

Robotik - Kinematik - Geometrie, hin und zurück

Manfred L. Husty

Institut für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften, AB Geometrie and CAD,
Universität Innsbruck, Austria
`manfred.husty@uibk.ac.at`

30. Fortbildungstagung für Geometrie

Übersicht

Einleitung

Direkte Kinematik, Singularitäten und der kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

Einleitung

Direkte Kinematik, Singularitäten und der kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier Bauformenwechsel

Manfred L. Husty

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

- ▶ Arbeitsbereich Geometrie und CAD ist Teil des Instituts für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften, Universität Innsbruck



Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

- ▶ Arbeitsbereich Geometrie und CAD ist Teil des Instituts für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften, Universität Innsbruck
- ▶ Zentrale Forschungsrichtungen: Computational Engineering



Arbeitsbereich Geometrie and CAD

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

- ▶ Arbeitsbereich Geometrie und CAD ist Teil des Instituts für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften, Universität Innsbruck
- ▶ Zentrale Forschungsrichtungen: Computational Engineering
- ▶ Arbeitsbereich Geometrie and CAD: theoretische Kinematik und diskrete Geometrie



Arbeitsbereich Geometrie and CAD

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singulartitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung
Kreiszwang
Singulartitätenfläche

Singulartitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singulartitätenfreier
Bauformenwechsel

- ▶ Arbeitsbereich Geometrie und CAD ist Teil des Instituts für Grundlagen der Bauingenieurwissenschaften, Universität Innsbruck
- ▶ Zentrale Forschungsrichtungen: Computational Engineering
- ▶ Arbeitsbereich Geometrie and CAD: theoretische Kinematik und diskrete Geometrie
- ▶ Verschiedene Topologien von Manipulatoren, direkte, inverse Kinematik, Singularitäten, Algorithmen



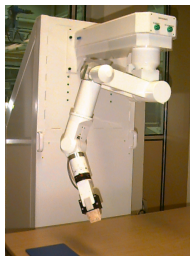
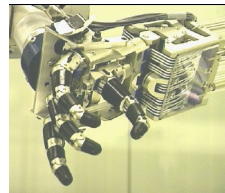
Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung
Kreiszwang
Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel
Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

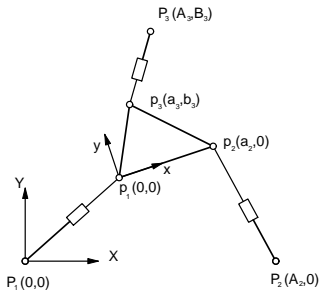


Abbildung: Ebener 3-RPR paralleler
Mechanismus.

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

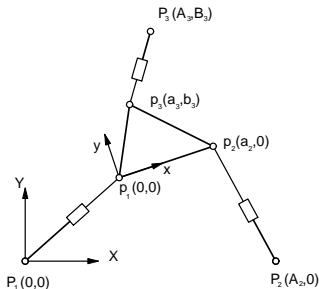


Abbildung: Ebener 3-RPR paralleler
Mechanismus.

Innocenti and Parenti-Castelli(1998)

McAree and Daniel(1999)

Macho, Altuzarra, Pinto and
Hernandez (2007)

Wenger and Chablat (2004)

Bonev, Briot, Wenger and Chablat
(2008)

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

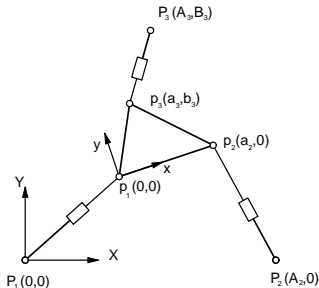
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Innocenti and Parenti-Castelli(1998)

McAree and Daniel(1999)

Macho, Altuzarra, Pinto and
Hernandez (2007)

Wenger and Chablat (2004)

Bonev, Briot, Wenger and Chablat
(2008)

Abbildung: Ebener 3-RPR paralleler
Mechanismus.

- ▶ Geometrische Überlegungen liefern oft bessere Ergebnisse als komplizierte mathematische und mechanische Rechnungen
- ▶ Geometrie und direkte Kinematik
- ▶ Singularitäten und der Satz von Desargues
- ▶ Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

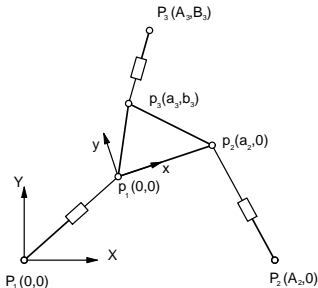
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Innocenti and Parenti-Castelli(1998)

McAree and Daniel(1999)

Macho, Altuzarra, Pinto and
Hernandez (2007)

Wenger and Chablat (2004)

Bonev, Briot, Wenger and Chablat
(2008)

Abbildung: Ebener 3-RPR paralleler
Mechanismus.

- ▶ Geometrische Überlegungen liefern oft bessere Ergebnisse als komplizierte mathematische und mechanische Rechnungen
- ▶ Geometrie und direkte Kinematik
- ▶ Singularitäten und der Satz von Desargues
- ▶ Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

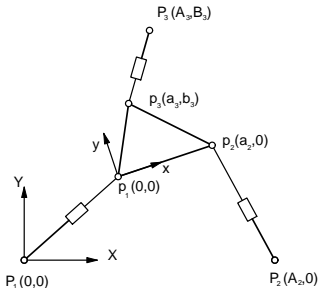


Abbildung: Ebener 3-RPR paralleler Mechanismus.

Innocenti and Parenti-Castelli(1998)

McAree and Daniel(1999)

Macho, Altuzarra, Pinto and
Hernandez (2007)

Wenger and Chablat (2004)

Bonev, Briot, Wenger and Chablat
(2008)

- ▶ Geometrische Überlegungen liefern oft bessere Ergebnisse als komplizierte mathematische und mechanische Rechnungen
- ▶ Geometrie und direkte Kinematik
- ▶ Singularitäten und der Satz von Desargues
- ▶ Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

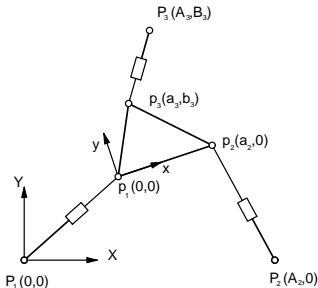
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Innocenti and Parenti-Castelli(1998)

McAree and Daniel(1999)

Macho, Altuzarra, Pinto and
Hernandez (2007)

Wenger and Chablat (2004)

Bonev, Briot, Wenger and Chablat
(2008)

Abbildung: Ebener 3-RPR paralleler
Mechanismus.

- ▶ Geometrische Überlegungen liefern oft bessere Ergebnisse als komplizierte mathematische und mechanische Rechnungen
- ▶ Geometrie und direkte Kinematik
- ▶ Singularitäten und der Satz von Desargues
- ▶ Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

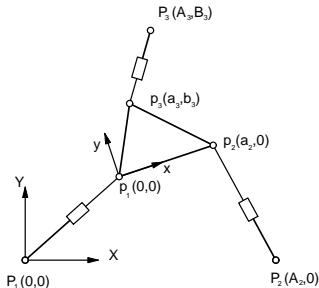
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Innocenti and Parenti-Castelli(1998)

McAree and Daniel(1999)

Macho, Altuzarra, Pinto and
Hernandez (2007)

Wenger and Chablat (2004)

Bonev, Briot, Wenger and Chablat
(2008)

Abbildung: Ebener 3-RPR paralleler
Mechanismus.

- ▶ Geometrische Überlegungen liefern oft bessere Ergebnisse als komplizierte mathematische und mechanische Rechnungen
- ▶ Geometrie und direkte Kinematik
- ▶ Singularitäten und der Satz von Desargues
- ▶ Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

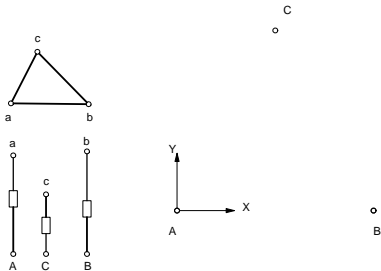
Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

Direkte Kinematik, Singularitäten und der kinematische Bildraum

Direkte Kinematik:

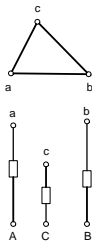
- Aus gegebenem Design und Gelenksparemtern (Beinlängen) sind die Bauformen zu bestimmen



Direkte Kinematik, Singularitäten und der kinematische Bildraum

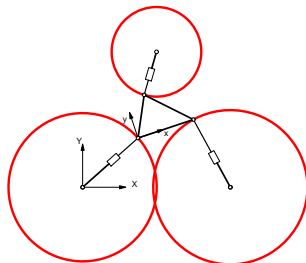
Direkte Kinematik:

- Aus gegebenem Design und Gelenksparemtern (Beinlängen) sind die Bauformen zu bestimmen



C

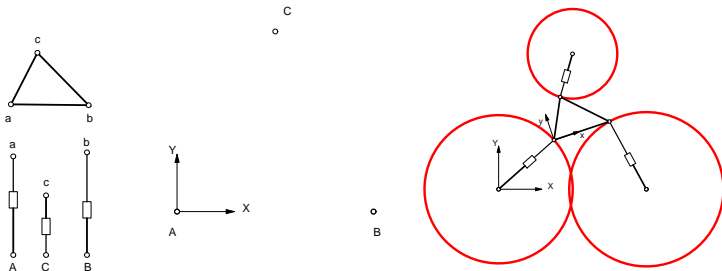
B



Direkte Kinematik, Singularitäten und der kinematische Bildraum

Direkte Kinematik:

- ▶ Aus gegebenem Design und Gelenksparemtern (Beinlängen) sind die Bauformen zu bestimmen
- ▶ Es ist wohlbekannt, dass bis zu sechs Bauformen möglich sind
- ▶ Gosselin C., Sefrioui J., and Richard M. (1992), Wohlhart (1992), Gosselin C. and Merlet J-P (1994),.....



Einleitung

Direkte Kinematik, Singularitäten und der kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

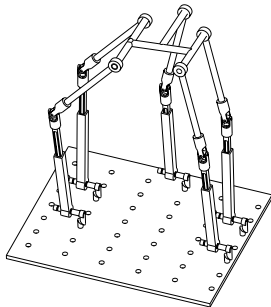
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Singularität:

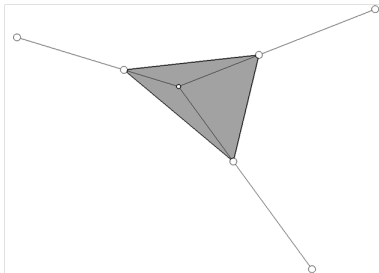


Abbildung: Singuläre Lage

Sefrioui and Gosselin (1992,1995)

Collins and McCarthy (1998)

Hayes (1999)

H., Hayes, and Loibnegger (1999)

H. und Gosselin (2008)

Singularität:

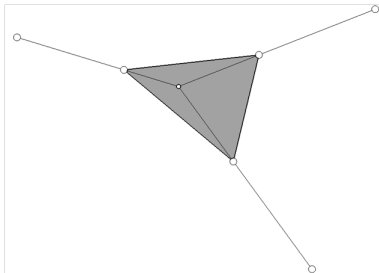


Abbildung: Singuläre Lage

Sefrioui and Gosselin (1992,1995)

Collins and McCarthy (1998)

Hayes (1999)

H., Hayes, and Loibnegger (1999)

H. und Gosselin (2008)

- ▶ Der Manipulator ist singulär, wenn sich die drei Beingeraden in einem Punkt schneiden
- ▶ Der Manipulator ist singulär wenn Basisdreieck und Plattform in perspektiver Lage sind

Kinematische Abbildung

Euklidische Bewegung \mathcal{D}

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos \phi & -\sin \phi \\ b & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier

Wechsel zwischen

Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier

Bauformenwechsel

Kinematische Abbildung

Euklidische Bewegung \mathcal{D}

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} \quad (1)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & \cos \phi & -\sin \phi \\ b & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Kinematische Abbildung:

$$\begin{aligned} \kappa : SE_2 &\mapsto P^3 \\ \mathcal{D} &\mapsto \kappa(\mathcal{D}) = \left(2 \cos \frac{\phi}{2} : 2 \sin \frac{\phi}{2} : a \sin \frac{\phi}{2} - b \cos \frac{\phi}{2} : a \cos \frac{\phi}{2} + b \sin \frac{\phi}{2} \right) = \\ &= (x_0 : x_1 : x_2 : x_3). \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} Z \\ X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^2 + x_1^2 & 0 & 0 \\ 2(x_1 x_2 + x_0 x_3) & x_0^2 - x_1^2 & -2x_0 x_1 \\ 2(x_1 x_3 - x_0 x_2) & 2x_0 x_1 & x_0^2 - x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

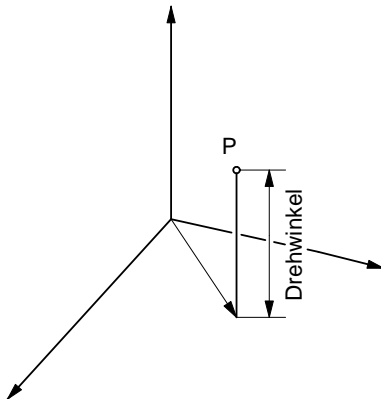


Abbildung: Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Bedingung, dass ein Punkt auf einem Kreis läuft

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

Kreiszwang

Bedingung, dass ein Punkt auf einem Kreis läuft

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

Kreiszwang

Bedingung, dass ein Punkt auf einem Kreis läuft

$$C_0(X^2 + Y^2) - 2C_1XZ - 2C_2YZ + RZ^2 = 0, \quad R := -r^2 + C_1^2 + C_2^2$$

$$\begin{aligned} & \left(x_2 - \frac{1}{2}(c_2 + C_2 - x_1(C_1 - c_1))\right)^2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}(x_1(c_2 - C_2) - C_1 - c_1)\right)^2 \\ & - \frac{1}{4}R^2(x_1^2 + 1) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Drei Kreisbedingungen:

$$h_1 : 4x_2^2 + 4x_3^2 + (x_0^2 + x_1^2)R_1 = 0$$

$$\begin{aligned} h_2 : 4x_2^2 - 4A_2x_3x_0 + 4x_3x_0a_2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2a_2 - 4x_1A_2x_2 + 4x_1^2A_2a_2 \\ - 2A_2a_2 + R_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3 : 4x_2^2 + 4B_3x_0x_2 - 4A_3x_3x_0 - 4x_2x_0b_3 + 4x_3x_0a_3 + 4x_3^2 - 4x_1B_3x_0a_3 \\ + 4x_1A_3x_0b_3 + 4x_1x_2a_3 - 4x_1B_3x_3 - 4x_1A_3x_2 - 4x_1x_3b_3 - \\ + 4x_1^2A_3a_3 + 4x_1^2B_3b_3 - 2B_3b_3 - 2A_3a_3 + R_3 = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

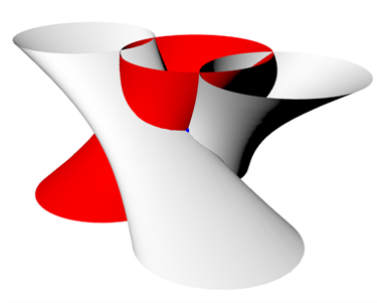


Abbildung: Geometrische Interpretation der Zwangsbedingungen

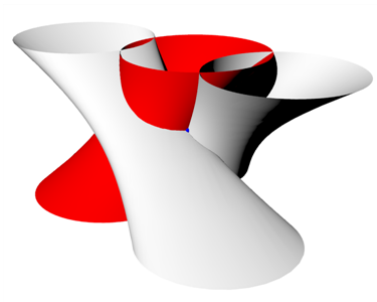


Abbildung: Geometrische Interpretation der Zwangsbedingungen

- Die Quadriken schneiden sich in sechs Punkten und in den absoluten Punkten der quasielliptischen Geometrie des Bildraumes

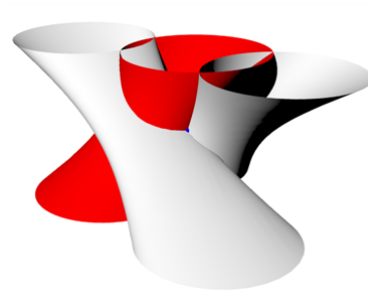


Abbildung: Geometrische Interpretation der Zwangsbedingungen

- ▶ Die Quadriken schneiden sich in sechs Punkten und in den absoluten Punkten der quasielliptischen Geometrie des Bildraumes
- ▶ Ein Lösungspunkt gehört zu einer singulären Lage wenn die drei Tangentialebenen an die Hyperboloide linear abhängig sind

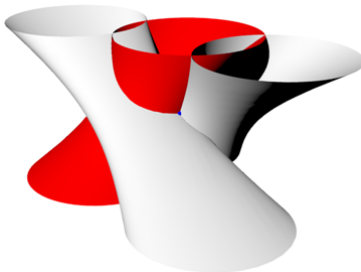


Abbildung: Geometrische Interpretation der Zwangsbedingungen

- ▶ Die Quadriken schneiden sich in sechs Punkten und in den absoluten Punkten der quasielliptischen Geometrie des Bildraumes
- ▶ Ein Lösungspunkt gehört zu einer singulären Lage wenn die drei Tangentialebenen an die Hyperboloide linear abhängig sind

$$S: x_0^2(ax_0x_2 + bx_2x_1 + cx_3x_1 + dx_2^2 + ex_3x_2) + x_0x_1[fx_2x_1 + gx_1x_3 + h(x_2^2 + x_3^2)] \\ + x_1^2(ix_1x_3 + ex_3x_2 - dx_3^2) = 0, \quad (7)$$

Singularitätenfläche

Einleitung

Direkte Kinematik, Singularitäten und der kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier Bauformenwechsel

Die Singularitätenfläche kann rational parametrisiert werden (Noether, 1876)

$$\begin{aligned}x_1 &= u, \\x_2 &= -\frac{v(u^3 i + (fv + g)u^2 + (bv + c)u + av)}{(ev - d)u^2 + (hv^2 + h)u + dv^2 + ev}, \\x_3 &= -\frac{u^3 i + (fv + g)u^2 + (bv + c)u + av}{(ev - d)u^2 + (hv^2 + h)u + dv^2 + ev}.\end{aligned}\tag{8}$$

1. S schneidet die Fernebene $x_0 = 0$ in einer Doppelgeraden und zwei weiteren Geraden.
2. Ebenen durch die Doppelgerade $x_0 = x_1 = 0$ schneiden S in Kegelschnitten, die auch singularär sein können.
3. Lagen mit der Beinlänge Null liegen auf S .

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

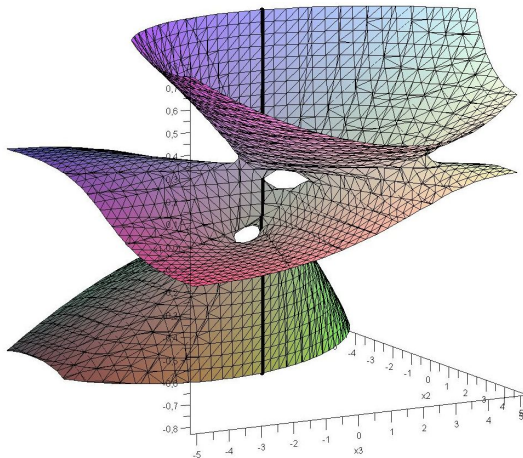


Abbildung: Singularitätenfläche

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

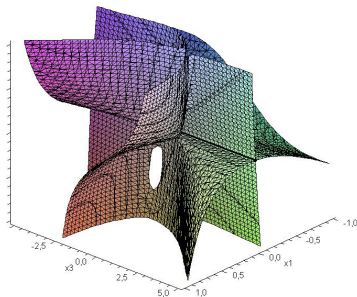


Abbildung: Singularitätenfläche um $x_0 = 0$

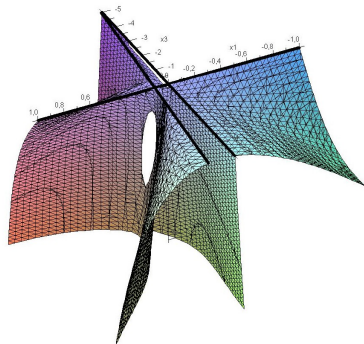


Abbildung: Schnitt mit $x_0 = 0$

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

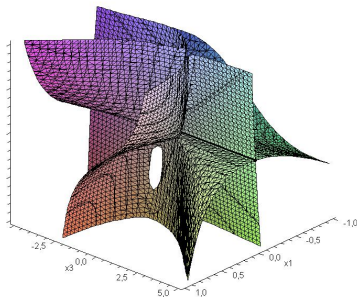


Abbildung: Singularitätenfläche um $x_0 = 0$

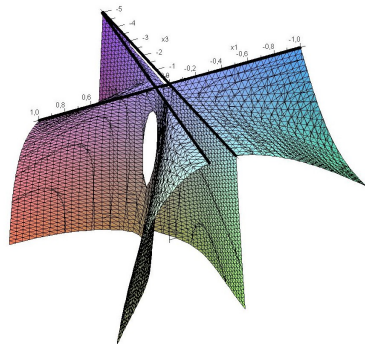


Abbildung: Schnitt mit $x_0 = 0$

Er ist möglich von einer Bauform (Lösung der direkten Kinematik) zu einer anderen Bauform zu wechseln ohne durch eine Singularität zu gehen

Abbildungen: Die Singularitätenfläche im Gelenksraum

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

Abbildungen: Die Singularitätenfläche im Gelenksraum

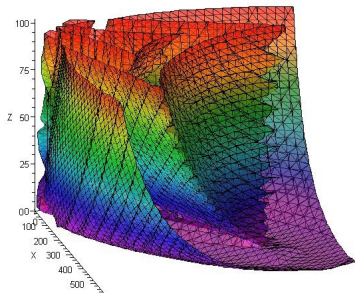


Abbildung: Singularitätenfläche im Gelenksraum

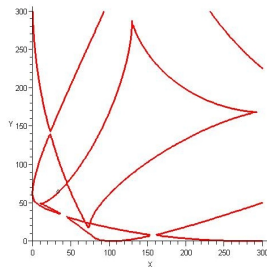


Abbildung: Ebener Schnitt durch die Singularitätenfläche

Abbildungen: Die Singularitätenfläche im Gelenksraum

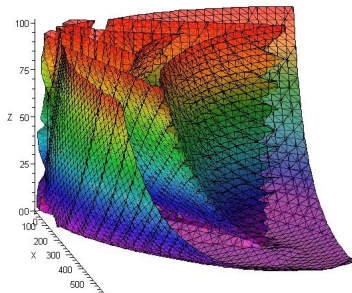


Abbildung: Singularitätenfläche im Gelenksraum

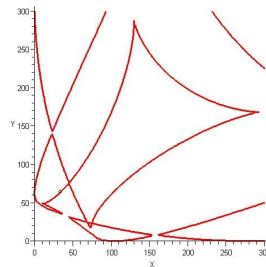


Abbildung: Ebener Schnitt durch die Singularitätenfläche

- Die äußere Hülle von \bar{S} beschreibt die Grenzen des Arbeitsraumes

Abbildungen: Die Singularitätenfläche im Gelenksraum

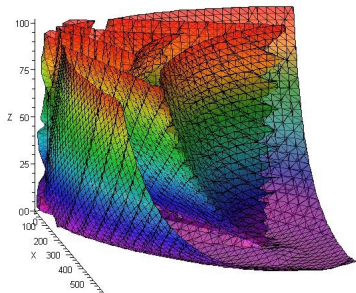


Abbildung: Singularitätenfläche im Gelenksraum

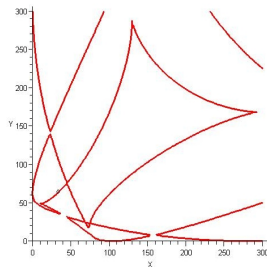


Abbildung: Ebener Schnitt durch die Singularitätenfläche

- ▶ Die äußere Hülle von \bar{S} beschreibt die Grenzen des Arbeitsraumes
- ▶ Die verschiedenen Bereiche \bar{S} bestimmen Gelenkparameter, die zu 2,4 or 6 reellen Lösungen der direkten Kinematik führen

Abbildungen: Die Singularitätenfläche im Gelenksraum

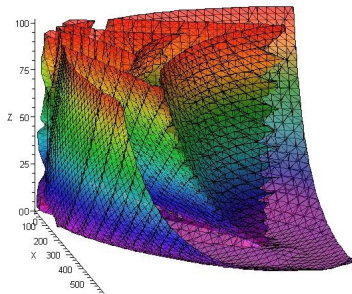


Abbildung: Singularitätenfläche im Gelenksraum

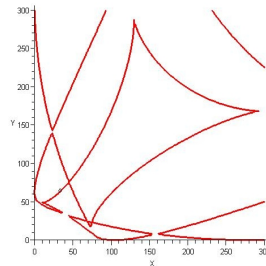


Abbildung: Ebener Schnitt durch die Singularitätenfläche

- ▶ Die äußere Hülle von \bar{S} beschreibt die Grenzen des Arbeitsraumes
- ▶ Die verschiedenen Bereiche \bar{S} bestimmen Gelenkparameter, die zu 2, 4 oder 6 reellen Lösungen der direkten Kinematik führen
- ▶ Jeder Punkt in J^3 repräsentiert sechs Lösungen der direkten Kinematik!

Die Abbildung j^{-1} ist eins zu sechs!!

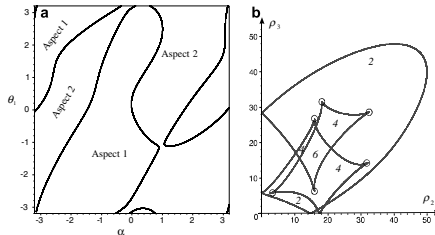


Fig. 3. Singular curves in (x, θ_1) for $\rho_1 = 17$ (a). Singular curves in (ρ_2, ρ_3) for $\rho_1 = 17$ (b).

aus Wenger et.al., MMT, 2008

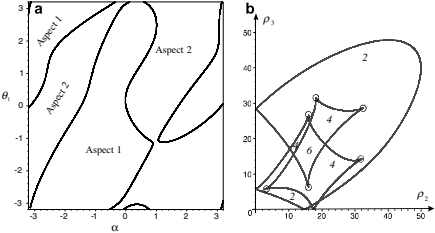


Fig. 3. Singular curves in (x, θ_1) for $\rho_1 = 17$ (a). Singular curves in (ρ_2, ρ_3) for $\rho_1 = 17$ (b).

aus Wenger et.al., MMT, 2008

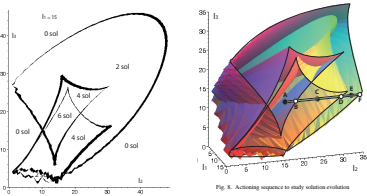


Fig. 7. Example of regions associated with a constant number of solutions for the D.K.P.

Fig. 8. Actioning sequence to study solution evolution

aus Macho et.al. IFToMM, 2007

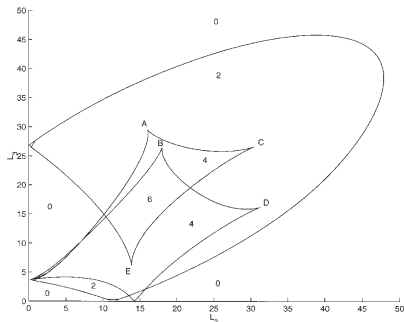


Fig. 6. The bifurcation set associated with projection of the contour of Figure 5 onto the (L_2, L_3) -plane with $L_1 = 14.98$. Other dimensions are given in the caption of Figure 5. Numbers correspond to the number of assembly modes for given leg-rod lengths. Cusps at A, B, C, D , and E indicate leg lengths having three coalesced assemblies. Other points on the branch locus have two of their assemblies coalesced. Cusps on $L_2 = 0$ ($L_3 = 0$) arise because θ_2 (θ_3) is undefined, the constraint equations being nondifferentiable.

aus McAree-Daniels, IJR, 1999

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

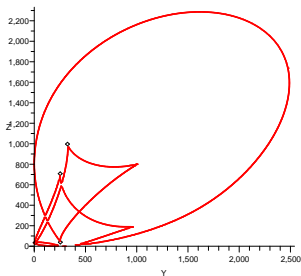
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Einleitung

Direkte Kinematik, Singularitäten und der kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

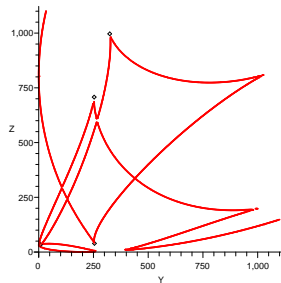
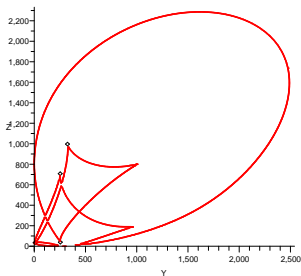
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

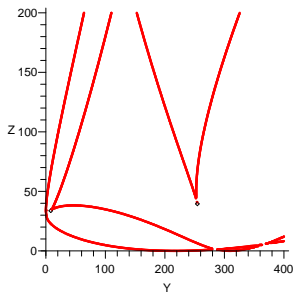
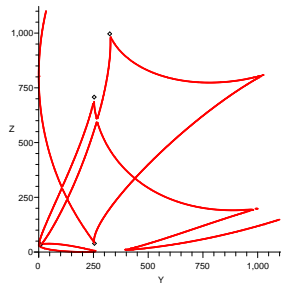
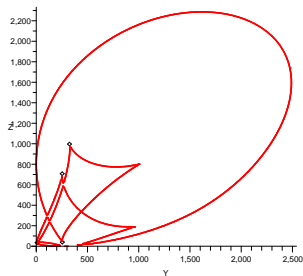
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

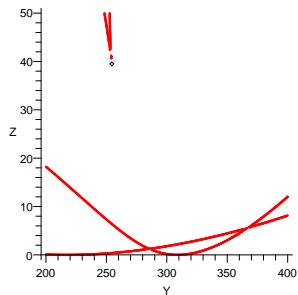
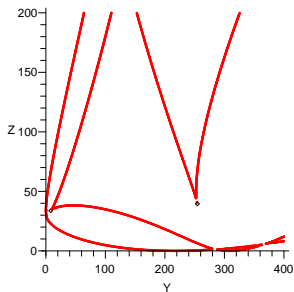
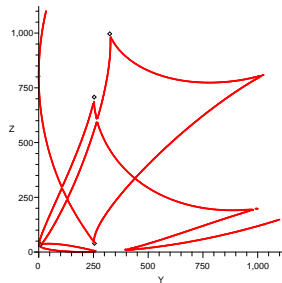
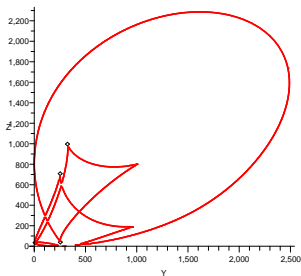
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

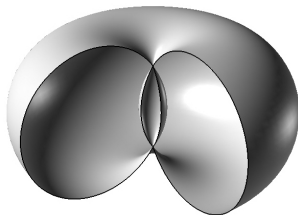


Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

- ▶ Wir wissen schon: die Fläche ist zusammenhängend
- ▶ Wenn die Fläche selbst keine Singularitäten trägt ist der singularitätenfreie Bauformenwechsel immer möglich

Singulartitätenfreier Wechsel zwischen Baupformen

- ▶ Wir wissen schon: die Fläche ist zusammenhängend
- ▶ Wenn die Fläche selbst keine Singulartitäten trägt ist der singulartitätenfreie Baupformenwechsel immer möglich

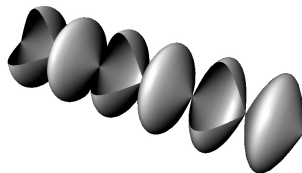
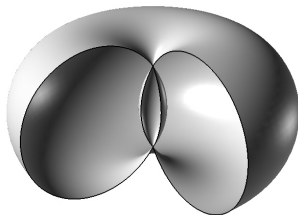


Spindeltorus:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0, a > b$$

Singularitätenfreier Wechsel zwischen Bauformen

- ▶ Wir wissen schon: die Fläche ist zusammenhängend
- ▶ Wenn die Fläche selbst keine Singularitäten trägt ist der singularitätenfreie Bauformenwechsel immer möglich



Spindeltorus:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 - 4b^2(x^2 + y^2) = 0, a > b$$

Example

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Baupformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Baupformenwechsel

Designparameter:

$$A_2 = 16, A_3 = 9, B_3 = 6, a_2 = 14, a_3 = 7, b_3 = 10$$

Beinlängen (Gelenksparameter) :

$$l_1 = \sqrt{75}, l_2 = \sqrt{70}, l_3 = 10, \rightarrow r_1 = 75, r_2 = 70, r_3 = 100$$

Direkte Kinematik:

	x_0	x_1	x_2	x_3
1.Lösung	1	-0.6677470786	-5.004903732	1.435724252
2.Lösung	1	-0.2050235422	-0.4833523455	4.393690958
3.Lösung	1	-0.1325338238	-3.108829192	3.068310422
4.Lösung	1	0.07787654624	-1.823931970	3.941698410
5.Lösung	1	0.1263321169	3.143974228	3.027320995
6.Lösung	1	0.6822704216	5.171971195	0.8536430082

Tabelle: Sechs reelle Lösungen der direkten Kinematik

Designparameter:

$$A_2 = 16, A_3 = 9, B_3 = 6, a_2 = 14, a_3 = 7, b_3 = 10$$

Beinlängen (Gelenksparameter) :

$$l_1 = \sqrt{75}, l_2 = \sqrt{70}, l_3 = 10, \rightarrow r_1 = 75, r_2 = 70, r_3 = 100$$

Direkte Kinematik:

	x_0	x_1	x_2	x_3
1.Lösung	1	-0.6677470786	-5.004903732	1.435724252
2.Lösung	1	-0.2050235422	-0.4833523455	4.393690958
3.Lösung	1	-0.1325338238	-3.108829192	3.068310422
4.Lösung	1	0.07787654624	-1.823931970	3.941698410
5.Lösung	1	0.1263321169	3.143974228	3.027320995
6.Lösung	1	0.6822704216	5.171971195	0.8536430082

Tabelle: Sechs reelle Lösungen der direkten Kinematik

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singulartitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

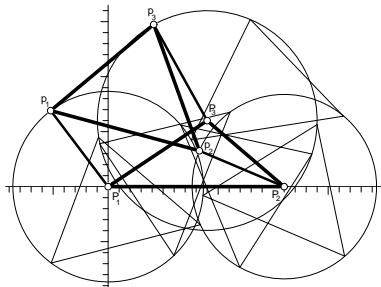
Kreiszwang

Singulartitätenfläche

Singulartitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singulartitätenfreier
Bauformenwechsel



Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

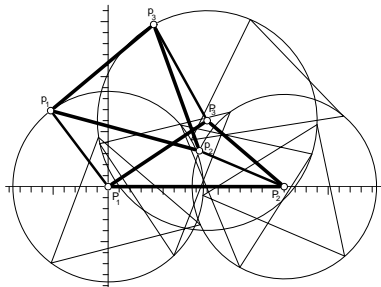
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



1.Lösung	2.Lösung	3.Lösung	4.Lösung	5.Lösung	6.Lösung
-6711.754125	1984.244553	2346.758854	-1975.121040	-2560.561059	9001.350319

Tabelle: det **J** der sechs Lösungen

Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

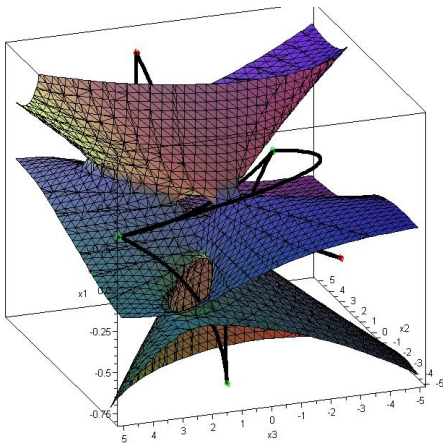
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel

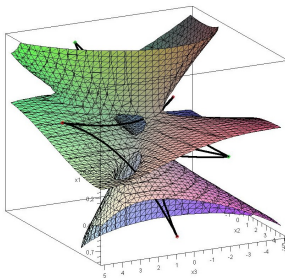


quadratische Bezierkurve die Lösung 4 und 5 verbindet

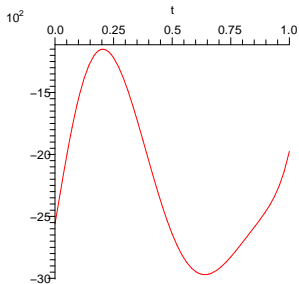
$$x_1 = 0.1263321169(1-t)^2 + 1.2t(1-t) + 0.07787654624t^2,$$

$$x_2 = 3.143974228(1-t)^2 - 10t(1-t) - 1.823931970t^2 \quad (9)$$

$$x_3 = -3.027320995(1-t)^2 - 10t(1-t) + 3.941698410t^2,$$



Einsetzen in die Gleichung der Singularitätenfläche:



Kurve s_{45} und Teile von \bar{S} im Gelenkraum

Einleitung

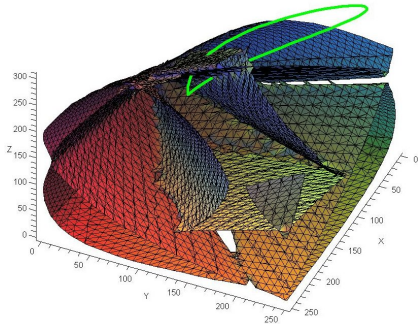
Direkte Kinematik,
Singulartitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung
Kreiszwang
Singulartitätenfläche

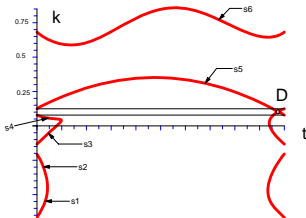
Singulartitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singulartitätenfreier
Bauformenwechsel



Rückabbildung \bar{s}_{45} in den kinematischen Bildraum ergibt sechs Kurven mit unterschiedlichem Verhalten



Einleitung

Direkte Kinematik,
Singularitäten und der
kinematische Bildraum

Kinematische Abbildung

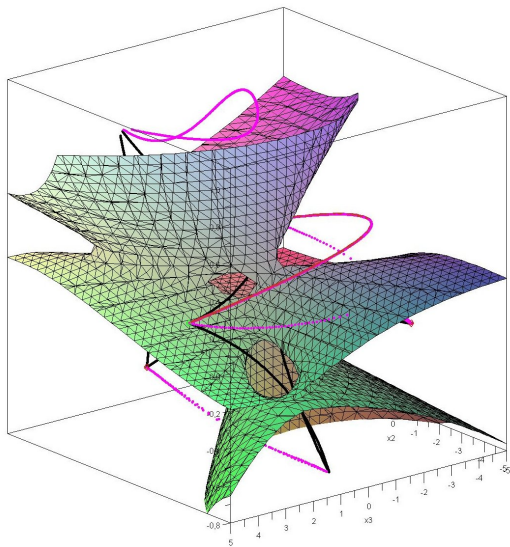
Kreiszwang

Singularitätenfläche

Singularitätenfreier
Wechsel zwischen
Bauformen

Beispiel

Singularitätenfreier
Bauformenwechsel



Danke für die Aufmerksamkeit!

Danke für die Aufmerksamkeit!

An alle: Bitte um Beiträge für die IBDG!!!!!!
Einsendeschluss für Heft 2/2009: 15.12.2009