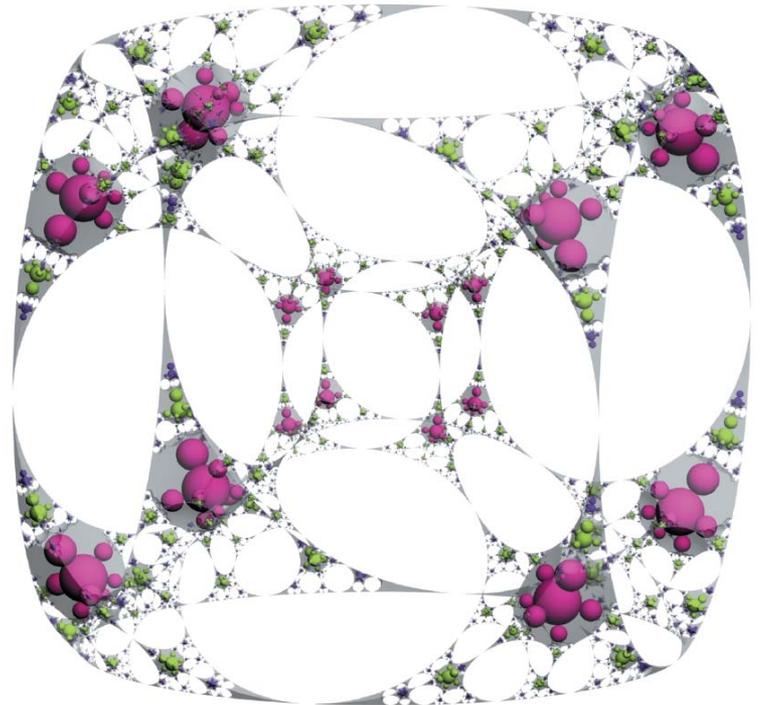
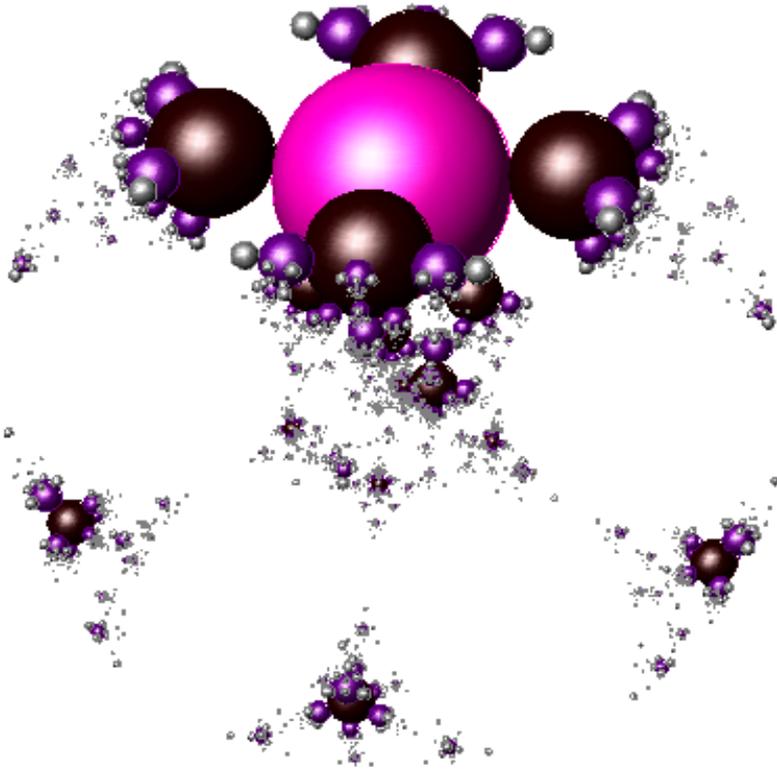
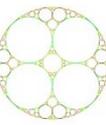


KUGELFRAKTALE

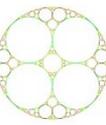


STROBL, NOVEMBER 2009



Überblick

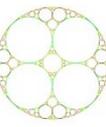
- Stereographische Projektion
- Inversion
- Äquivalenz: Inversion im \mathbb{E}_3 und projektiver Spiegelung im \mathbb{E}_4
- Fraktale von J. Leys
- Verallgemeinerung
 - Dimensionsabschätzung
 - Schwierigkeiten beim Programmieren



Stereographische Projektion st

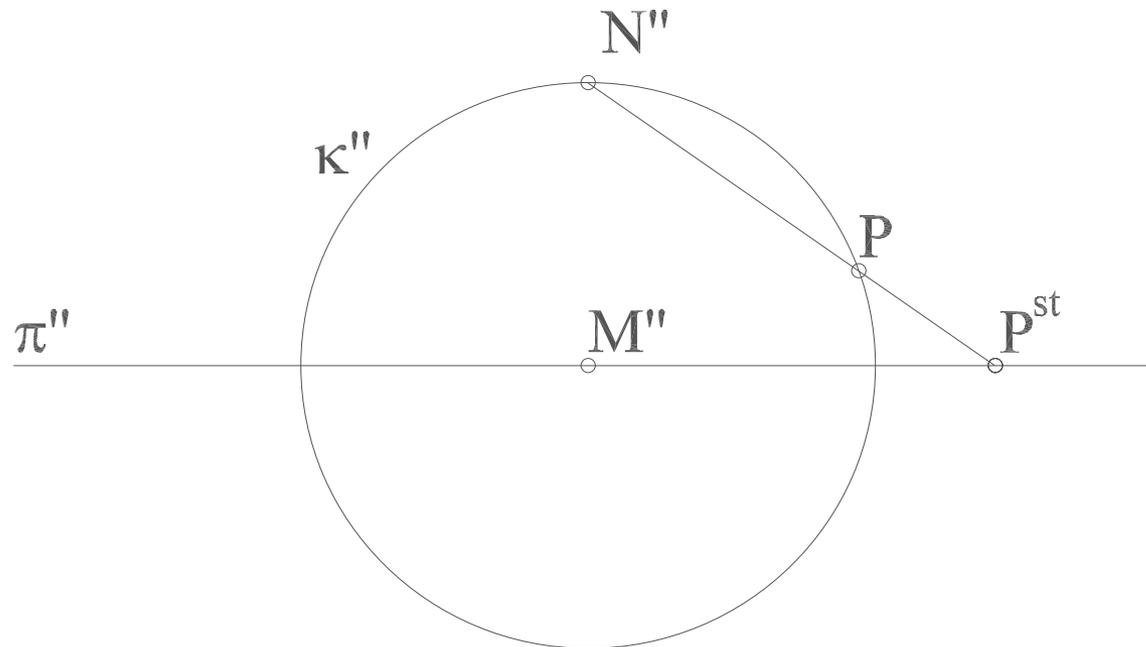
geg:

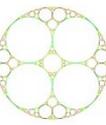
- 3-dimensionale euklidische Raum \mathbb{E}_3
- 2-dimensionale Kugel κ
- Bildebene π (= 2-dimensionale Ebene)

Stereographische Projektion st

$$st : \mathcal{K} \setminus \{N\} \rightarrow \pi$$

$$P \mapsto P^{st} := [NP] \cap \pi$$

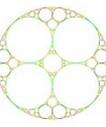




Stereographische Projektion st

Eigenschaften:

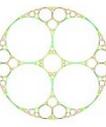
- Die stereographische Projektion ist winkeltreu
- Jeder nicht durch das Projektionszentrum N gehende Kreis k der Kugel wird auf einen Kreis k^{st} abgebildet



Inversion I

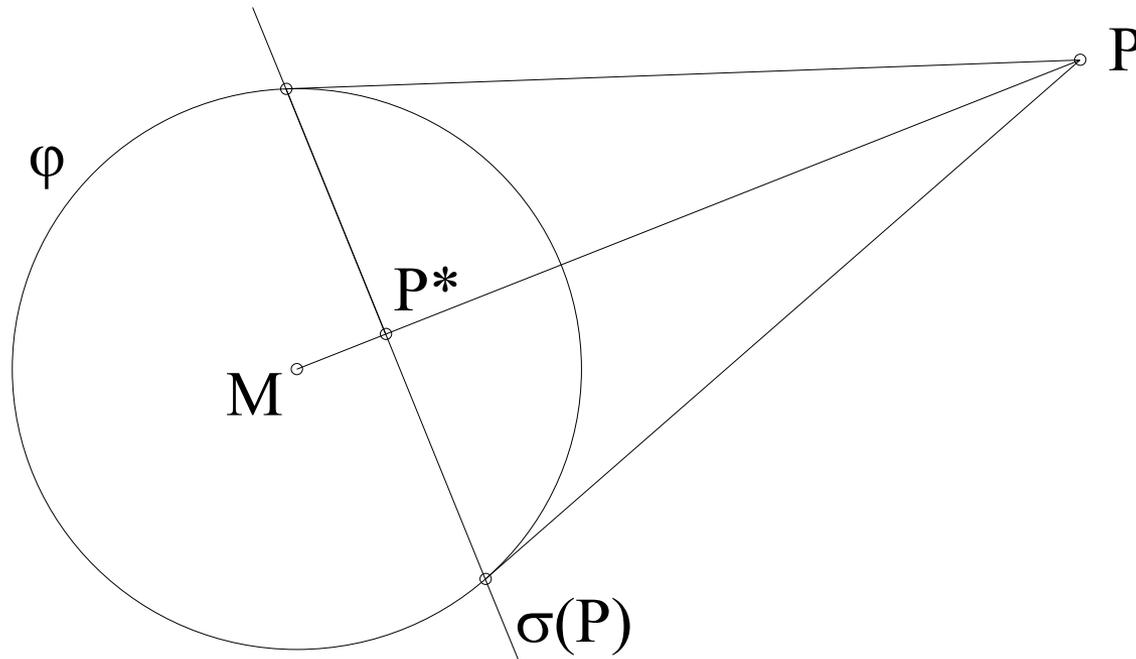
geg:

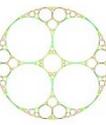
- 2-dimensionale euklidische Raum \mathbb{E}_2
- Kreis φ mit Mittelpunkt M

Inversion I

$$I : \mathbb{E}_2 \setminus \{M\} \rightarrow \mathbb{E}_2 \setminus \{M\}$$

$$P \mapsto I(P) = P^* := [PM] \cap \sigma(P)$$





Inversion I

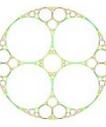
Weiters:

$$I(M) := \infty$$

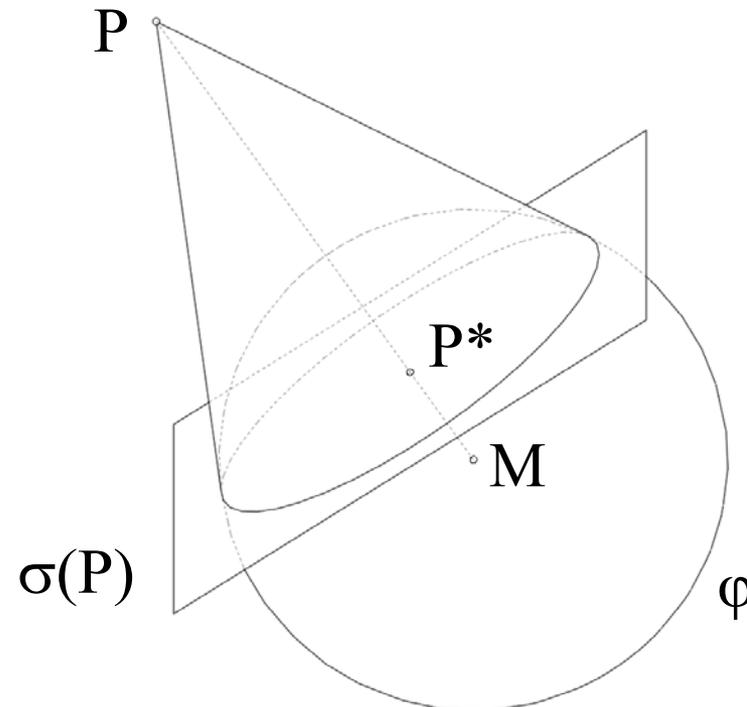
$$I(\infty) := M$$

⇒ Dadurch wird I zu einer bijektiven involutorischen Abbildung des \mathbb{E}_2^*

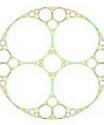
⇒ Erweiterung führt zur MÖBIUS-Geometrie

Inversion I

Eine Dimension höher:



Inversion an einer Kugel

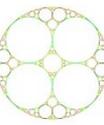


Inversion I

Die Inversion an der Inversionskugel φ mit Mittelpunkt M führt ineinander über:

- Ebene durch $M \leftrightarrow$ Ebene durch M
- Ebene nicht durch $M \leftrightarrow$ Kugel durch M
- Kugel durch $M \leftrightarrow$ Ebene durch ∞
- Kugel nicht durch $M \leftrightarrow$ Kugel nicht durch M

- Die Inversion ist winkeltreu

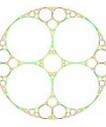


Äquivalenz: Inversion I im \mathbb{E}_3 und projektiver Spiegelung φ im \mathbb{E}_4

Satz:

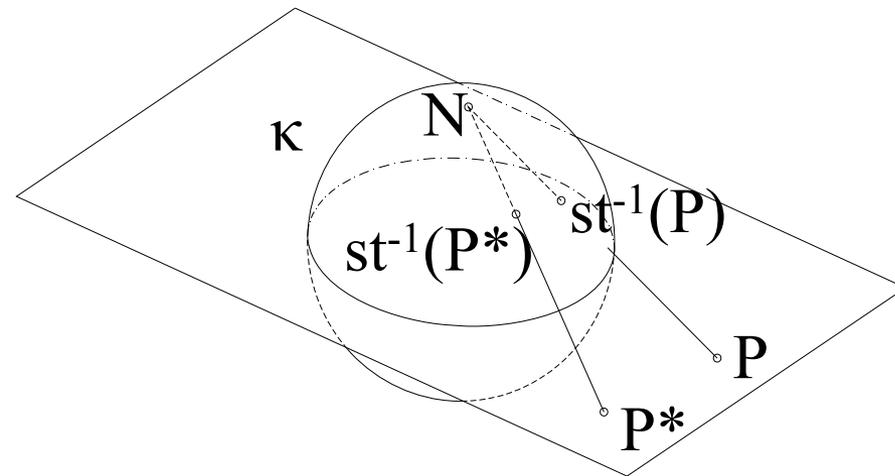
Die Inversionsabbildung I im \mathbb{E}_3 hat als äquivalentes Gegenstück auf der 3-dimensionalen Kugel κ im \mathbb{E}_4 eine perspektive Kollineation φ aus einem Zentrum $F(\Phi)$, welche κ fest lässt.

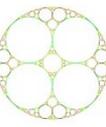
Diese perspektive Kollineation ist eine projektive Spiegelung φ mit Zentrum $F(\Phi)$ und der Polarebene $\sigma(F(\Phi))$ als Spiegelebene.



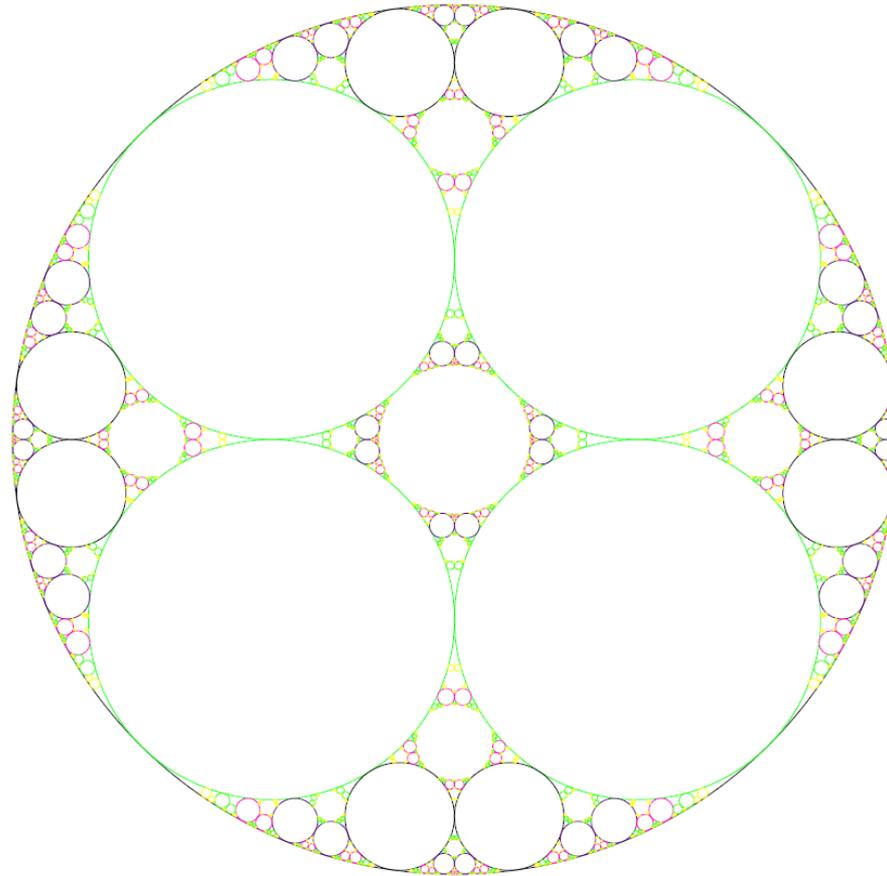
Äquivalenz: Inversion I im \mathbb{E}_3 und projektiver Spiegelung ϕ im \mathbb{E}_4

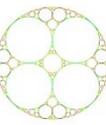
$$\begin{array}{ccc}
 P & \xleftrightarrow{I} & P^* \\
 \uparrow st & & \uparrow st \\
 st^{-1}(P) & \xleftrightarrow{\phi} & st^{-1}(P^*)
 \end{array}$$





Fraktale von J. LEYS

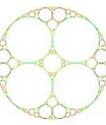




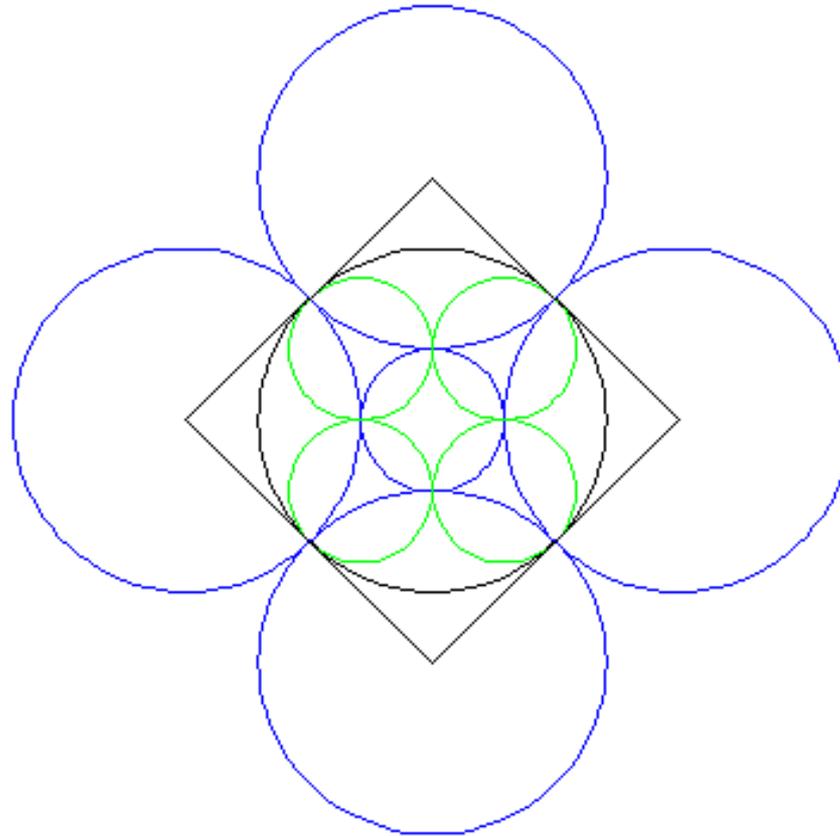
Fraktale von J. LEYS

Kreisfraktal wird durch iteratives Anwenden von Inversionen erzeugt, wobei man Inversions- und Startkreis in geeigneter Lage vorgibt.

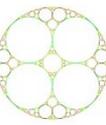
Startkreise, welche einen Inversionskreis orthogonal schneiden, werden nicht abgebildet



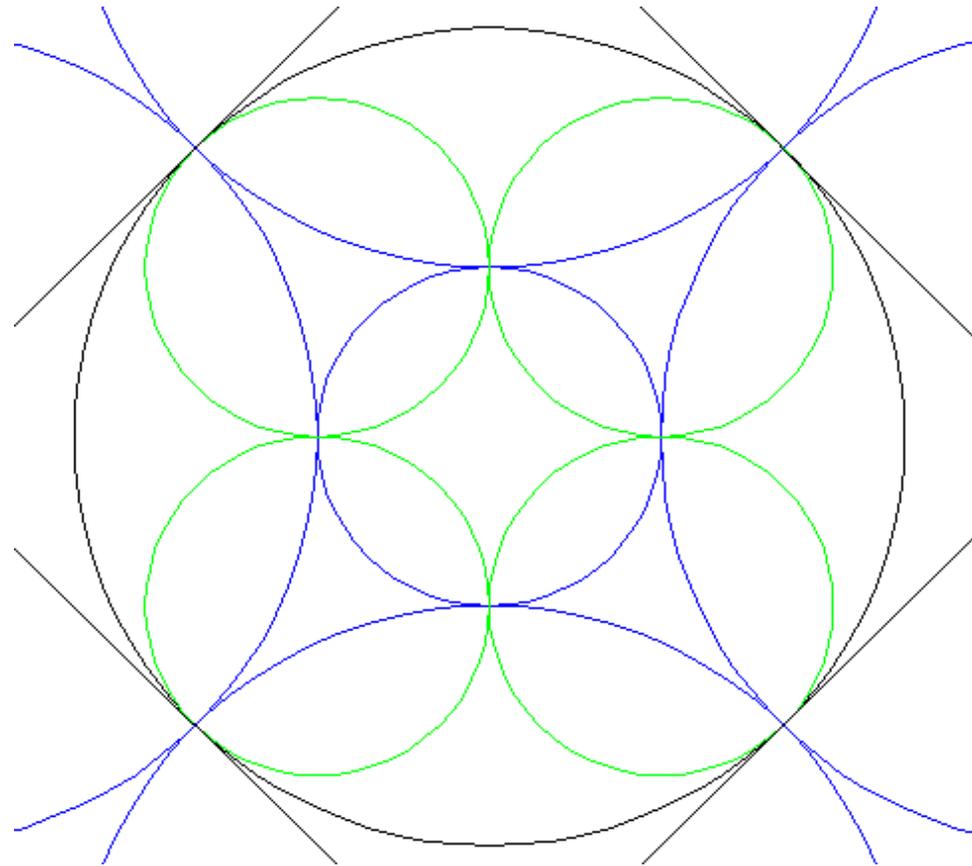
Fraktale von J. LEYS



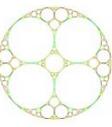
Startkonstellation



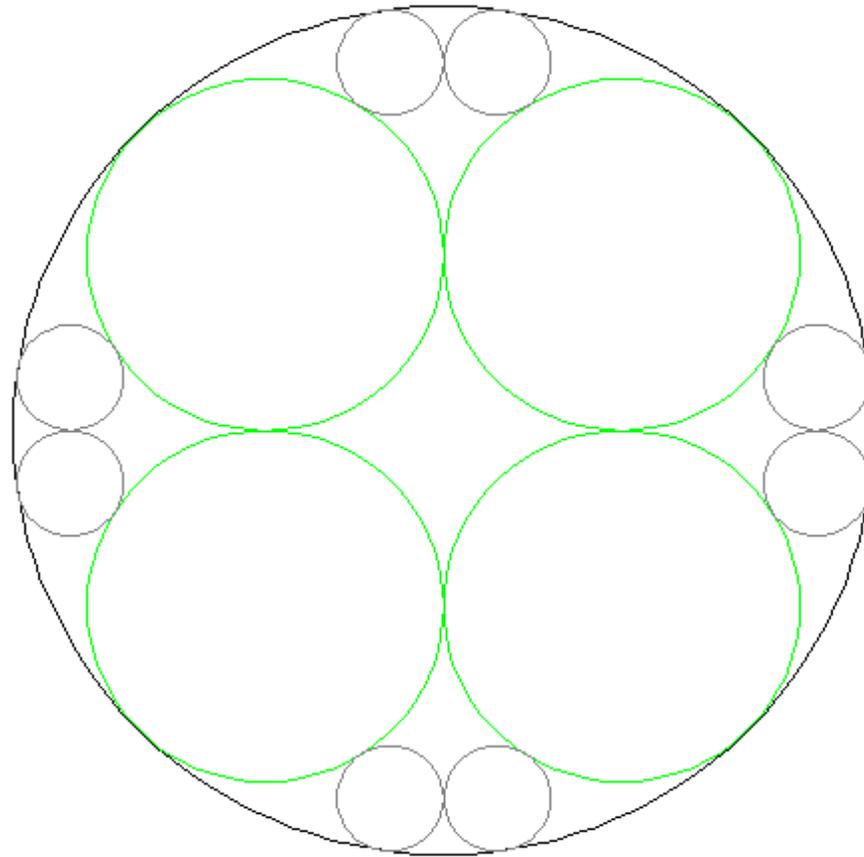
Fraktale von J. LEYS



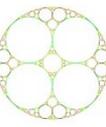
Startkonstellation



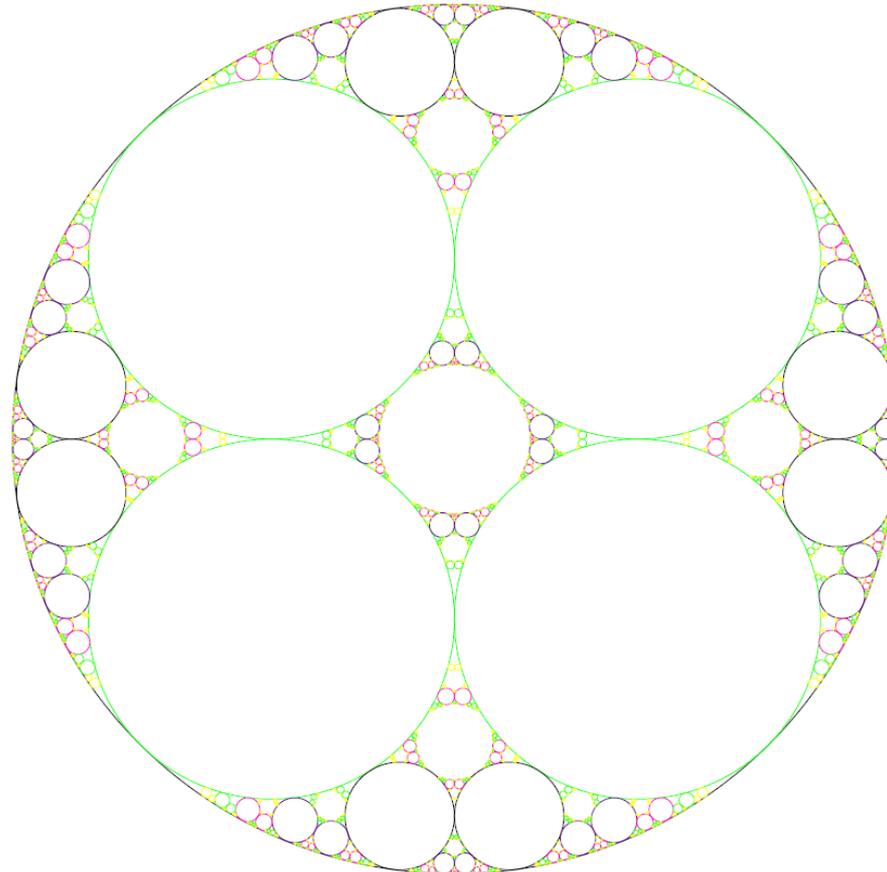
Fraktale von J. LEYS



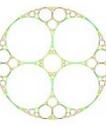
Nach einer Iteration



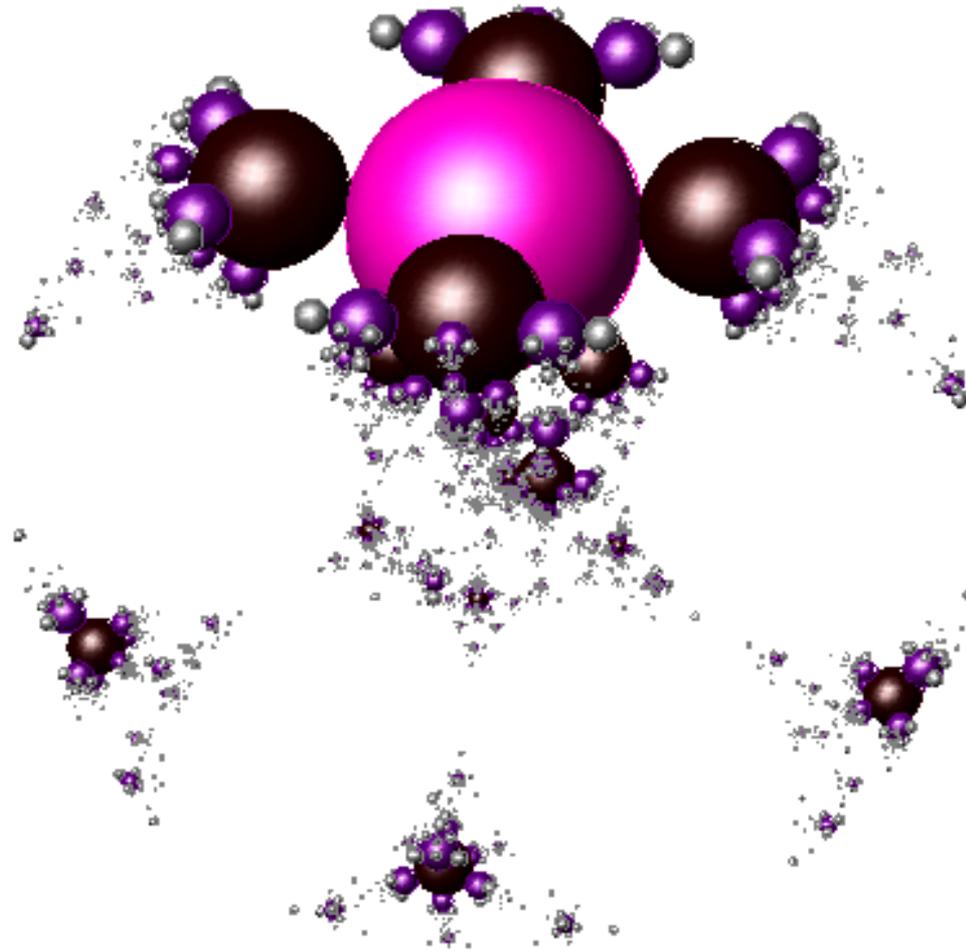
Fraktale von J. LEYS

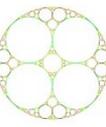


Nach fünf Iterationen



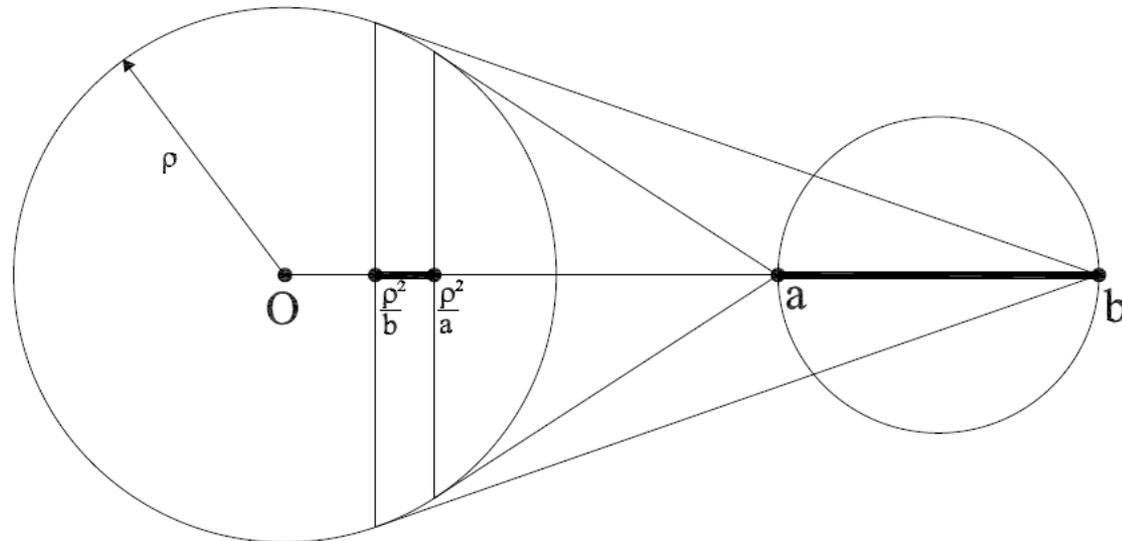
Verallgemeinerung



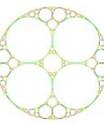


Verallgemeinerung

Satz:
Haben Startkreis und Inversionskreis keine inneren Punkte gemeinsam, so ist der Radius des invertierten Kreises kleiner, als jener des Startkreises.



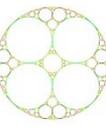
⇒ Bietet also die Möglichkeit, fraktale Strukturen zu erzeugen!



Verallgemeinerung

Den durch Inversion in der Ebene π erhaltenen Kreis kann man auch folgendermaßen erzeugen:

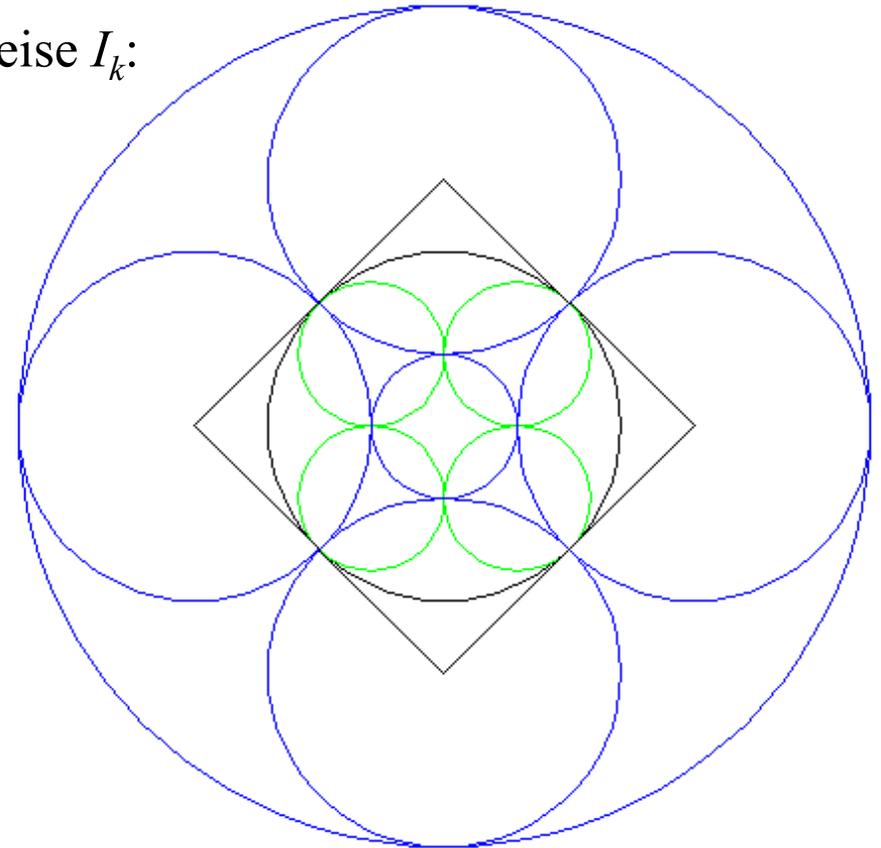
- Startkreis in Ebene π wird durch st^{-1} auf Kugel κ abgebildet
- Zu jener Ebene, in der dieser (Bild-)kreis liegt, wird der Pol bzgl. κ bestimmt
- Dieser Pol wird der projektiven Spiegelung unterworfen (mittels Doppelverhältnisses)
- Zu diesem gespiegelten Pol wird die Polarebene bestimmt
- Schnitt dieser Polarebene mit κ liefert Urbild eines Kreises, welcher wieder durch st nach π projiziert wird

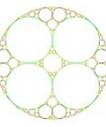


Fraktale von J. LEYS

Untersuche spezielle Lage der Inversionskreise I_k :

- Bilder $st^{-1}(I_k)$ liegen in speziellen Ebenen

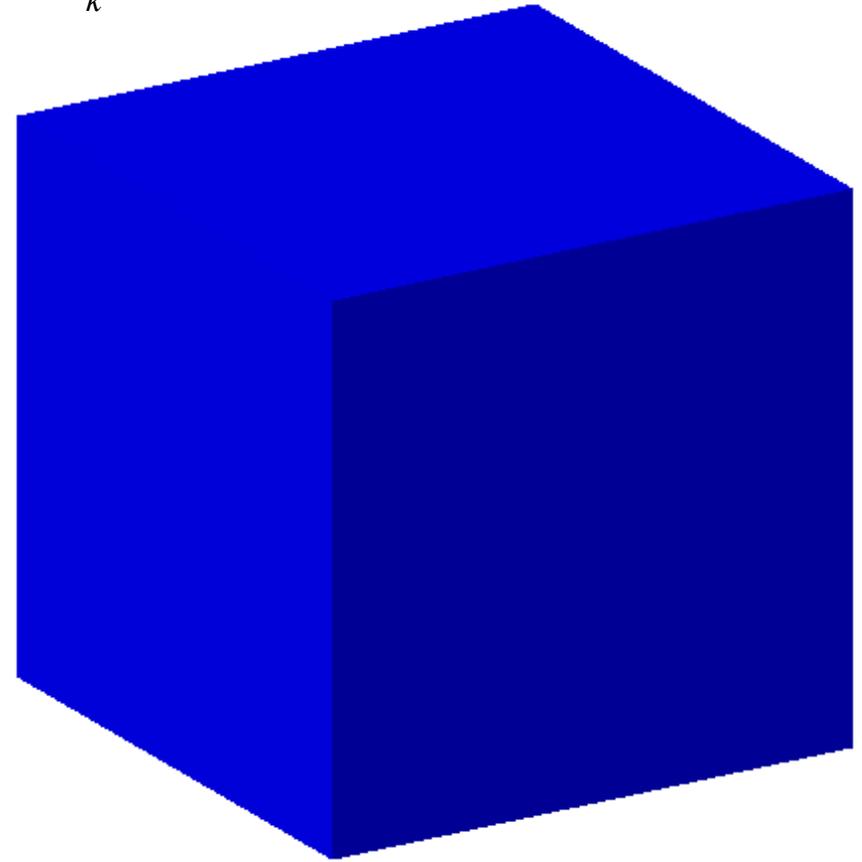


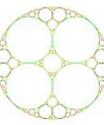


Fraktale von J. LEYS

Untersuche spezielle Lage der Inversionskreise I_k :

- Bilder $st^{-1}(I_k)$ liegen in speziellen Ebenen
- Sie beschreiben einen Würfel des \mathbb{E}_3 ,
welcher im Ursprung zentriert ist und
Kantenlänge $\sqrt{2}$ besitzt

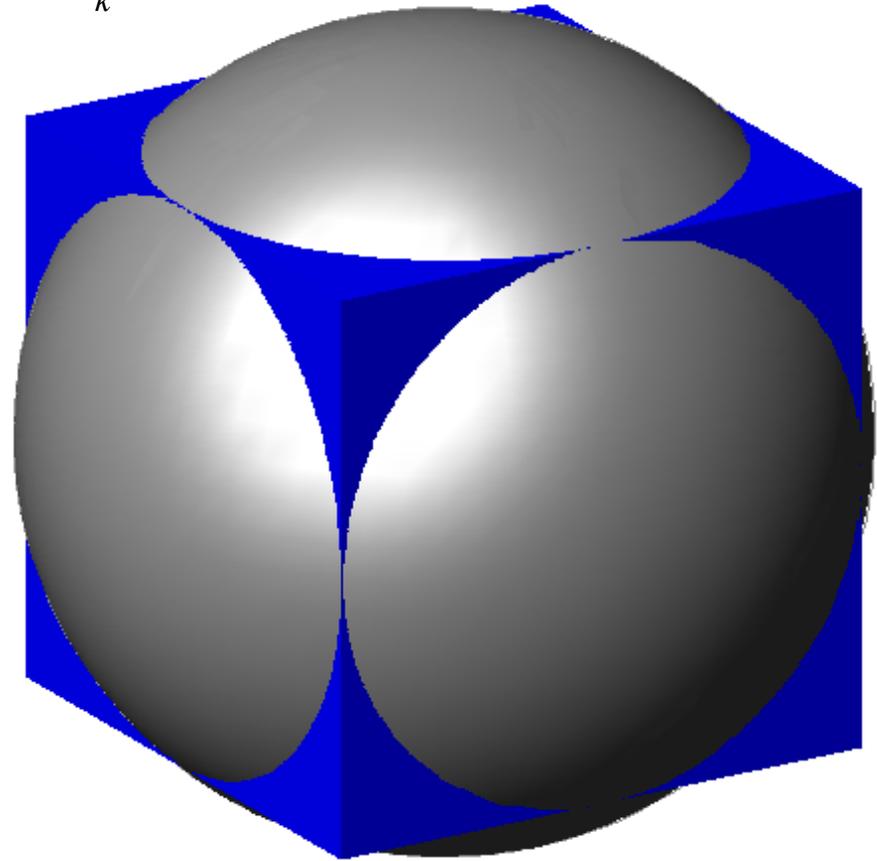


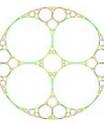


Fraktale von J. LEYS

Untersuche spezielle Lage der Inversionskreise I_k :

- Bilder $st^{-1}(I_k)$ liegen in speziellen Ebenen
- Sie beschreiben einen Würfel des \mathbb{E}_3 , welcher im Ursprung zentriert ist und Kantenlänge $\sqrt{2}$ besitzt
- Dieser Würfel wird von der Kugel κ genau in den jeweiligen Kantenmittelpunkten berührt

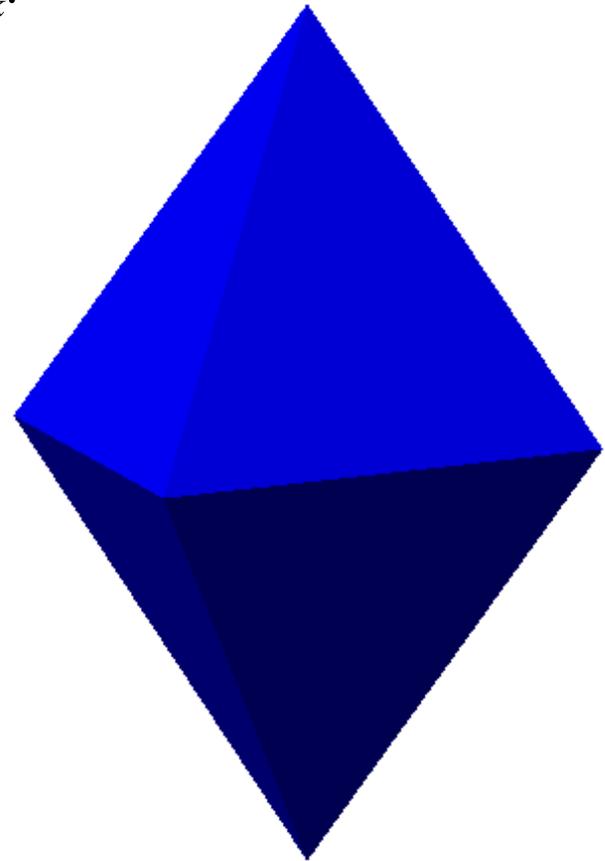


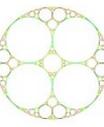


Fraktale von J. LEYS

Untersuche spezielle Lage der Inversionskreise I_k :

- Bilder $st^{-1}(I_k)$ liegen in speziellen Ebenen
- Sie beschreiben einen Würfel des \mathbb{E}_3 ,
welcher im Ursprung zentriert ist und
Kantenlänge $\sqrt{2}$ besitzt
- Dieser Würfel wird von der
Kugel κ genau in den jeweiligen
Kantenmittelpunkten berührt
- Dual zum Würfel ist das Oktaeder



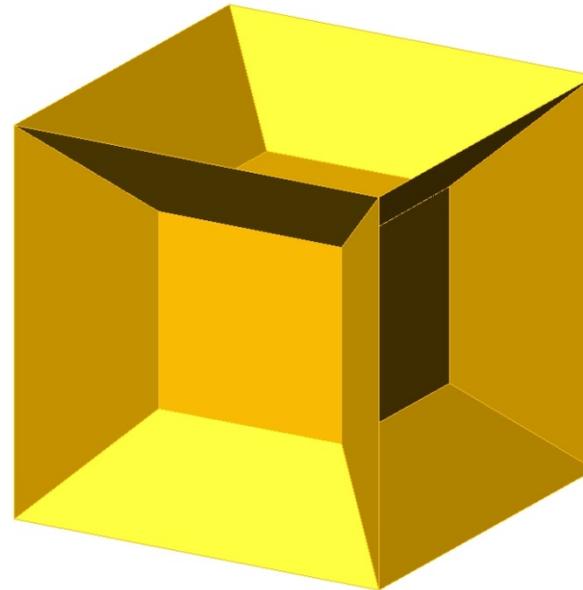


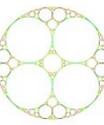
Verallgemeinerung

Dimensionserweiterung E_3 auf E_4 :

Inversionskreise \rightarrow Inversionskugeln

- Würfel \rightarrow Hyperwürfel
- Dual zum Hyperwürfel ist das Kreuzpolytop
- Anzahl der Seitenflächen des Kreuzpolytops ist 2^n , also $2^4=16$

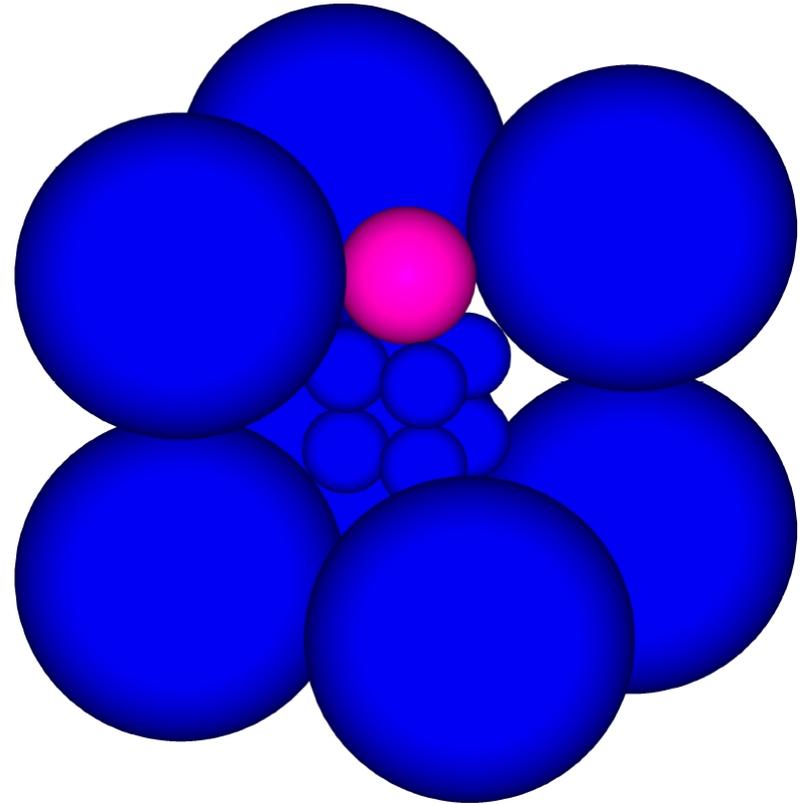




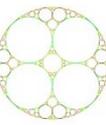
Verallgemeinerung

Dimensionserweiterung E_3 auf E_4 :
Inversionskreise \rightarrow Inversionskugeln

- Würfel \rightarrow Hyperwürfel
- Dual zum Hyperwürfel ist das Kreuzpolytop
- Anzahl der Seitenflächen des Kreuzpolytops ist 2^n , also $2^4=16$

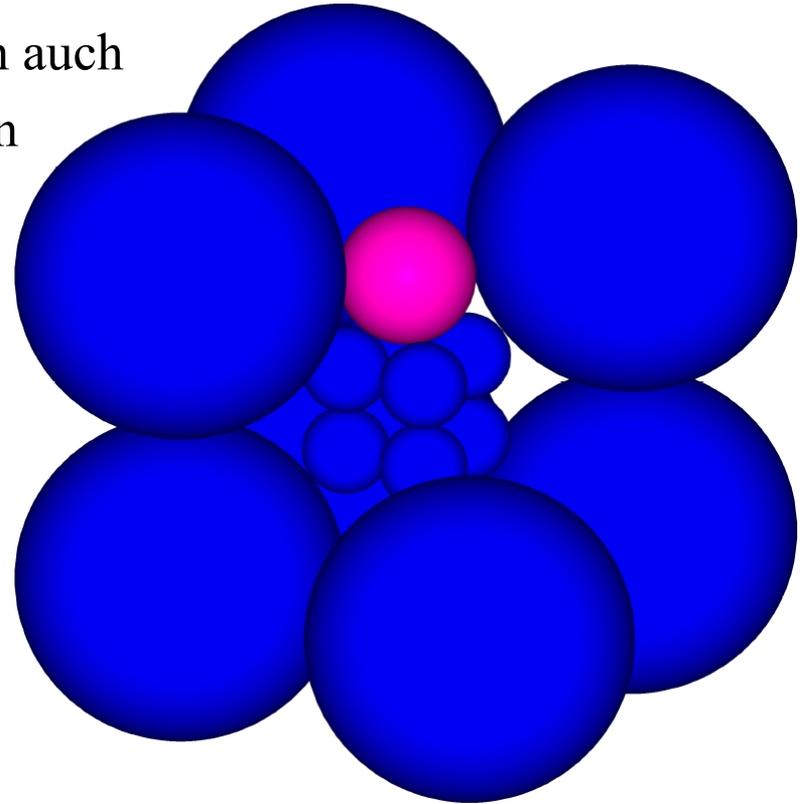


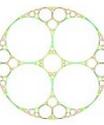
\Rightarrow Man erhält 16 projektive Spiegelebenen bzw. 16 Inversionskugeln



Verallgemeinerung

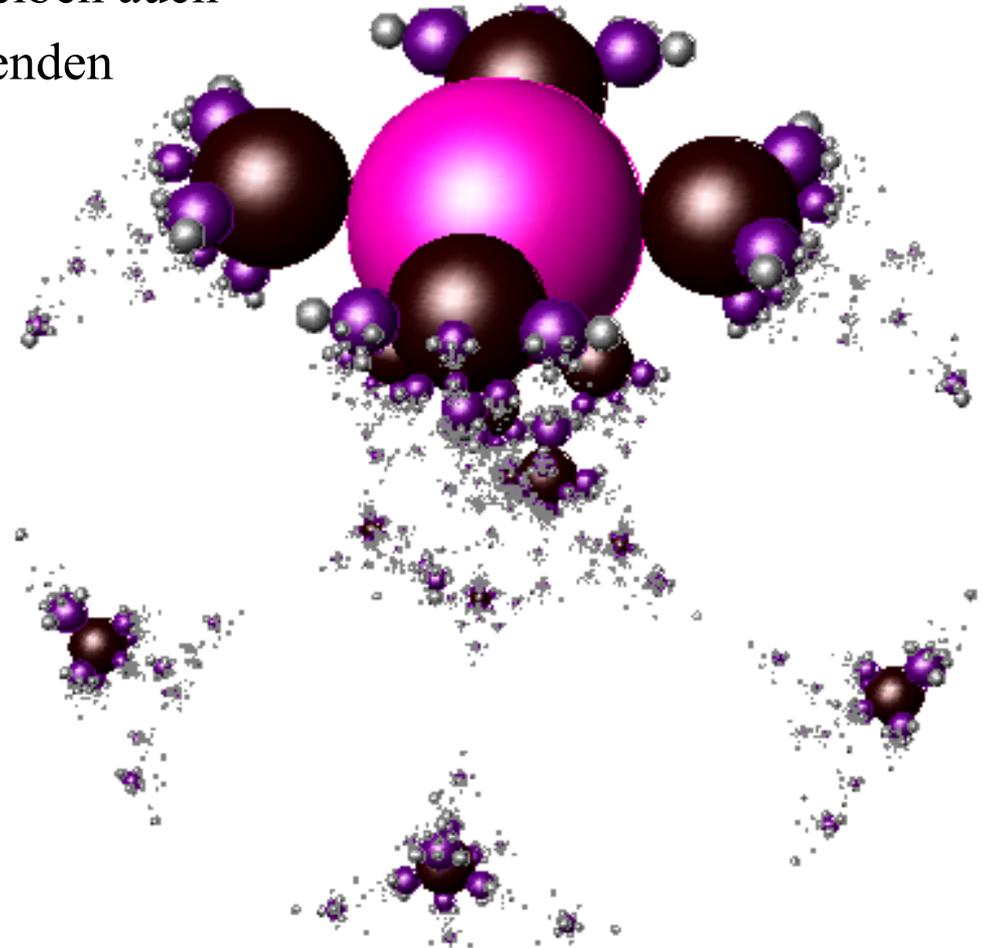
Symmetrien der Ausgangssituation bleiben auch bei dem durch 16 Inversionen entstehenden Kugelfraktal erhalten





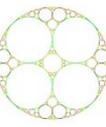
Verallgemeinerung

Symmetrien der Ausgangssituation bleiben auch bei dem durch 16 Inversionen entstehenden Kugelfraktal erhalten

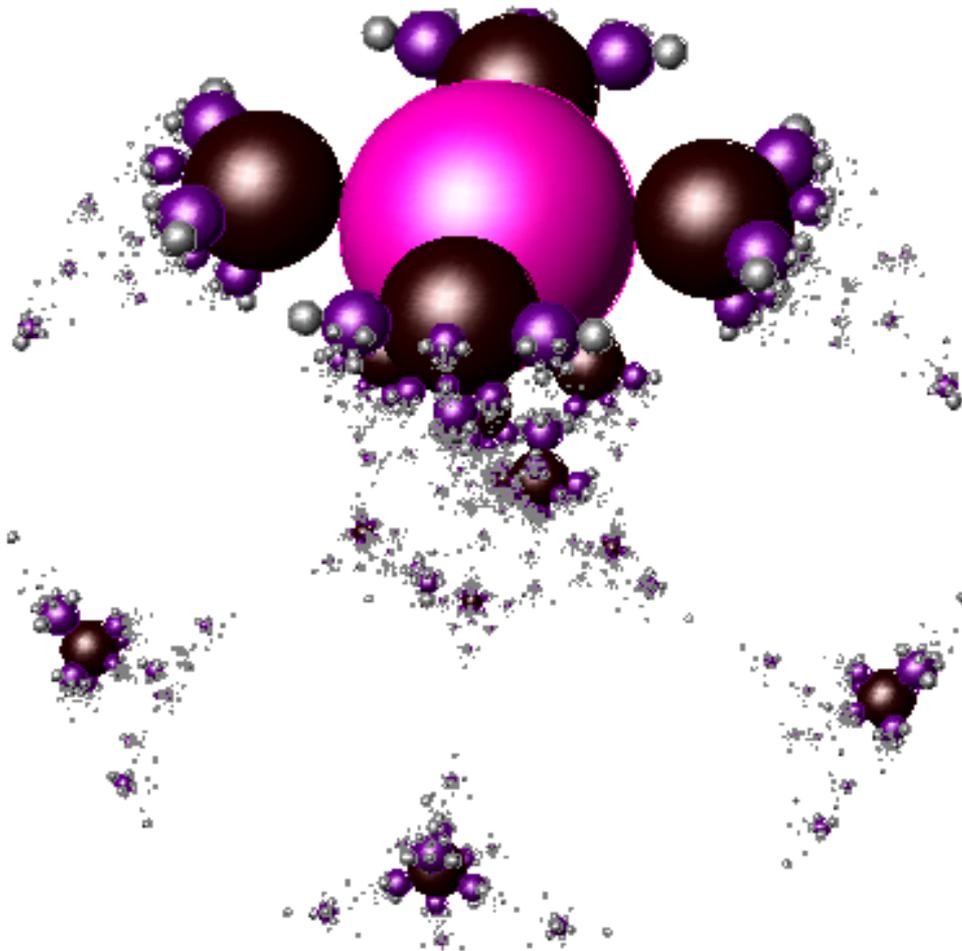


Kugelfraktal nach 3 Iterationen

Weist die Struktur des Zentralrisses eines Hyperwürfels auf

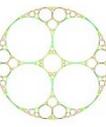


Verallgemeinerung



- Kugeln kommen aus einer größeren „nicht hinaus“
- „gewisse“ Freiräume (Kugeln) bleiben

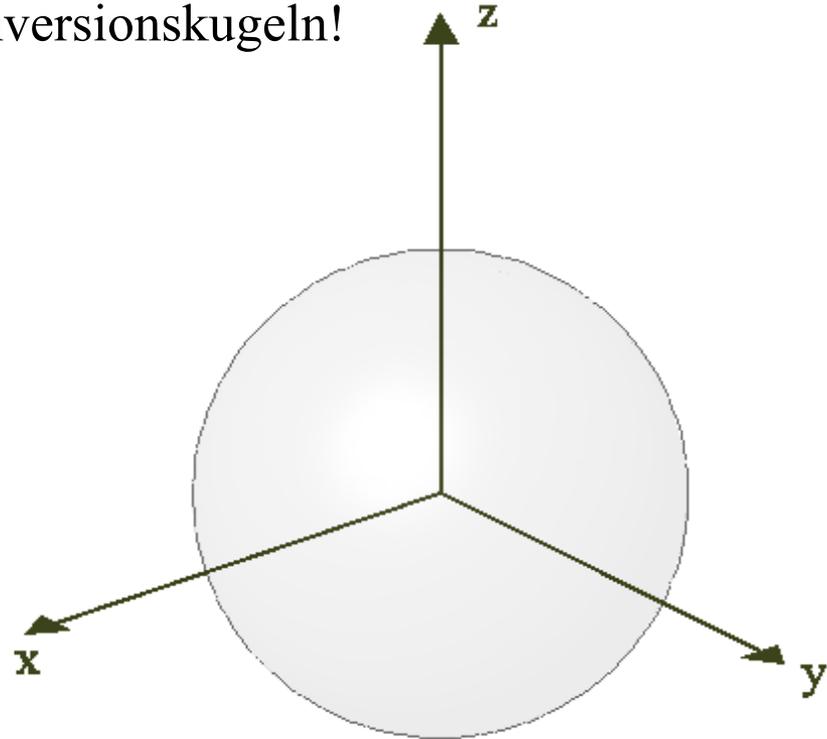
⇒ Kein Zufall!

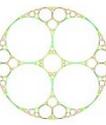


Verallgemeinerung

Suche Kugeln mit spezieller Lage zu Inversionskugeln!

- Eine große schneidet alle 8 großen Inversionskugeln orthogonal
⇒ umschließt das Kugelfraktal

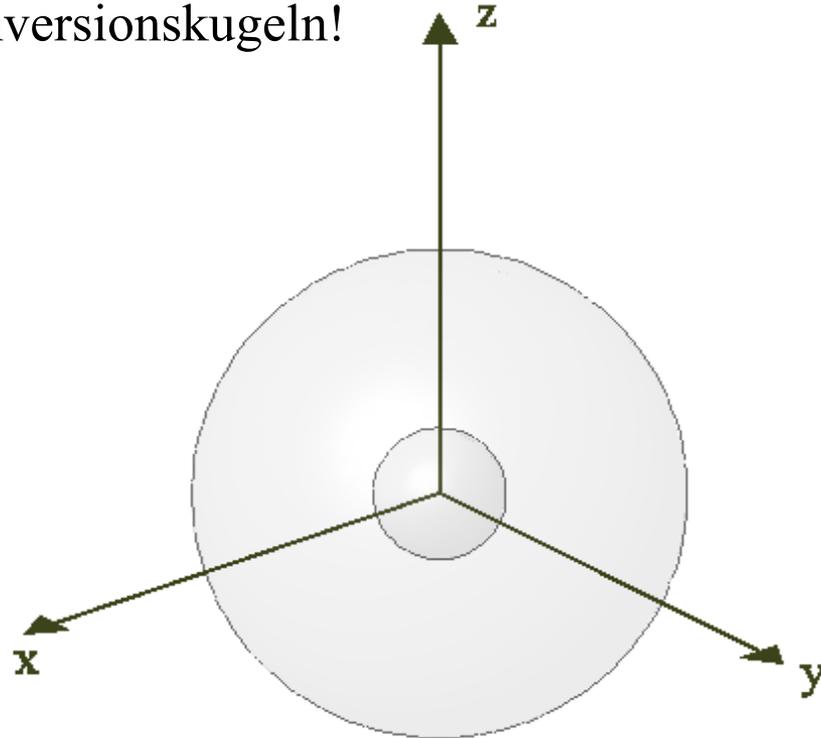


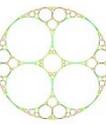


Verallgemeinerung

Suche Kugeln mit spezieller Lage zu Inversionskugeln!

- Eine große schneidet alle 8 großen Inversionskugeln orthogonal
⇒ umschließt das Kugelfraktal
- Eine kleinere schneidet alle 8 kleinen Inversionskugeln orthogonal
⇒ liegt unterhalb der Startkugel und enthält sie somit nicht

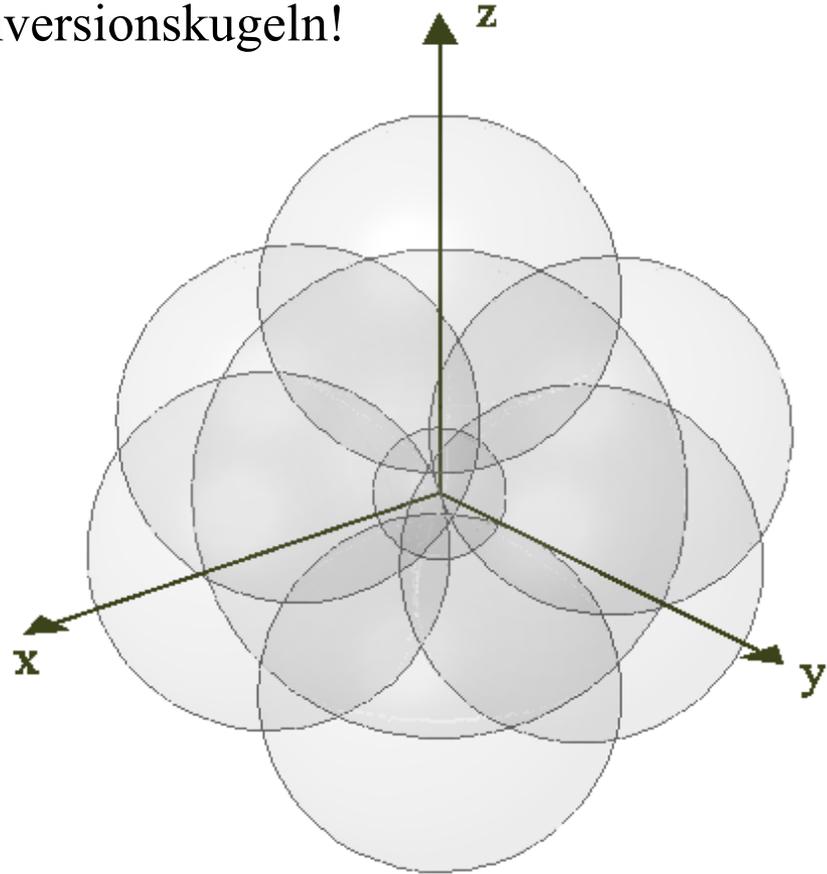


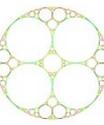


Verallgemeinerung

Suche Kugeln mit spezieller Lage zu Inversionskugeln!

- Eine große schneidet alle 8 großen Inversionskugeln orthogonal
⇒ umschließt das Kugelfraktal
- Eine kleinere schneidet alle 8 kleinen Inversionskugeln orthogonal
⇒ liegt unterhalb der Startkugel und enthält sie somit nicht
- 6 weitere, die je 4 große und 4 kleine Inversionskugeln orthogonal schneiden

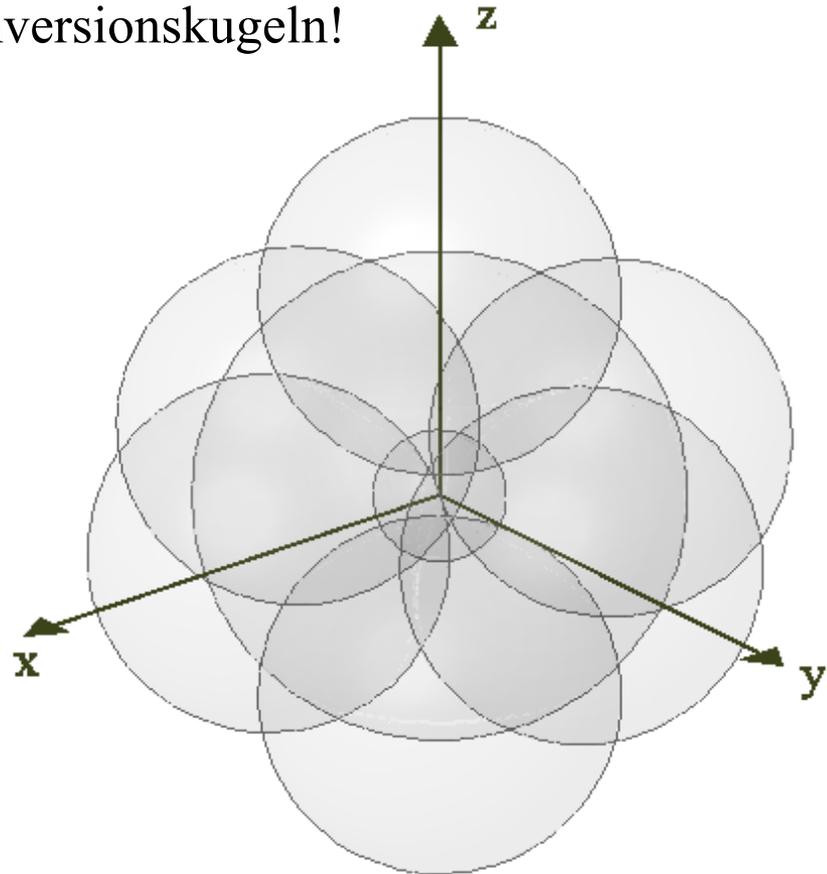




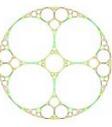
Verallgemeinerung

Suche Kugeln mit spezieller Lage zu Inversionskugeln!

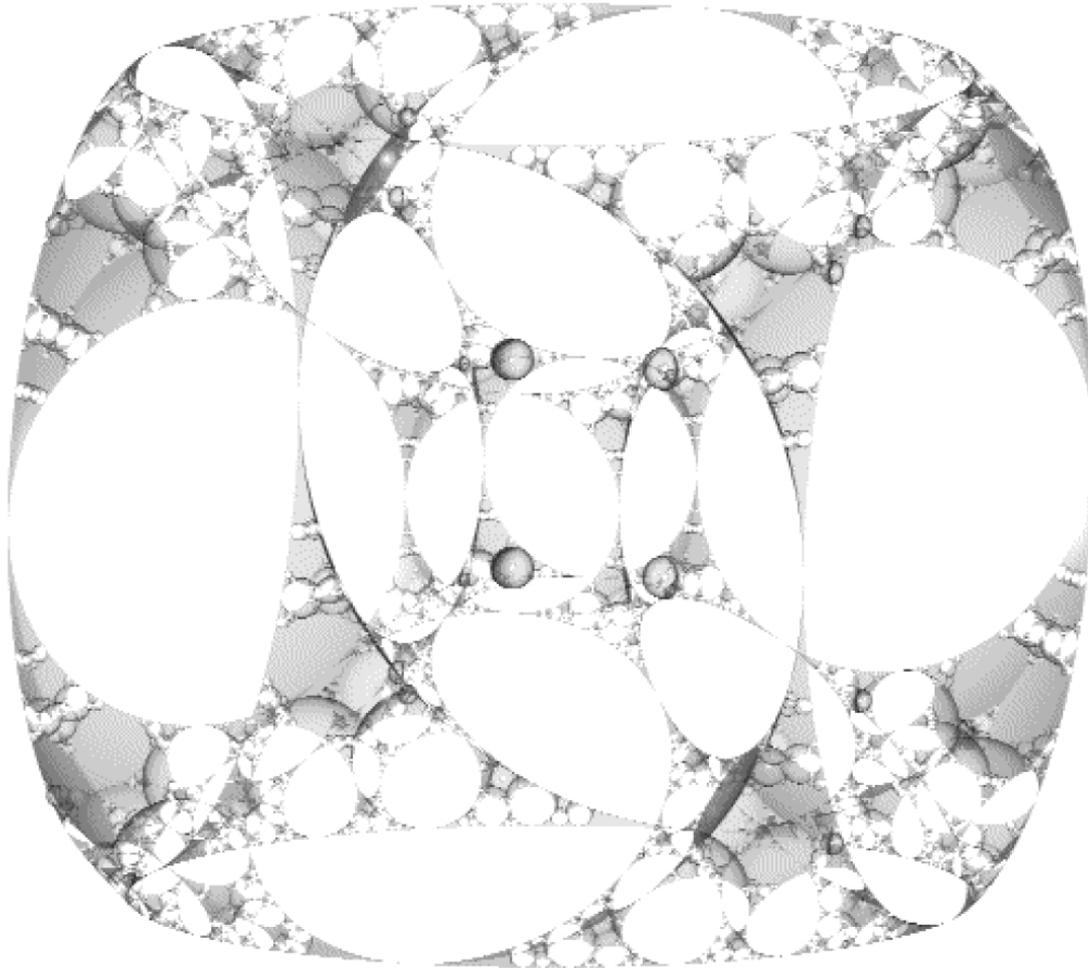
- Eine große schneidet alle 8 großen Inversionskugeln orthogonal
⇒ umschließt das Kugelfraktal
- Eine kleinere schneidet alle 8 kleinen Inversionskugeln orthogonal
⇒ liegt unterhalb der Startkugel und enthält sie somit nicht
- 6 weitere, die je 4 große und 4 kleine Inversionskugeln orthogonal schneiden

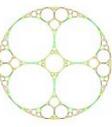


⇒ Erzeuge mit diesen 8 Kugeln neues Fraktal bzgl. der 16 Inversionen!



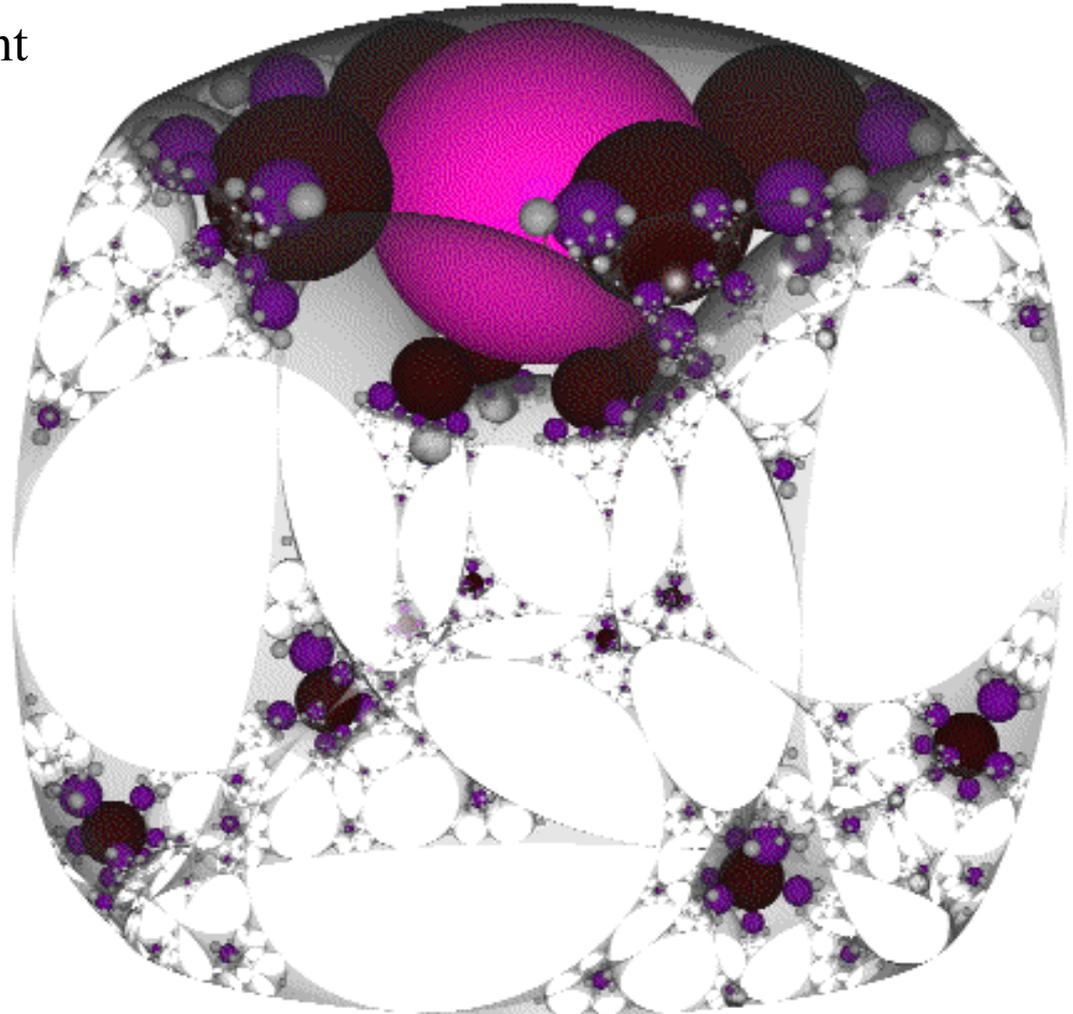
Verallgemeinerung

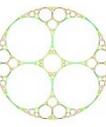




Verallgemeinerung

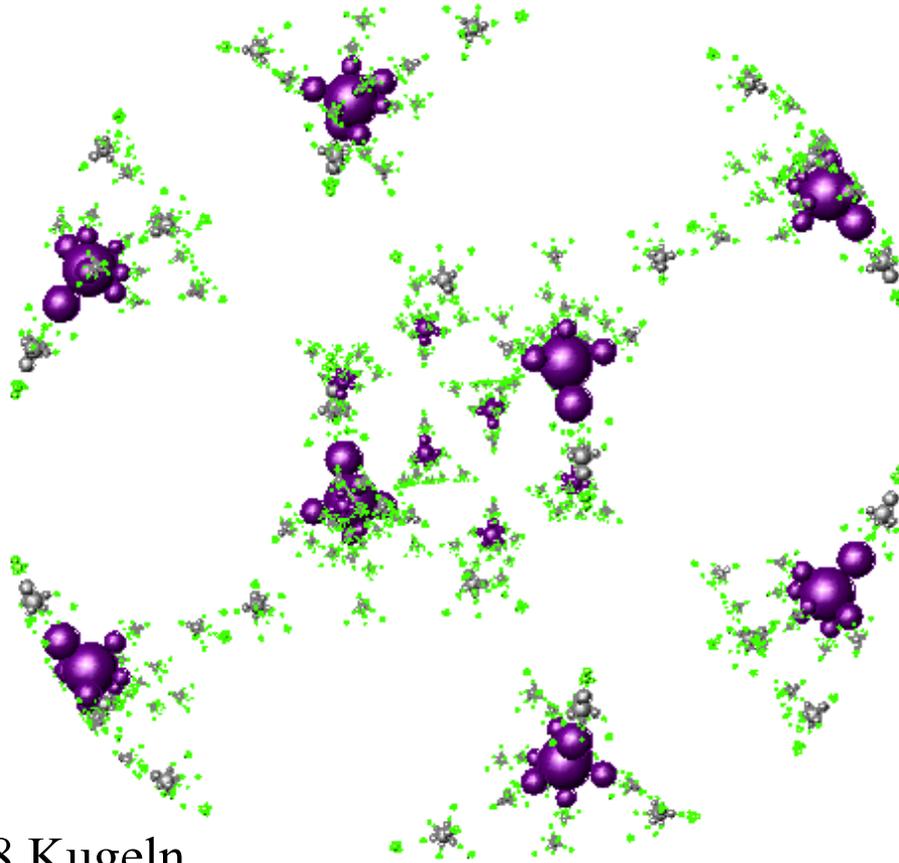
Beide Fraktale in einer Ansicht



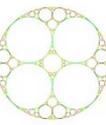


Verallgemeinerung

Weiteres Kugelfractal mit Startkugeln symmetrisch bzgl. der Oktaedergruppe

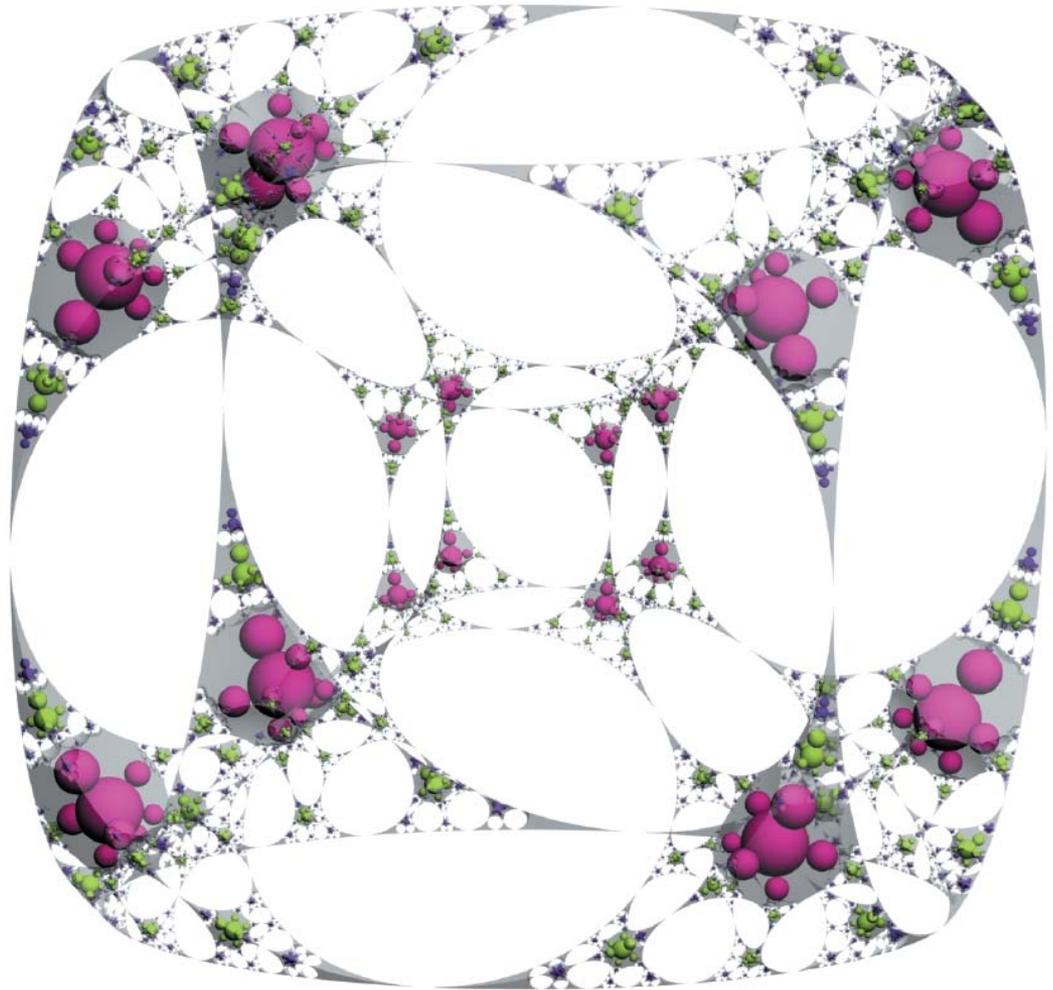


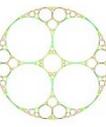
Besteht aus 24 568 Kugeln



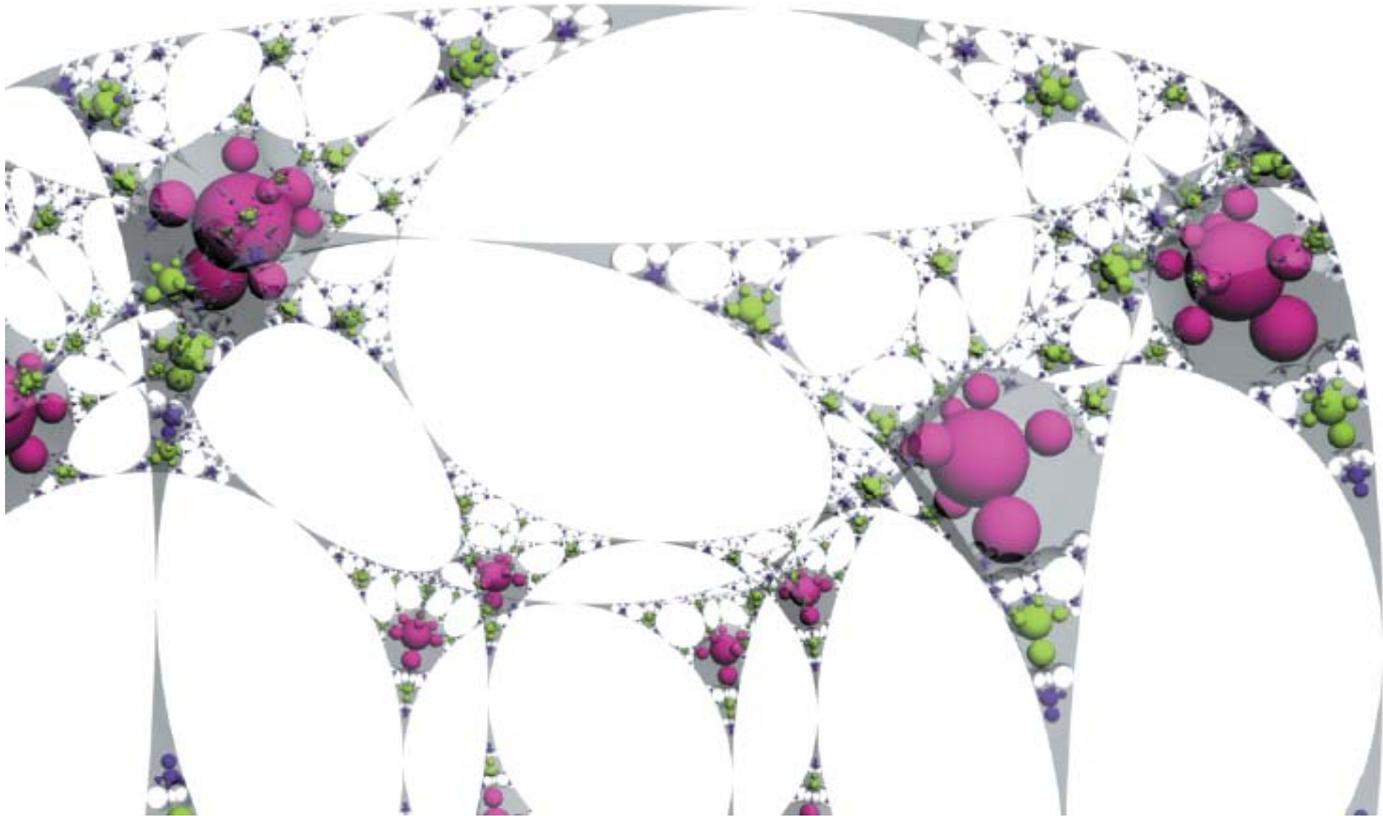
Verallgemeinerung

Beide Fraktale in einer Ansicht

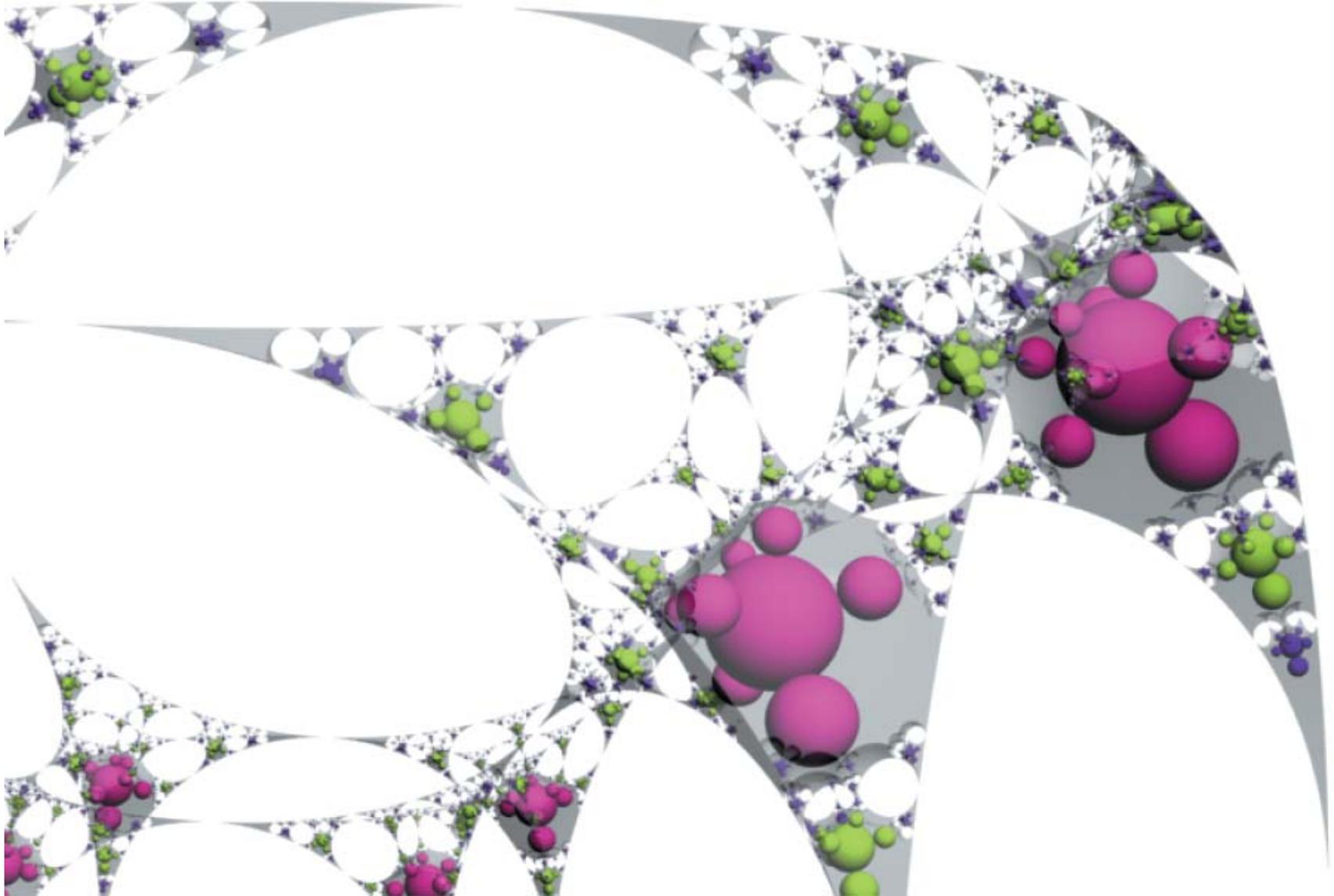
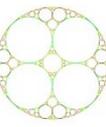


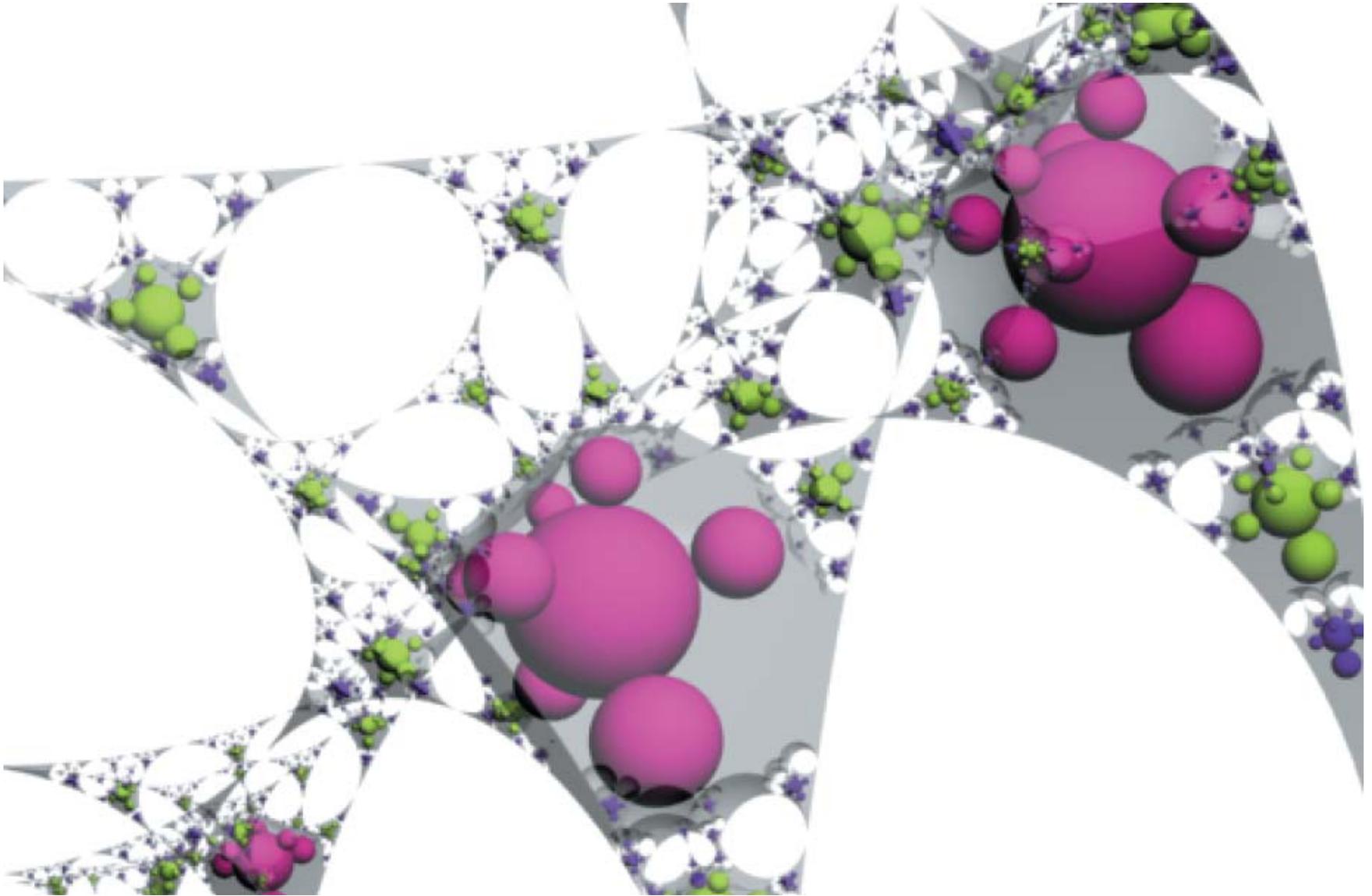
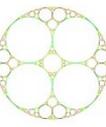


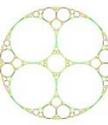
Verallgemeinerung



KUGELFRAKTALE



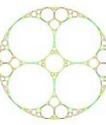




Verallgemeinerung

Dimensionsabschätzung

Anzahl Fraktalkugeln	Anzahl Rasterkugeln	Radius der Rasterkugeln δ	Anzahl getroffene Rasterkugeln $V(\delta)$	$\frac{\log(V(\delta))}{\log(\delta)}$
2064	125	0,473205	82	$\approx 5,88955$
2064	1000	0,236603	272	$\approx 3,88921$
2064	3375	0,157735	508	$\approx 3,37359$
2064	8000	0,118301	792	$\approx 3,12696$
2064	64000	0,0591506	2368	$\approx 2,74778$
2064	125000	0,0473205	3496	$\approx 2,67449$



Verallgemeinerung

Dimensionsabschätzung

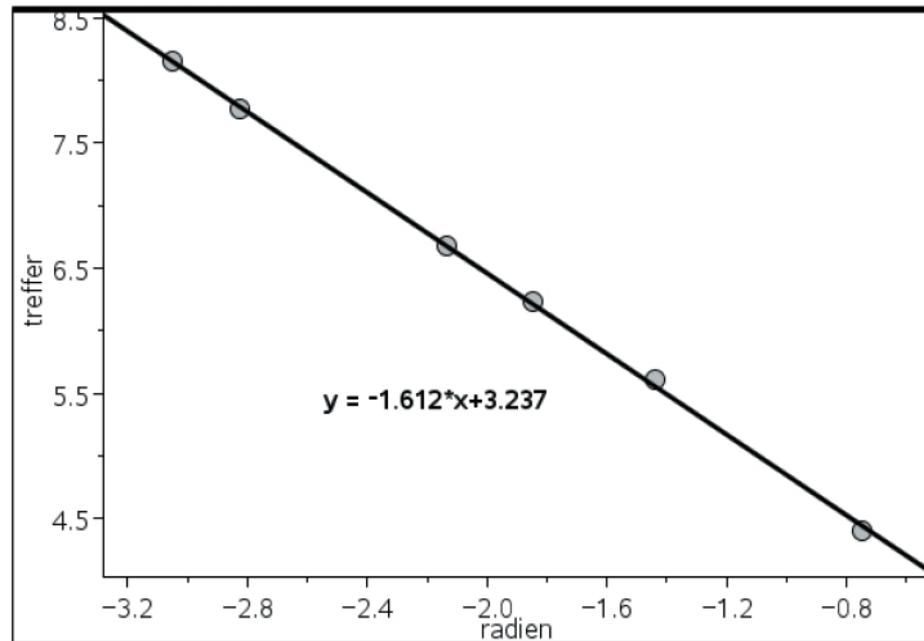
ε ... Steigung der Regressionsgeraden

d ... Näherungsweise Dimension

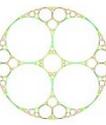
$$d \sim 1 - \varepsilon$$

$$d \sim 1 - (-1,61227)$$

$$d \sim 2,61227$$



Als erste Abschätzung der Dimension erhält man: $d \sim 2,61227$.



Verallgemeinerung

Probleme bei der Programmierung mit AutoLISP in AutoCAD 2005

- Bool'sche Operation Differenz
- Test auf Neuigkeit
- Rundungsfehler (Pol im Inneren von stereographischer Kugel?)