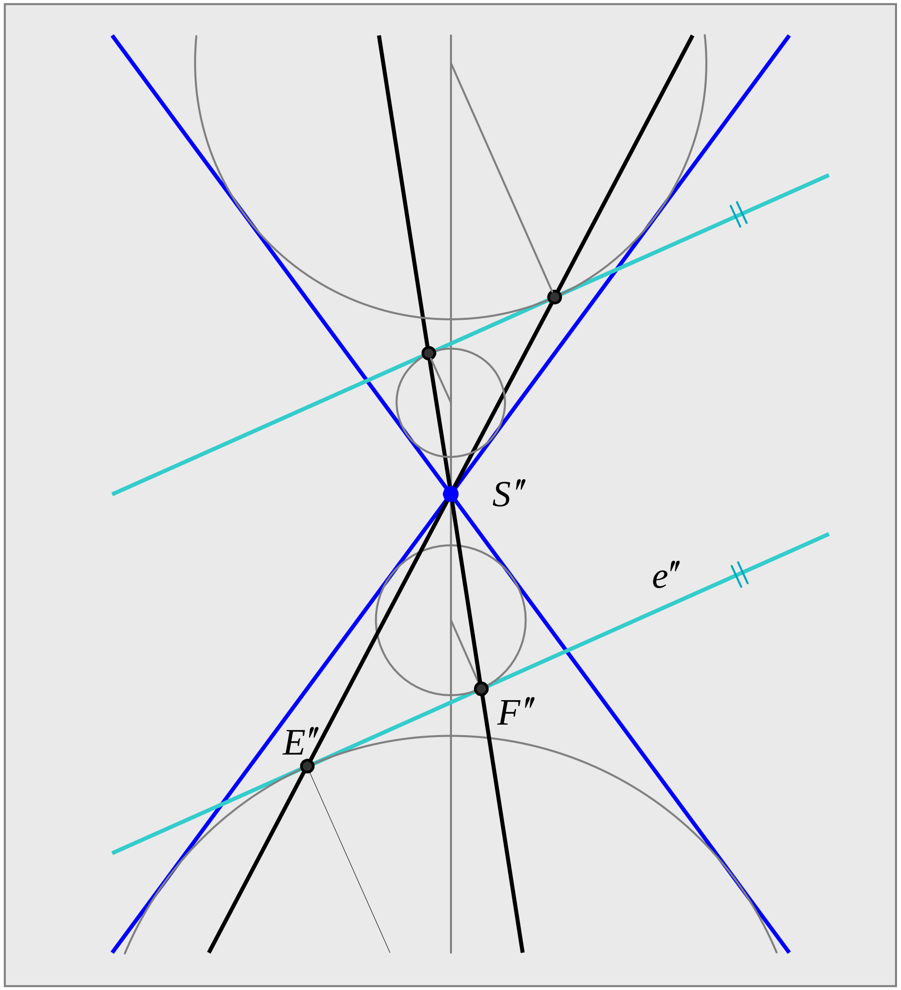
Die **Brennpunktkurve** ist Schnitt eines Kegels $2.$Ordnung (Spitze S) mit einer Drehzylinderfläche, von welcher eine Erzeugende mit a zusammenfällt; sie ist von $4.$ Ordnung.



Eigenschaften und ihre Darstellung

Ist E_{s_u} ein Parallelebenenbüschel (genau dann wenn s_u uneigentlicher Träger ist), so sind die ebenen Schnitte zueinander ähnlich und in ähnlicher Lage.

Die **Brennpunktkurve** ist ein sich in der Spitze S der Drehkegelfläche schneidendes Geradenpaar.



Schlussbemerkungen

- Von inhaltlichem Interesse scheint die Frage nach dem geometrischen Ort von anderen bezüglich des Kegelschnittes ausgezeichneten Elementen (etwa Leitgeraden oder Mittelpunkt) in obiger Aufgabenstellung interessant,
- ... ebenso die Verwendung von Flächen zweiter Ordnung anstelle der Drehkegelfläche,
- Von didaktischem Interesse ist eine möglichst natürliche Behandlung innerhalb der projektiven, algebraischen und darstellenden Geometrie.

Schlussbemerkungen

- Von inhaltlichem Interesse scheint die Frage nach dem geometrischen Ort von anderen bezüglich des Kegelschnittes ausgezeichneten Elementen (etwa Leitgeraden oder Mittelpunkt) in obiger Aufgabenstellung interessant,

- ... ebenso die Verwendung von Flächen zweiter Ordnung anstelle der Drehkegelfläche,

- Von didaktischem Interesse ist eine möglichst natürliche Behandlung innerhalb der projektiven, algebraischen und darstellenden Geometrie.

Schlussbemerkungen

- Von inhaltlichem Interesse scheint die Frage nach dem geometrischen Ort von anderen bezüglich des Kegelschnittes ausgezeichneten Elementen (etwa Leitgeraden oder Mittelpunkt) in obiger Aufgabenstellung interessant,

- ... ebenso die Verwendung von Flächen zweiter Ordnung anstelle der Drehkegelfläche,

- Von didaktischem Interesse ist eine möglichst natürliche Behandlung innerhalb der projektiven, algebraischen und darstellenden Geometrie.