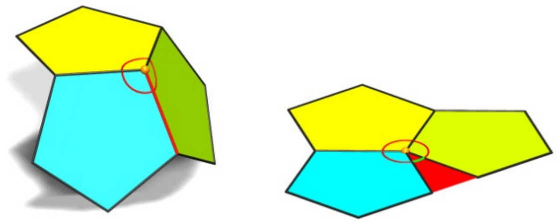
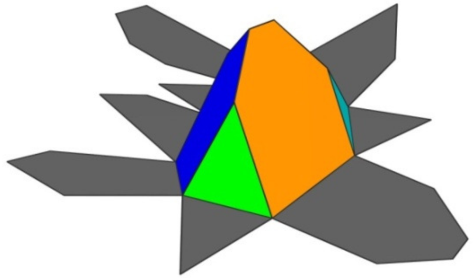
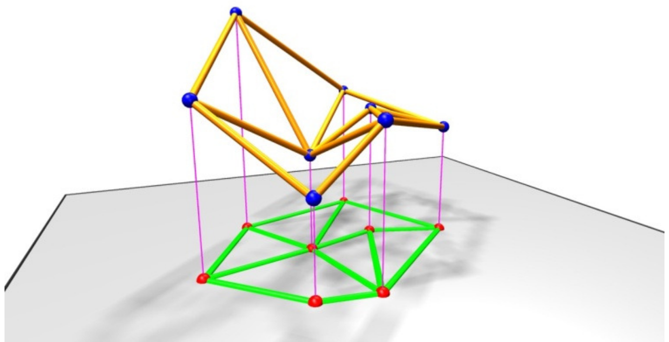
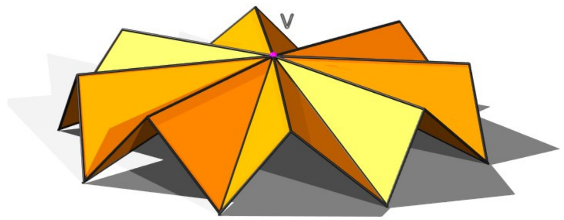




Ein Beitrag zur Polyedergeometrie – Krümmung und Abwicklung



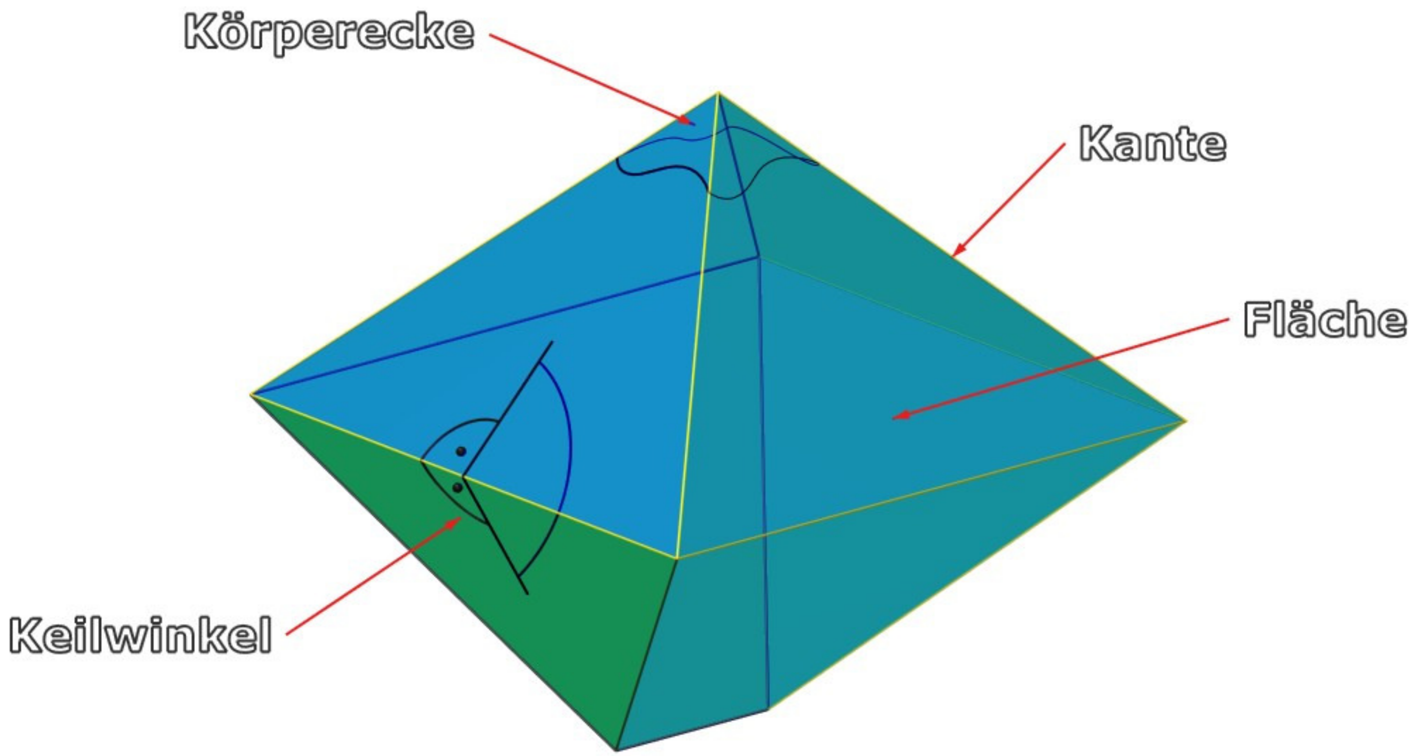


Folgenden Fragen wird nachgegangen:

- Was ist ein Netz eines Polyeders?
- Ist jeder Polyeder durch sein Netz darstellbar, d.h. in die Ebene nach bestimmten Vorschriften abwickelbar?
- Wie muss ein Polyeder beschaffen sein, damit er ein Netz besitzt?

Definition eines Polyeders:

Ein Polyeder ist eine einfache Struktur aus endlich vielen Flächen, wobei alle Flächen zusammenhängend sind.


Körperecke
Kante
Fläche
Keilwinkel

Man unterscheidet zwischen:

- geschlossenen Polyedern: Jede Kante gehört genau zwei Seitenflächen an.

- offenen Polyedern: Es gibt Kanten, die jeweils nur einer Seitenfläche angehören und somit den Rand bilden.

Von besonderem Interesse beim Abwickeln zu einem Netz sind konvexe Polyeder:

Ein Polyeder heißt konvex, wenn er ganz auf einer Seite jeder Trägerebene einer Seitenfläche des Polyeders liegt.

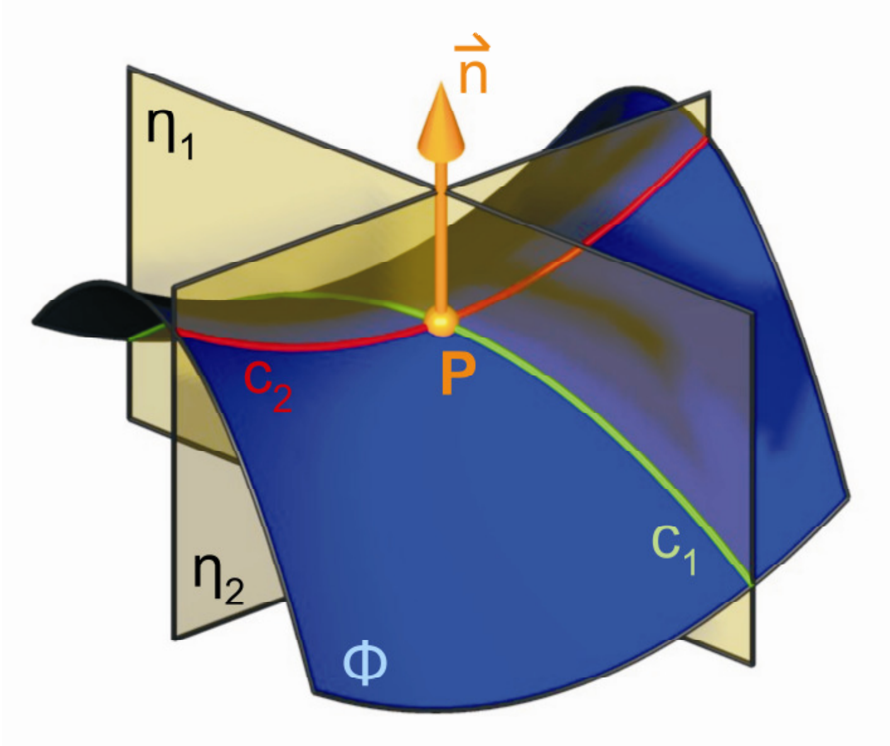
D.h. jeder Flächen- und Keilwinkel ist kleiner als 180°.

Die Abwickelbarkeit eines Polyeders hängt u.a. von seiner <u>Krümmung</u> ab!

Zum Verständnis dafür benötigt man Grundkenntnisse aus der Differentialgeometrie.

Von besonderem Interesse sind dabei die <u>Hauptkrümmungen</u> in einem Punkt einer glatten Fläche.

Veranschaulichung der Hauptkrümmungen:



Die Hauptkrümmungen sind die minimale und maximale vorzeichenbehaftete Krümmung aller resultierenden Schnittkurven.

Die Hauptkrümmungen gehören nicht zur inneren Geometrie einer Fläche, ihr Produkt jedoch schon, was als Gauß'sche Krümmung K bekannt ist.

Es gibt noch eine weitere Definition der Gauß'schen Krümmung, welche auf den Umkreis (oder Flächeninhalt) einer kleinen Kreisscheibe um einen Flächenpunkt P bezogen ist.

Man betrachtet eine geodätische Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt P und „innerem“ Radius *r* auf der Fläche .

Sei C(*r*) der Umkreis dieser Kreisscheibe.

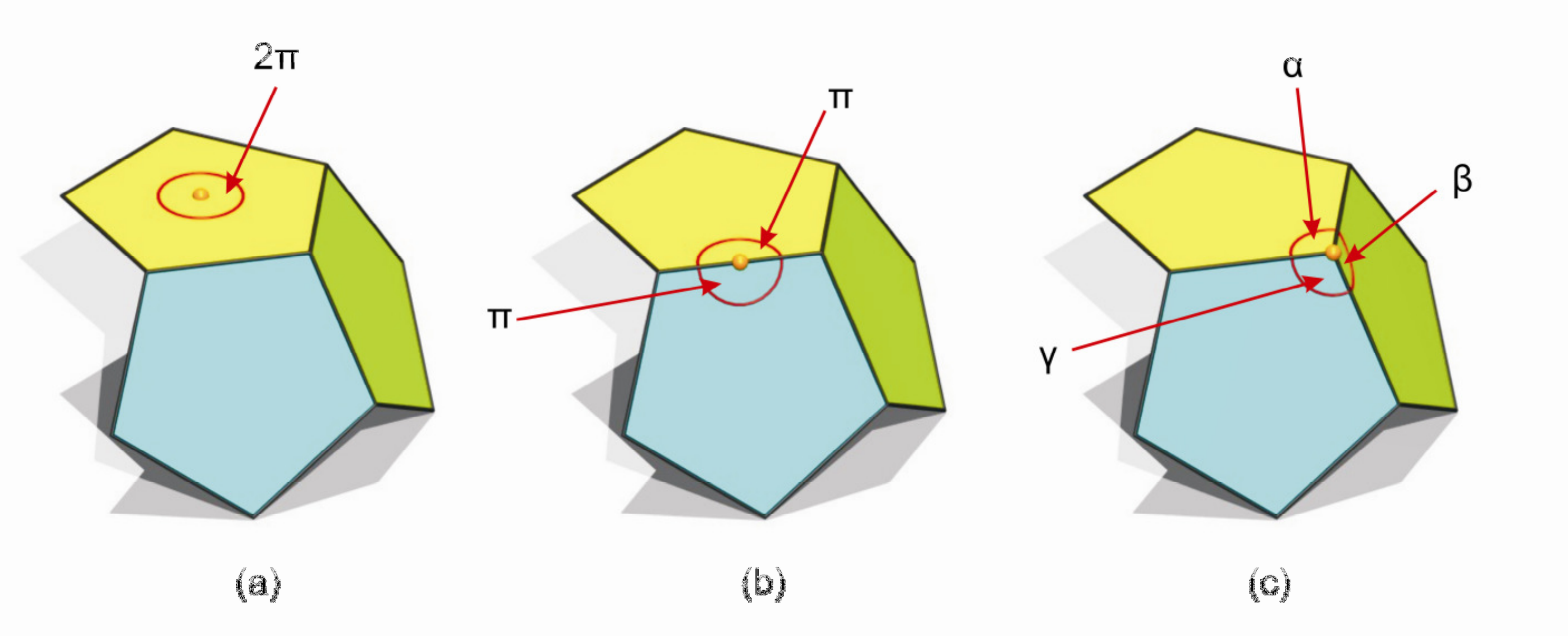
Dann ist die Gauß‘sche Krümmung auch Grenzwert von

$$K = \lim_{r \to 0} \frac{3\left(2r\pi - C(r)\right)}{\pi r^3}$$

Krümmung polyedrischer Flächenpunkte

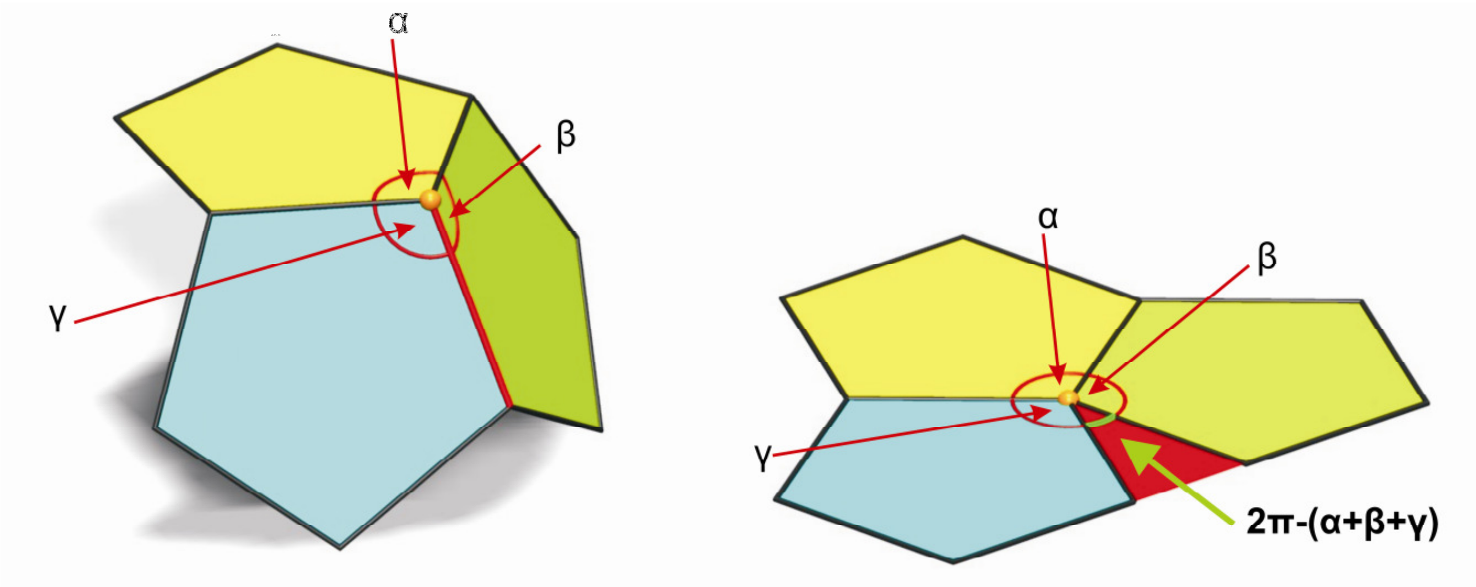
Der flächendefizitäre Gesichtspunkt der Gauß'schen Krümmung macht die Definition dieser auf einer polyedrischen Fläche plausibel:

Die Gauß'sche Krümmung eines Punktes P auf einer polyedrischen Fläche, kurz die „Krümmung“ in P, ist das Winkeldefizit bei P, also 2π minus der Summe der in P zusammentreffenden Flächenwinkel.



Die gesamte Krümmung eines (geschlossenen) Polyeders konzentriert sich offensichtlich auf die Körperecken.

Würde man eine polyedrische Fläche in der Umgebung einer konvexen Körperecke aufschneiden und verebnen, so entstünde ein keilförmiger Spalt, dessen Öffnungswinkel genau der Krümmung der Körperecke entspricht.

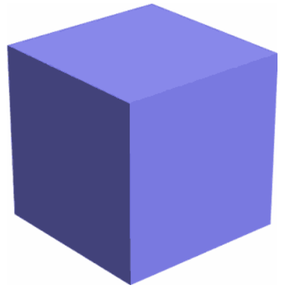


Derartige Punkte bezeichnet man folglich als positiv gekrümmt.

Beispiele für Krümmungen konvexer Körperecken:

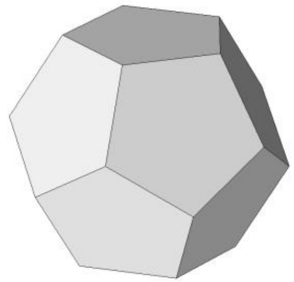
- Alle Körperecken eines Würfels:

$$90° = 360° - 3 \cdot 90°$$

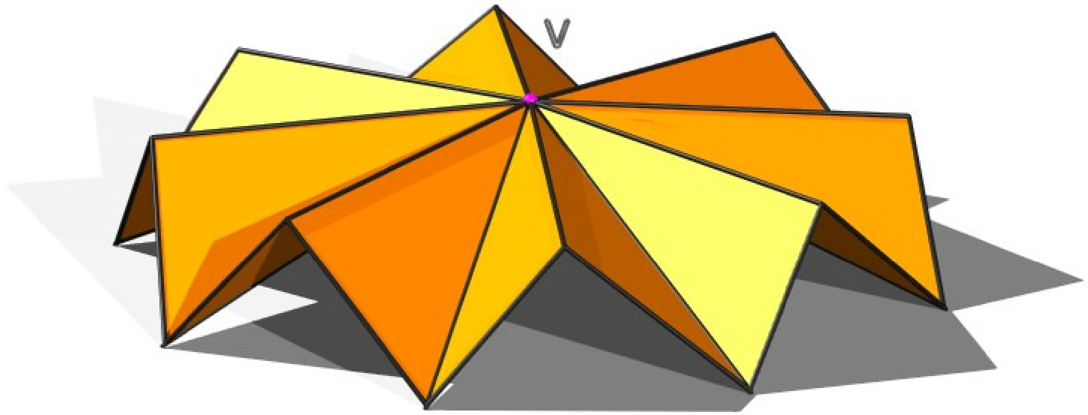


- Alle Körperecken eines Dodekaeders:

$$36° = 360° - 3 \cdot 108°$$



Betrachtet man nicht konvexe Körperecken, so ist die Summe der Flächenwinkel, die in diesen zusammenkommen größer als 2π, weshalb eine negative Krümmung vorliegt.



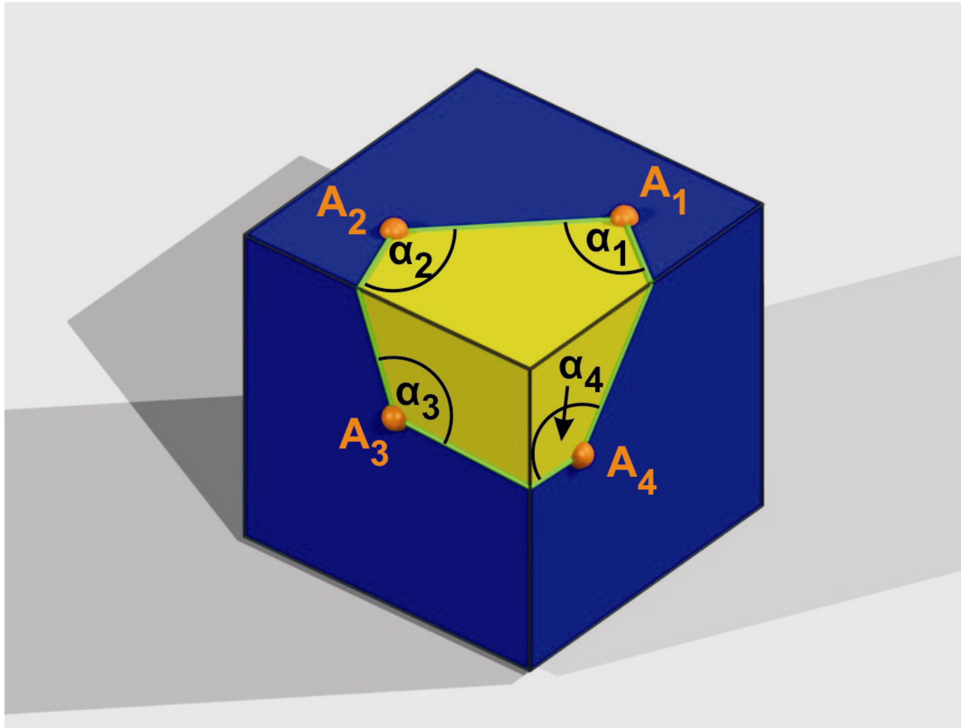
Umgebungen um solche Punkte können nicht zu einem Netz verebnet werden (Überlappungen).

Die Krümmung polyedrischer Flächenpunkte ist ein entscheidendes Kriterium, ob und wie Polyeder verebnet werden können!!!

Innergeometrische Eigenschaften konvexer Polyeder

Dabei geht es um das Krümmungsverhalten, dass beim Abwickeln von besonderem Interesse ist.

Über kürzeste Pfade („Kürzeste“) und geodätische Polygone gelangt man schließlich zur Gesamtkrümmung eines konvexen Polyeders.



Unterschied zwischen der Winkelsumme eines ebenen und eines geodätischen Polygons.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi = \sum_{j=1}^{m} \omega_j$$

Haben alle Körperecken eines Polyeders, auf die sich bekanntlich die ganze Krümmung konzentriert eine positive Krümmung, so spricht man von einem Polyeder positiver Krümmung.

Dies sind genau die konvexen Polyeder.

Die Gesamtkrümmung eines konvexen Polyeders (also eines Polyeders, der zu einer Sphäre homöomorph ist), beträgt 4π.

Das Wissen um das Krümmungsverhalten von Polyedern kann beim Verebnen dieser in bedeutender Weise eingebracht werden.

Interessant sind die keilförmigen Spalten, die beim Verebnen von Umgebungen positiv gekrümmter Flächenpunkte (also konvexer Körperecken) auftreten, wenn diese entlang einer von diesem Punkt ausgehenden Kante aufgeschnitten werden.

Dadurch können Überlappungen, ein wesentliches „Qualitätskriterium“ beim Abwickeln, vermieden werden.

Das überlappungsfreie Verebnen eines konvexen Polyeders zu einem Netz scheint nun aufgrund der auftretenden Spalten bei jeder Körperecke trivial zu sein.

Das ist aber ein Irrtum!

Abwicklung von Polyedern zu Netzen

Vorreiterrolle zu dieser Thematik wird Albrecht Dürer (1471 - 1528) zugeschrieben.

Im Jahr 1525 präsentierte er in seinem Buch „Underweysung der Messung“ eine Beschreibung von zahlreichen Polyedern, die er in entfalteter, verebneter Form darstellte und die heutzutage als Netze bezeichnet werden.

Definition eines Netzes eines Polyeders:

Wir nennen eine Abwicklung und Verebnung eines Polyeders ein Netz des selbigen, wenn gilt:

1. Die Abwicklung ist ein einziges, einfach zusammenhängendes Stück in der Ebene.

2. Der Rand der Abwicklung besteht aus (ganzen) Kanten des Polyeders. Die Abwicklung ist also eine Vereinigung der polyedrischen Seitenflächen.

3. Die Abwicklung hat keine Selbstüberlappungen, d.h. der Rand stellt ein „einfaches Polygon“ dar.

Der schwierigste Punkt bei dieser Problematik betrifft die geforderte Überlappungsfreiheit.

Beim Abwickeln und Verebnen eines Polyeders über die Kanten ist es zu aller erst notwendig, den Polyeder entlang einer Reihe von Kanten aufzuschneiden, um ihn öffnen zu können.

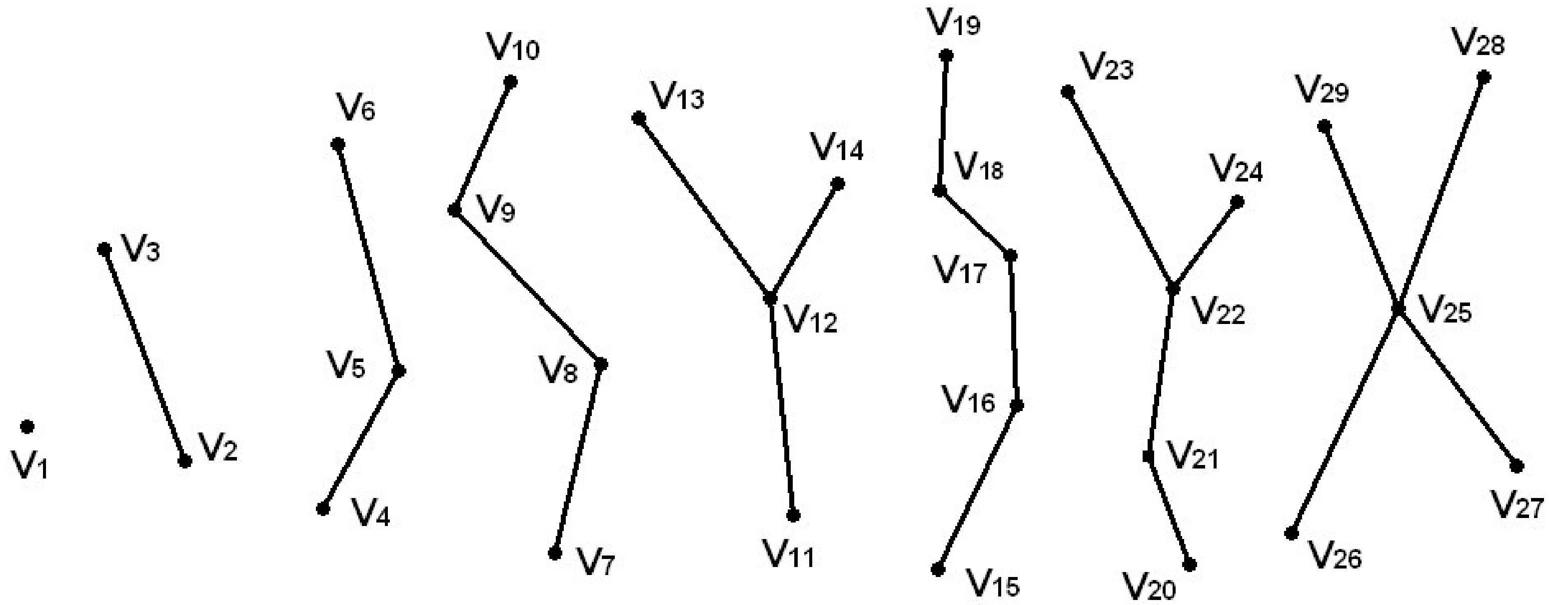
Diese Schnittfolge kann als Graph aufgefasst werden, der je nach Polyedertyp und Art des Aufschneidens eine gewisse Beschaffenheit hat.

Ein Zyklus ist ein Weg in einem Graphen, der mit dem gleichen Knoten beginnt und endet.

Ein zusammenhängender Graph ohne Zyklen heißt ein Baum. Die Knoten vom Grad 1 eines Baumes heißen seine Blätter. Einen nicht zusammenhängenden Graphen, der aus Bäumen besteht nennt man Wald.

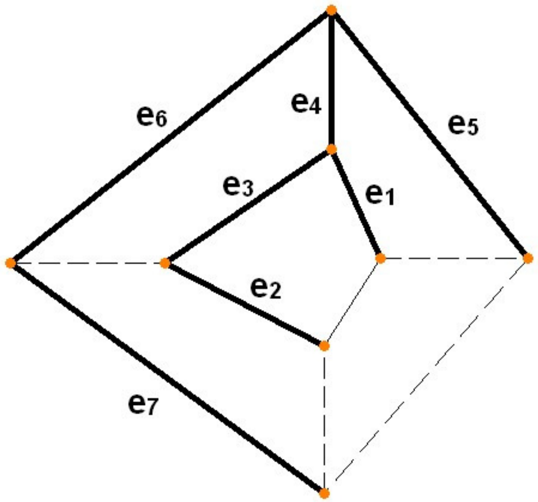
Beispiel:

Alle möglichen Bäume mit höchstens 5 Knoten. Die abgebildeten Bäume zusammen bilden einen Wald:



Die folgende Definition handelt von Spannbäumen, eine Graphenform, welche die Schnittfolge auf einem Polyeder letztendlich darstellen sollte:

Ein Baum $T \subseteq G$ heißt <u>Spannbaum</u> von G, wenn er ganz G aufspannt, d.h. wenn T und G dieselbe Knotenmenge haben.



Verknüpfung der Graphentheorie mit der Kantenabwicklung von Polyedern:

Die Kantenfolge, entlang der Polyeder aufgeschnitten wird, muss alle Körperecken derart umfassen, dass jede von ihnen zumindest von einer Schnittkante erreicht wird.

Ansonsten würde eine Körperecke ihre 3D-Struktur beibehalten und könnte nicht verebnet werden!

Folglich bilden die Schnittkanten einen Graphen, den wir als „Spann-Graphen" des Polyeders bezeichnen und der durch seine Kanten und Körperecken gebildet wird.

Um ein einzelnes Stück zu erhalten, können die Kanten des Graphen keinen Zyklus enthalten, da ein solcher die Abwicklung zerteilen würde.

Daher bilden die Schnittkanten zumindest einen Wald.

Um schließlich ein einfaches Polygon zu erhalten, muss die Menge der Schnittkanten zusammenhängen, da diese den Rand des verebneten Polygons bilden.

Aus diesem Grund bilden die Schnittkanten einen Spannbaum!

Zusammenfassung zu einem Satz:

Die Schnittkanten einer Abwicklung über die Kanten eines konvexen Polyeders zu einem einfachen Polygon bilden einen Spannbaum des Polyeders!

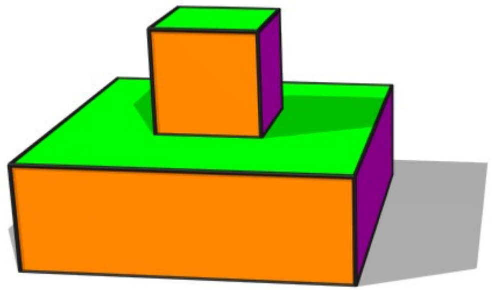
Unabwickelbare Polyeder

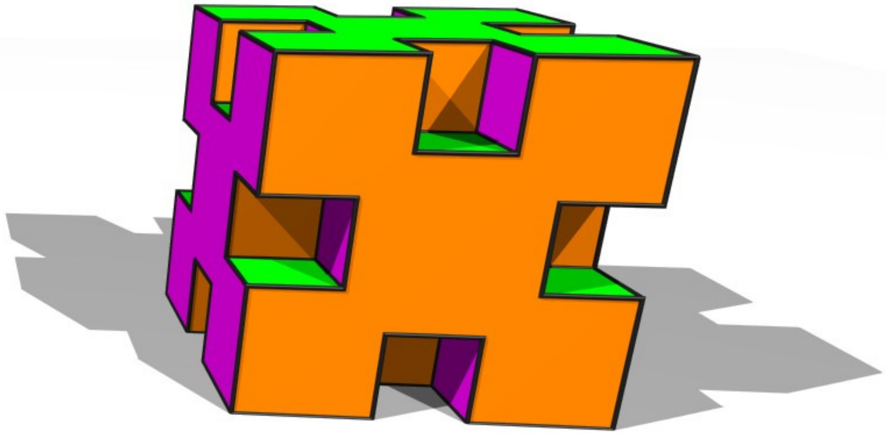
1.) Polyeder mit nicht konvexen Seitenflächen

Nicht alle Polyeder können entlang den Kanten aufgeschnitten und zu Netzen entfaltet werden!!!

Dafür gibt es leicht und schwer einsehbare Beispiele.

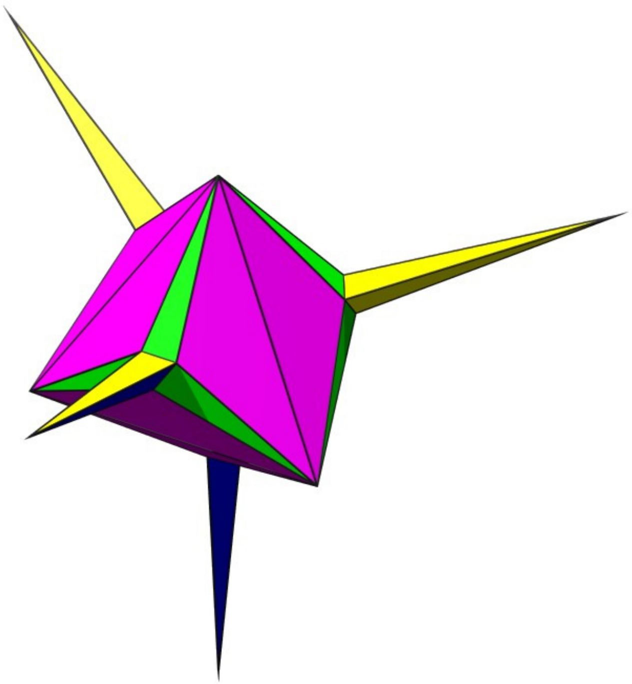
2 „orthogonale“ Polyeder, die kein Netz besitzen:



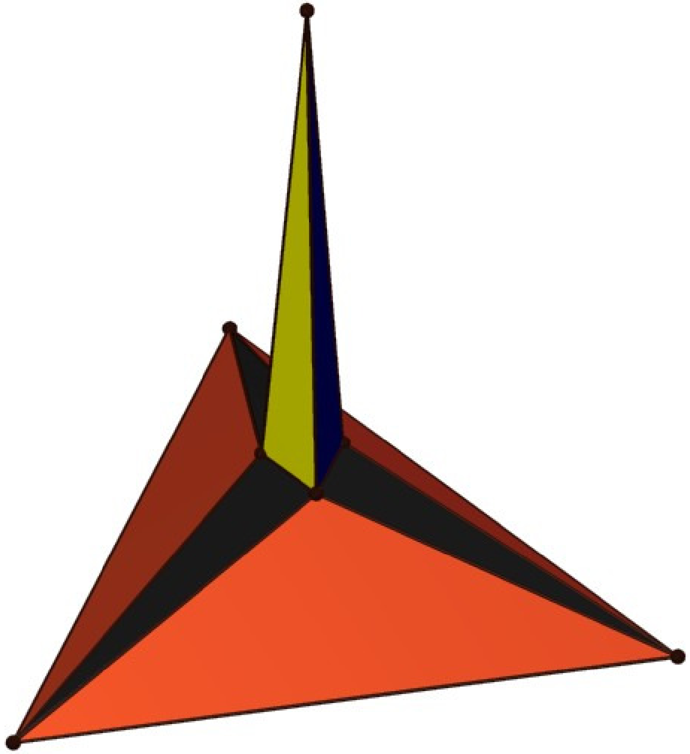


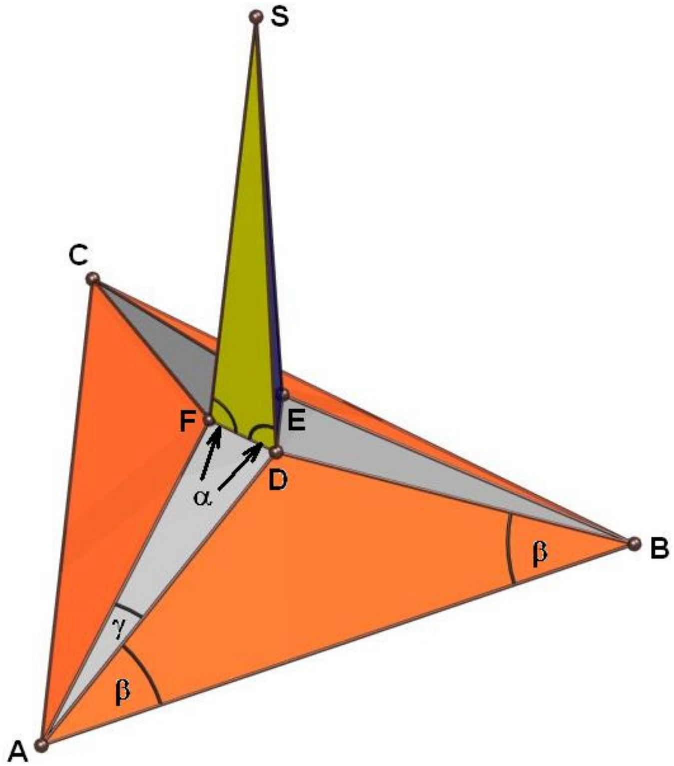
2.) Nicht konvexe Polyeder mit konvexen Seitenflächen

Zentrales Beispiel: „stacheliges“ Tetraeder



Dieses besteht aus „Hüten“ (offene polyedrische Flächen):





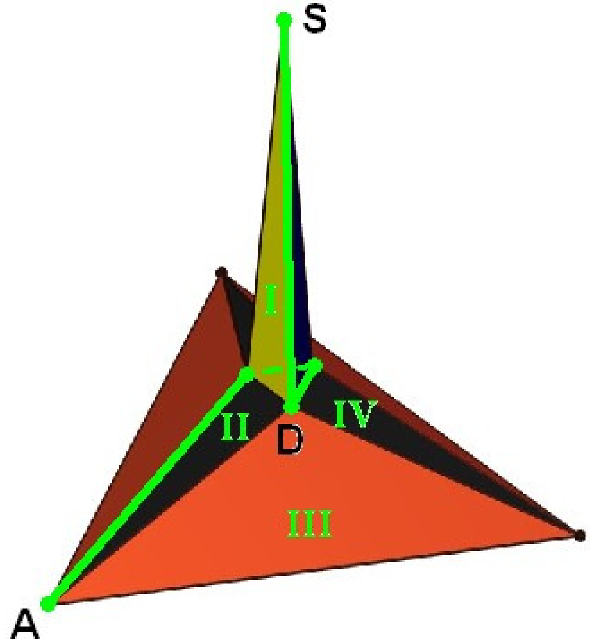
Die Körperecken D, E und F haben jeweils <u>negative Krümmung</u> (folgt aus Form des Hutes und den damit verbundenen Winkelwerten).

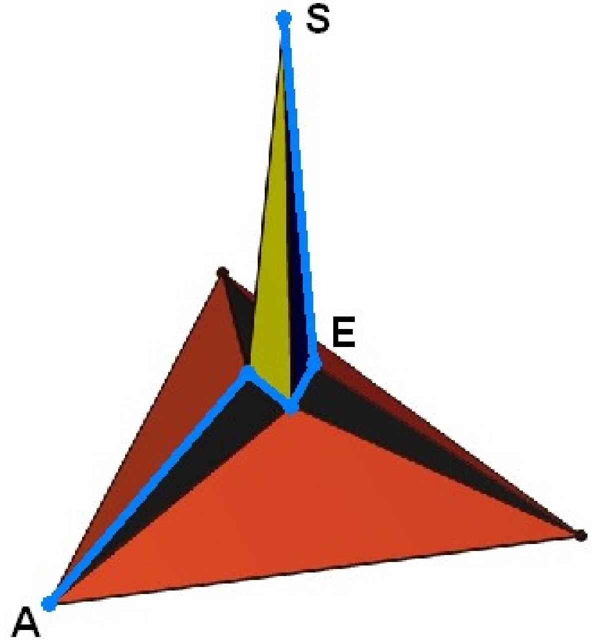
Man kann nun versuchen, den Hut entlang der Kanten so aufzuschneiden, dass die bei den negativ gekrümmten Körperecken einfallenden Dreiecke beim gesuchten Netz an verschiedenen Stellen angeheftet werden.

Die Schnittfolge kann als Graph aufgefasst werden („Baum“).

Dieser muss durch D, E und F laufen (ohne dort aufzuhören) und bei S enden.

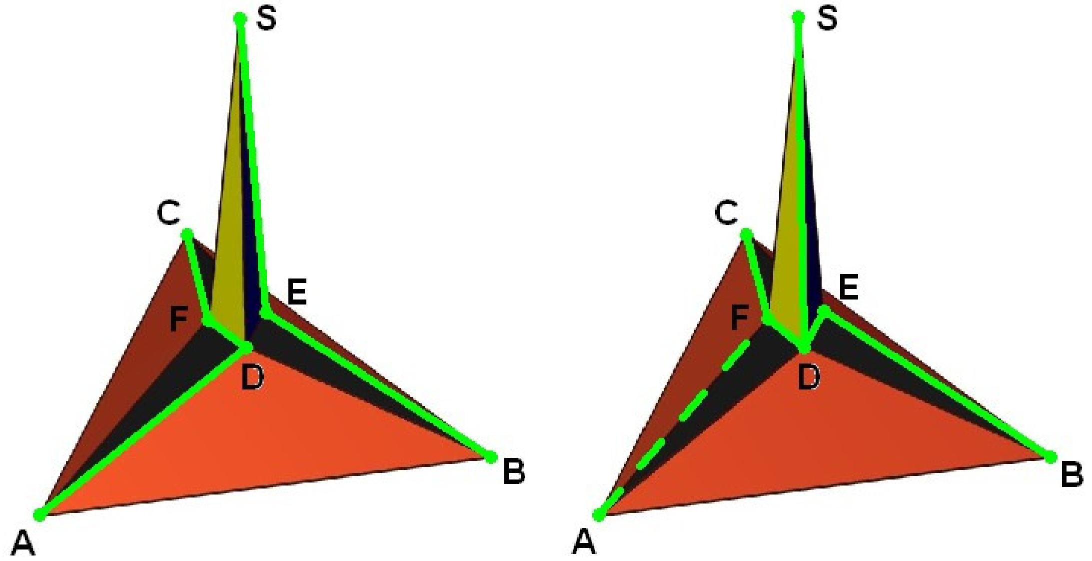
Dafür gibt es nur 2 Möglichkeiten:





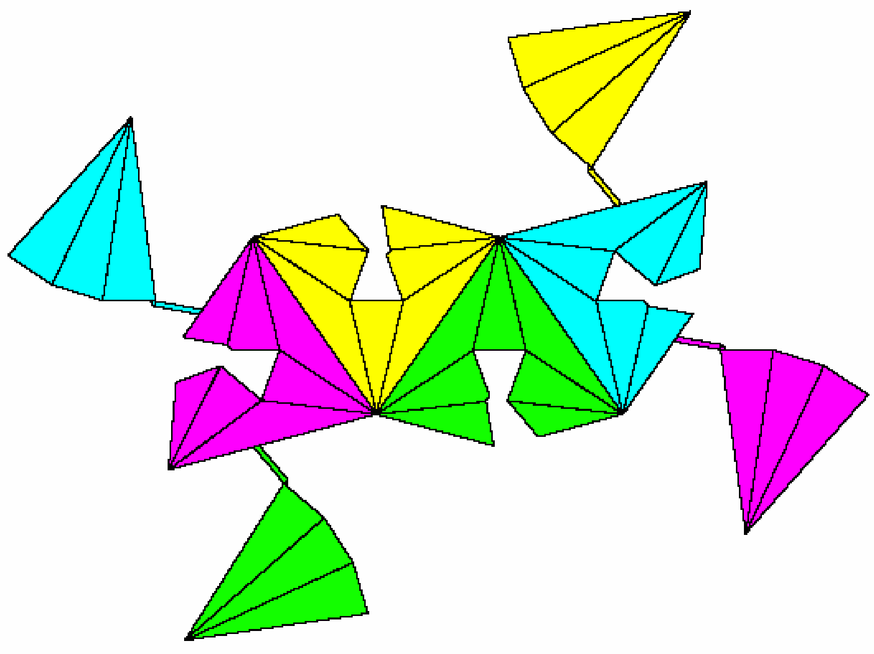
Bei beiden entsteht jedoch in <u>einer</u> negativ gekrümmten Körperecke eine Überlappung beim Verebnen. → <u>kein Netz möglich</u>

Die Zusammensetzung der Hüte zum „stacheligen Tetraeder“ ist ebenfalls nicht zu einem Netz abwickelbar, obwohl man dafür eine andere Schnittfolge der Kanten verwenden kann (es würde stets ein Zyklus entstehen).



Alexander Solar

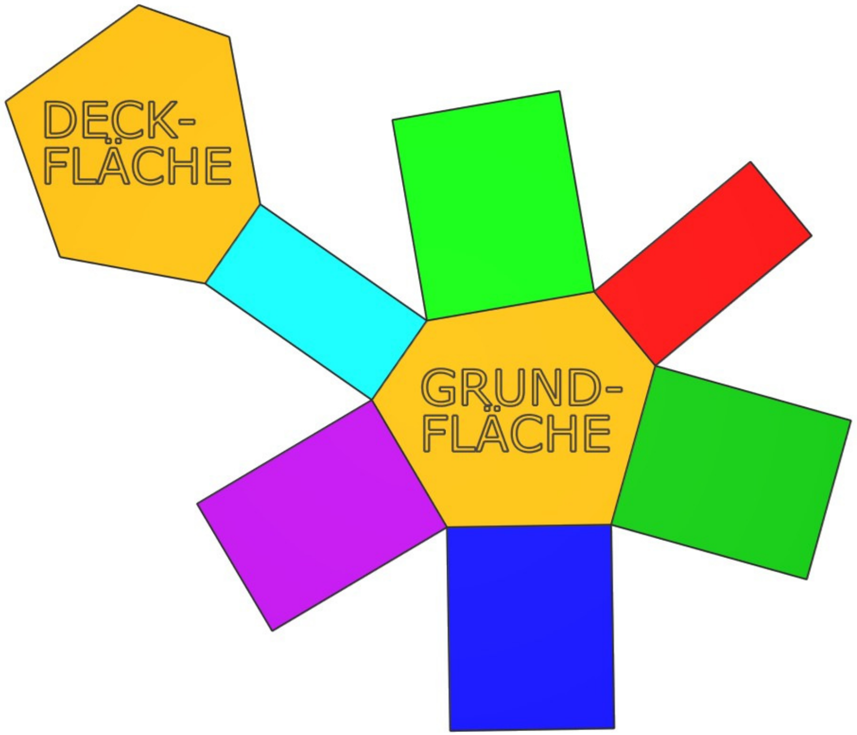
Lässt man die Einschränkung fallen, das stachelige Tetraeder entlang der Kanten aufzuschneiden, existieren überlagerungsfreie Verebnungen (kein Netz mehr).



Spezielle Klassen von über die Kanten abwickelbaren Polyedern (Bildung von Netzen)

1.) Prismen (als primitives Beispiel)

Forderung: konvexe Grund- und Deckfläche, die zueinander parallel sowie kongruent sind; restliche Seitenflächen aus Vierecken.

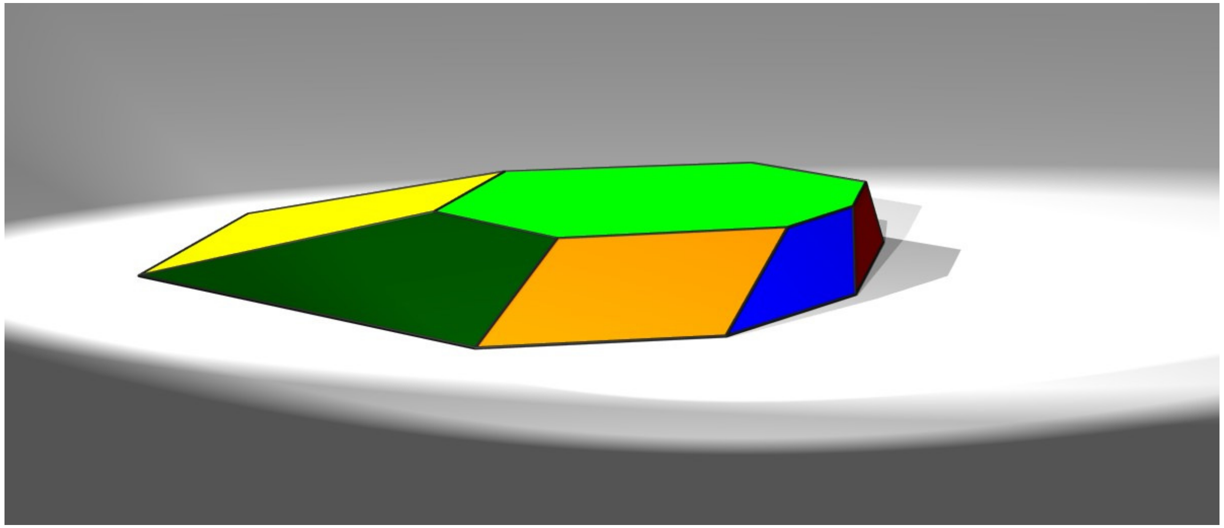


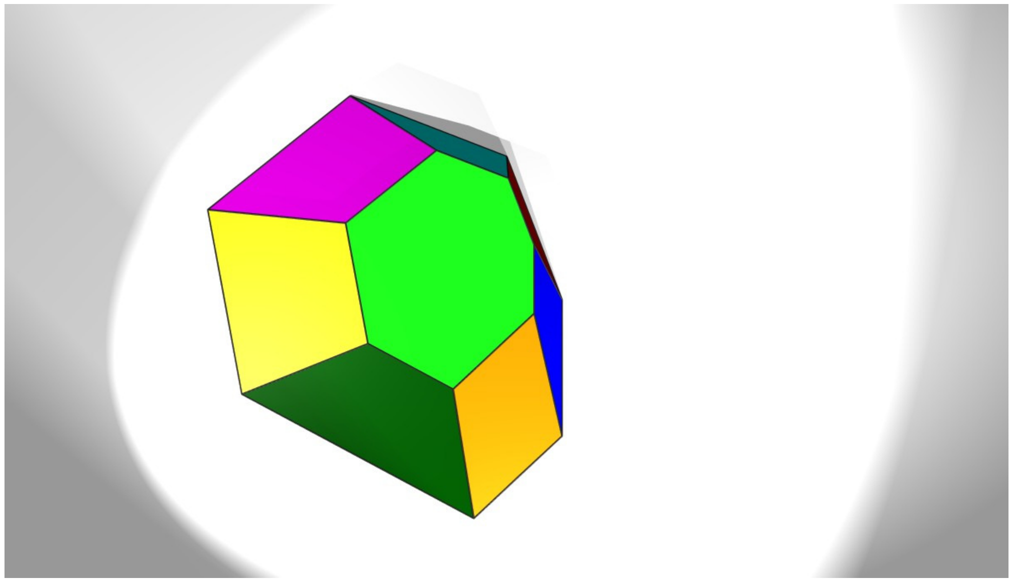
Die Abwicklung erfolgt durch Aufschneiden entlang aller Kanten der Vierecke, die von der Grund- zur Deckfläche verlaufen und entlang aller Kanten, bis auf eine, entlang der Deckfläche.

→ „Vulkanabwicklung“

2.) Prismoide

Definition: Ein Polyeder, dessen Grund- und Deckfläche zueinander parallel sind und aus gleichwinkeligen konvexen Polygonen besteht, bei denen zudem entsprechende Kanten parallel sind und dessen übrige Seitenflächen ausschließlich Trapeze bilden, bezeichnen wir als Prismoid.

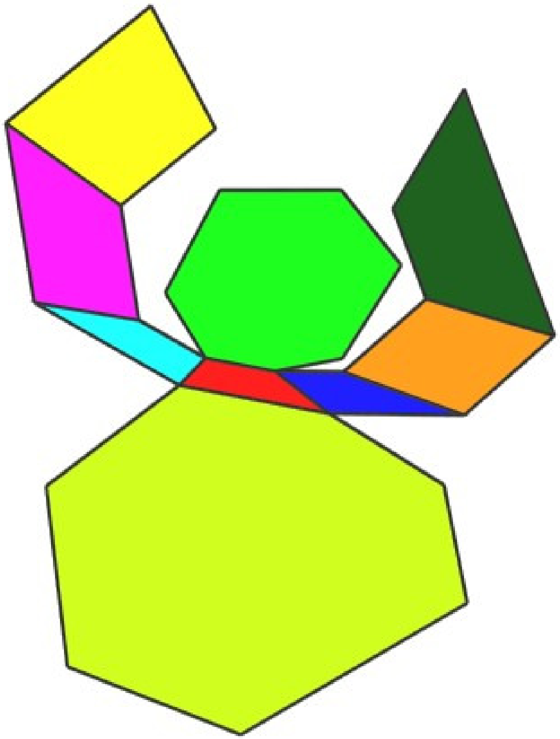




Alexander Solar

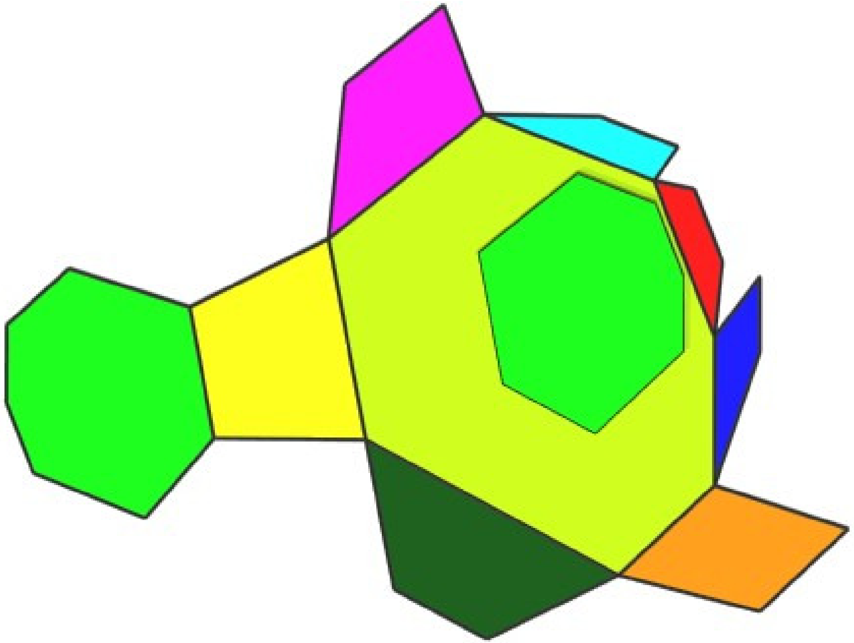
Zwei Möglichkeiten des Abwickelns zu einem Netz:

1.)



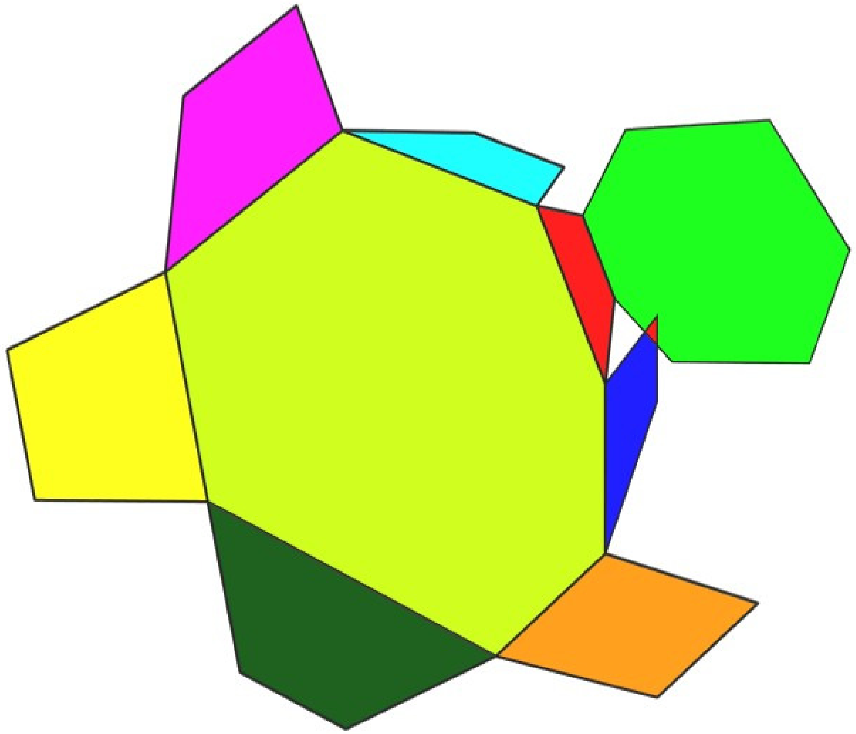
Es gibt noch keinen Beweis für das generelle Funktionieren dieser Methode bei allen Polyedern dieses Typs.

2.) Vulkanabwicklung

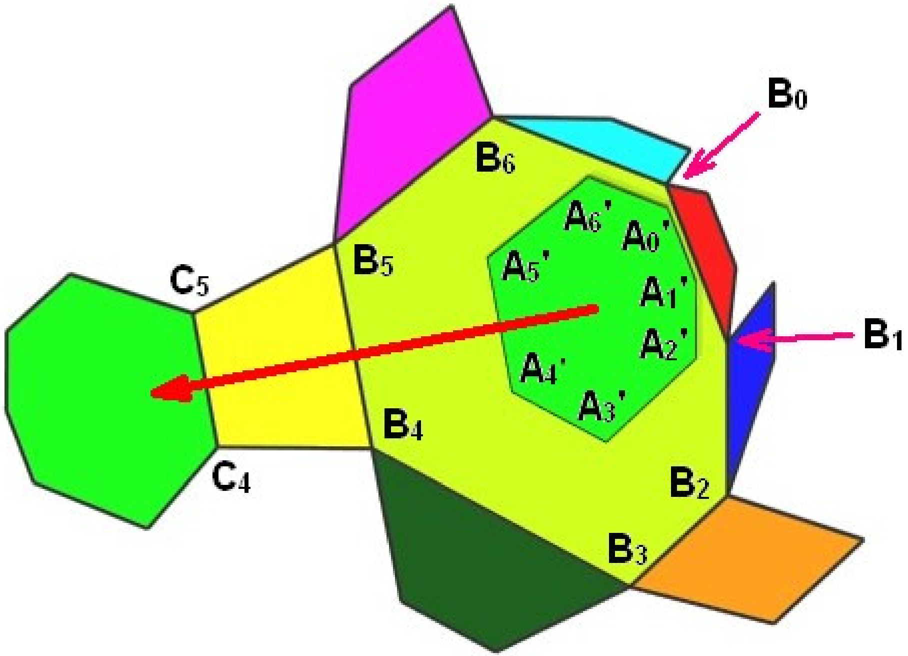


Problemstellung:
An welche „Klappe“ soll die Deckfläche angehängt bleiben?

Gefahr von Überlappungen beim Anhängen an Klappen mit geringer Höhe:



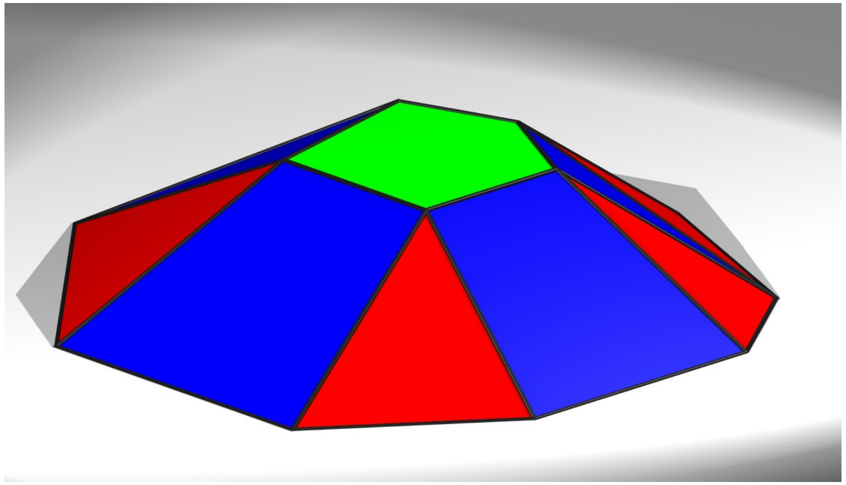
„Abwicklungsregel“ bei Vulkanabwicklung eines Prismoids:



Deckfläche ist möglichst weit von in die Ebene projizierten Deckfläche zu entfernen!

Eine Verallgemeinerung von Prismoiden sind Prismatoide:

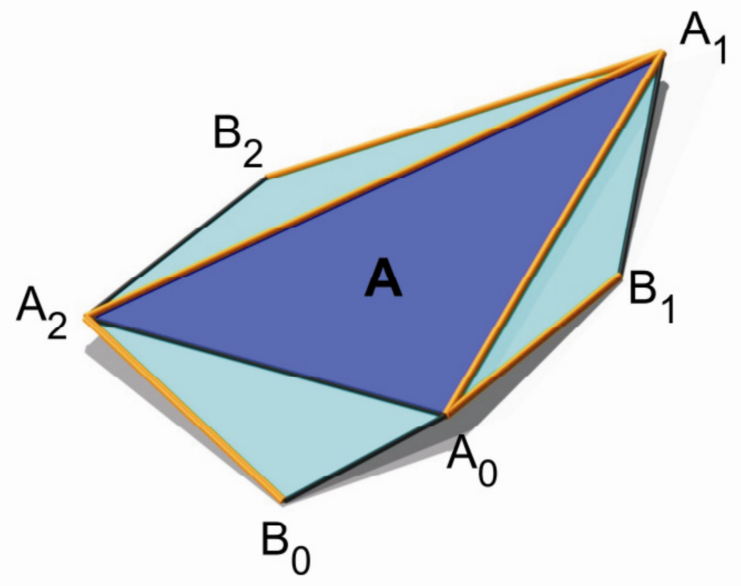
Ein Polyeder, dessen Grund- und Deckfläche aus konvexen Polygonen besteht, die zueinander parallel sind und dessen übrige Seitenflächen Dreiecke oder Trapeze sind, nennen wir ein Prismatoid. Die Eckenanzahl der Grund- und Deckfläche muss nicht gleich sein.

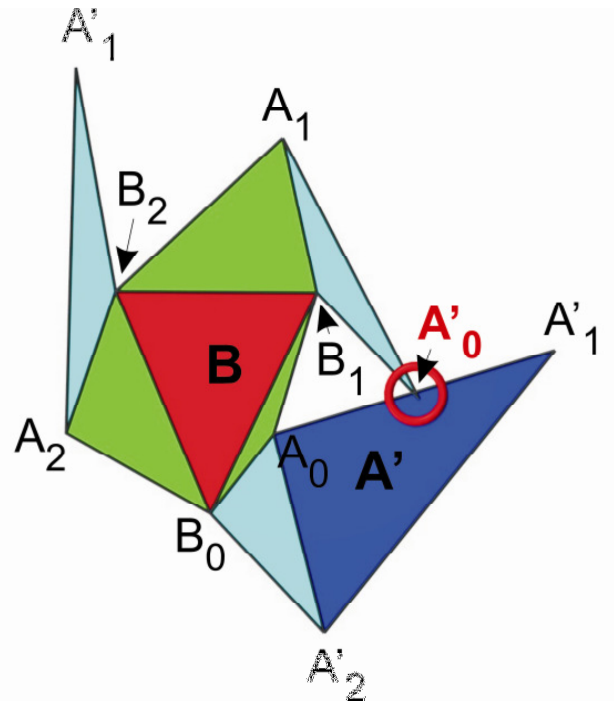


Die Verebnung von Prismatoiden in der Art und Weise (oder ähnlich) wie bei Prismoiden funktioniert aber nicht.

Grund: Allgemeinere Form der Seitenflächen, welche derartige Abwicklungen unregelmäßiger machen!

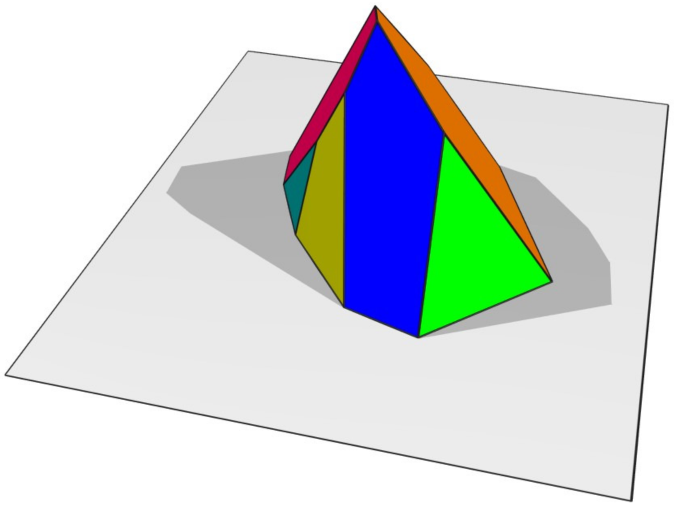
Beispiel:

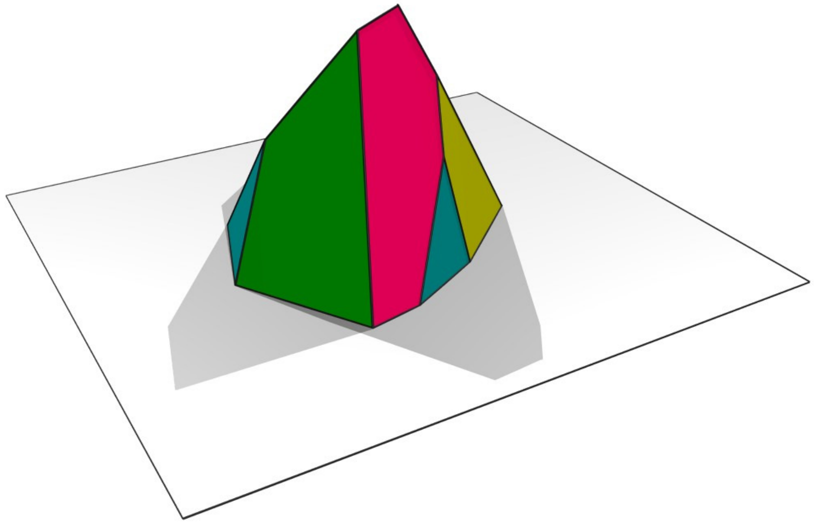




3.) Dome

Definition: Ein konvexer Polyeder mit einer ausgezeichneten Seitenfläche, die wir als Basis oder Grundfläche G bezeichnen und der Eigenschaft, dass jede übrige Seitenfläche eine Kante mit G gemeinsam hat, nennen wir Dom.





Für das Abwickeln zu einem Netz wird wieder die Vulkanabwicklung herangezogen.

Diesmal gibt es jedoch keine Deckfläche und die Seitenflächen sind komplexer.

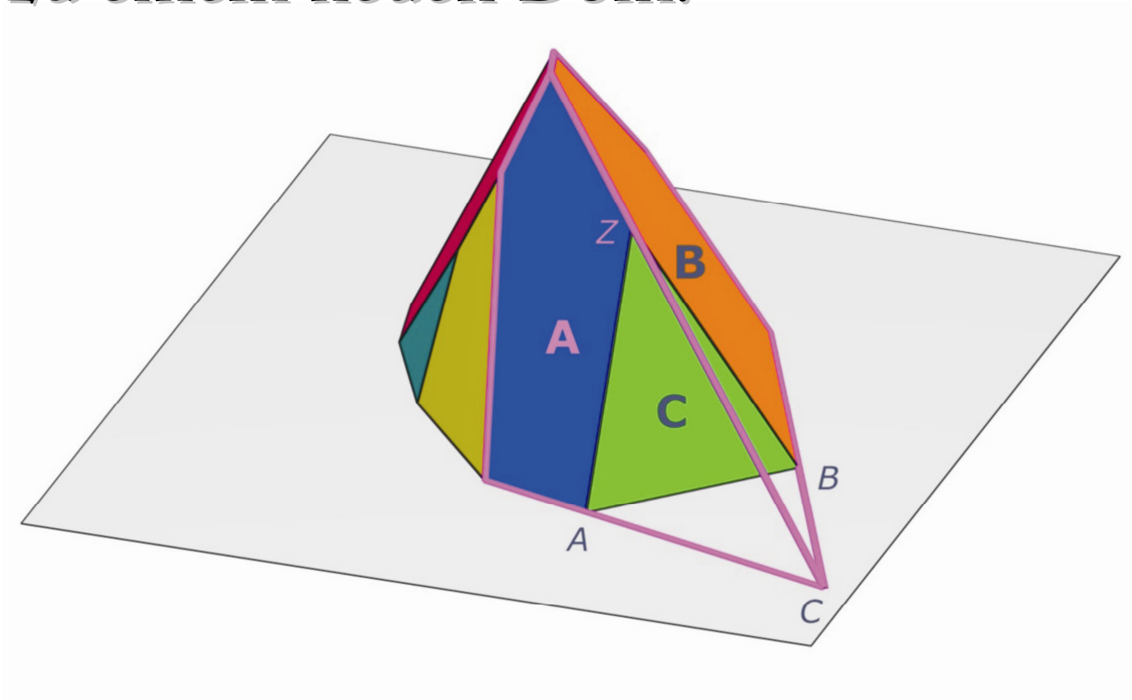
Man zeichnet eine Seitenfläche als Grundfläche aus (in deren Trägerebene das Netz entfaltet wird).

Zum Nachweis der universellen Entfaltbarkeit aller Dome zu einem Netz gibt es einen Induktionsbeweis.

Dabei geht es nicht darum zu zeigen, dass sich benachbarte Seitenflächen überlappen können, sondern darum, dass sich nicht aneinander grenzende Seitenflächen nicht überlappen können.

Das ist keineswegs trivial!

Man wählt eine dreieckige Seitenfläche des Domes aus und entfernt diese. Den Rest vervollständigt man zu einem neuen Dom.



Wieder wird ein Dreieck entfernt, solange, bis man (im allgemeinen Fall) auf ein Tetraeder kommt. Ein solches besitzt stets ein Netz.

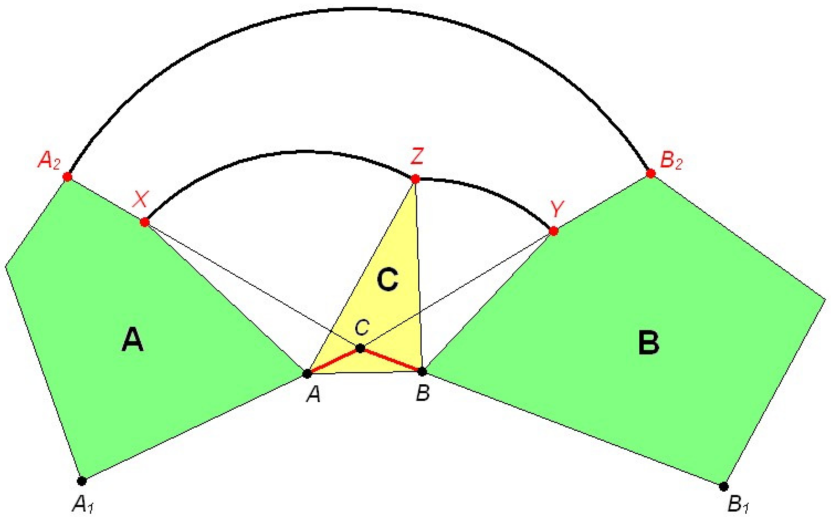
Nun geht man den umgekehrten Weg, fügt also die Dreiecke wieder ein, und überprüft folgende Gegebenheiten:

Durch das Aufschneiden entlang der Kanten und Aufklappen in die Ebene entstehen Spalten, die von den Ecken der Grundfläche ausgehen.

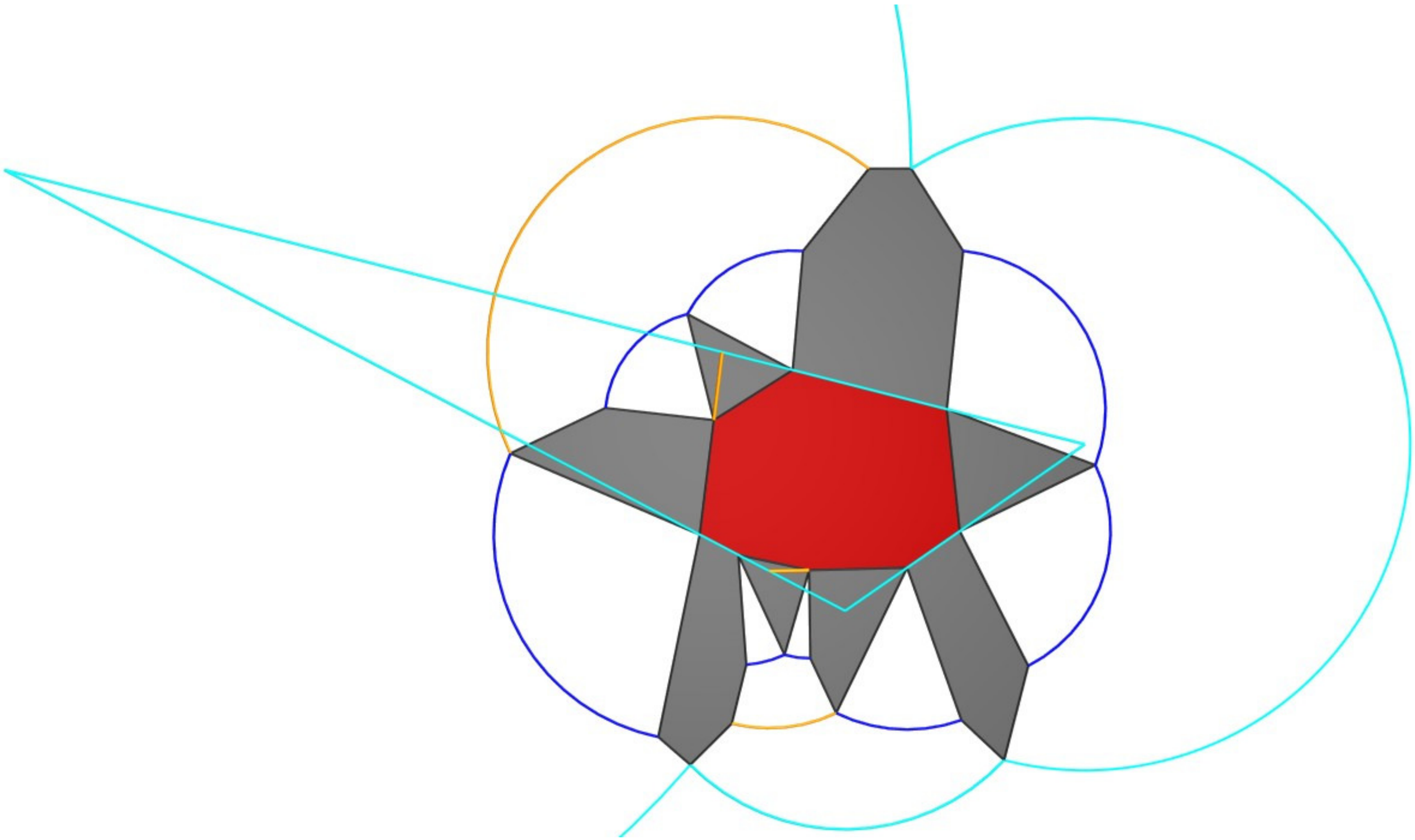
Diese werden nun als Kreissektoren aufgefasst.

Fügt man die weggenommenen Dreiecke wieder ein, so liegen die dadurch neu entstehenden Kreissektoren innerhalb der alten („Sektor-Verschachtelung").

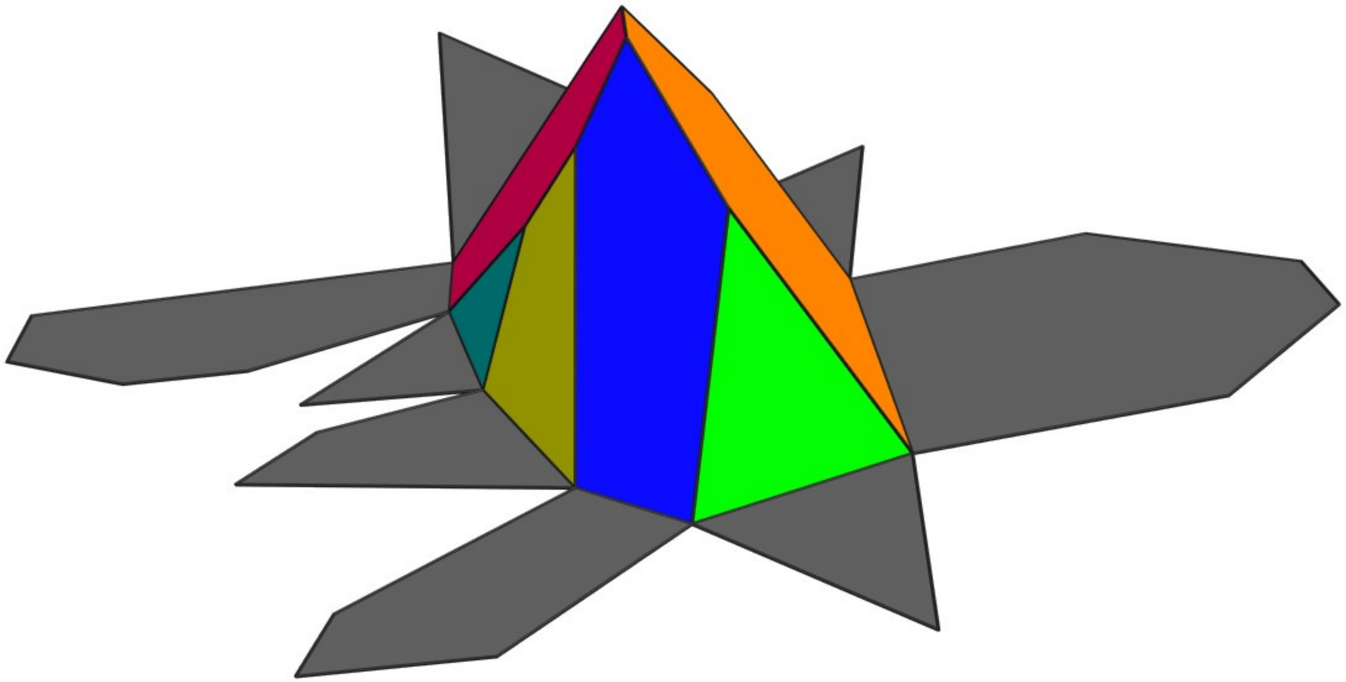
Somit beinhaltet jeder Sektor des ursprünglichen Domes keine abgewickelten Teile von ihm.



Sektorverschachtelung des Domes:



Weiteres Bild der Abwicklung:



Abwicklung konvexer Polyeder über die Kanten

Bis heute ist nicht bekannt, ob jeder konvexe Polyeder ein Netz besitzt!

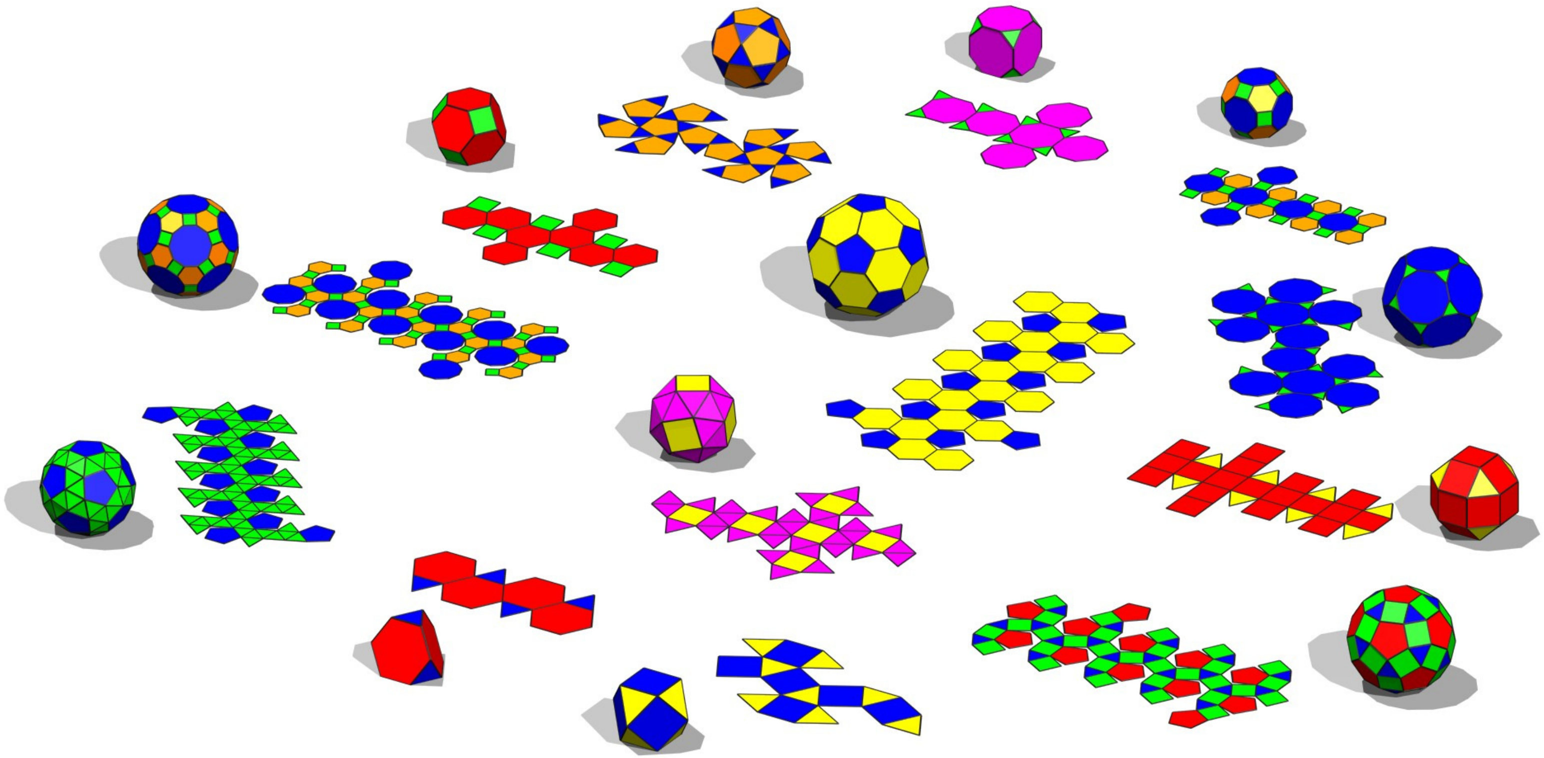
Es gibt lediglich Vermutungen für, aber auch gegen eine Bejahung dieser Frage.

1.) Argumente für die Abwicklung aller konvexer Polyeder zu Netzen

Niemand hat bis dato einen konvexen Polyeder gefunden, der kein Netz besitzt!

Netze wurden im Lauf der Geschichte zur Standardmethode, die Form eines Polyeders zu beschreiben.

Beispiel: Alle archimedischen Körper mit ihren Netzen:



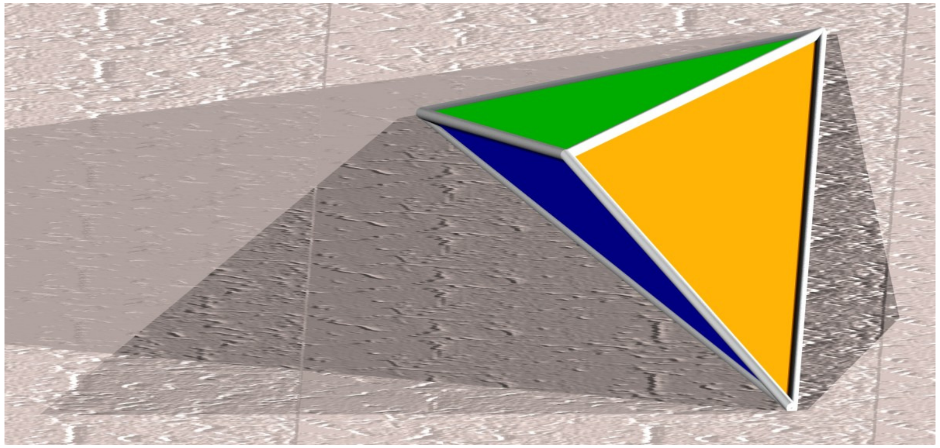
Es gibt jedoch noch keine stichhaltige Vermutung für die Existenz von Netzen aller konvexer Polyeder (steckt noch keine ausreichend tiefgängige Erforschung dahinter).

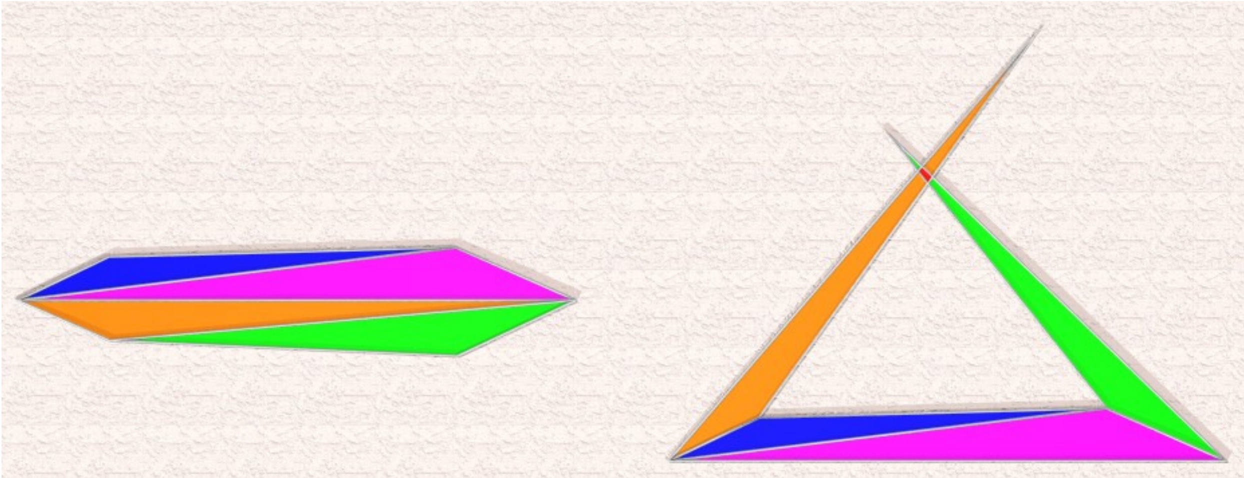
2.) Argumente gegen die Abwicklung aller konvexer Polyeder zu Netzen

Bei beliebigen Abwicklungsversuchen können leicht Überlappungen auftreten.

Folglich gibt es solche mit Sicherheit.

Dies kann sogar schon bei einem Tetraeder passieren (auch wenn das in diesem Fall nichtmehr so einfach ist):





Schevon und O'Rourke kamen auf die Idee, alle Abwicklungen von willkürlich gewählten Polyedern zu untersuchen.

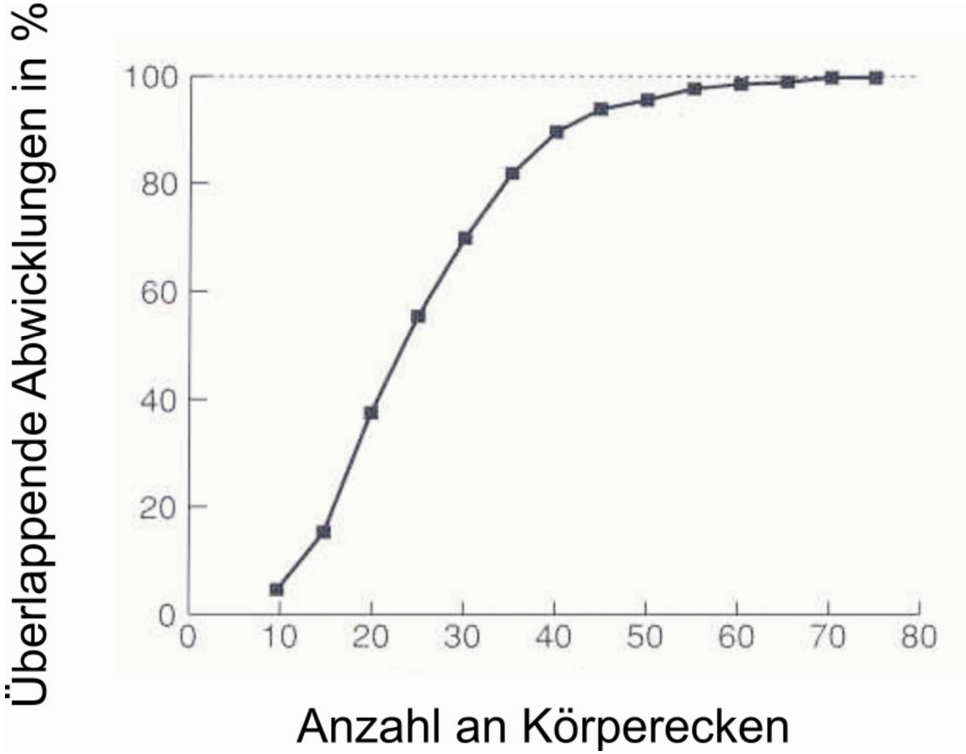
→ methodisches Generieren von Spannbäumen des polyedrischen Graphs, Abwicklung und anschließende Überprüfung bzgl. Überlappung

Dabei gibt es eine exponentielle Zahl von Spannbäumen für jeden Graphen, abhängig von der Anzahl der Seitenflächen des Polyeders.

Es ist bis heute unmöglich, sie alle auszutesten.

Man kann jedoch zufällige Stichproben herausnehmen und eine Überprüfung durchführen.

„Überlappungsdaten“ zufällig gewählter sphärischer Polyeder:



<u>Vermutung:</u> n gegen unendlich → 100% Überlappungen.

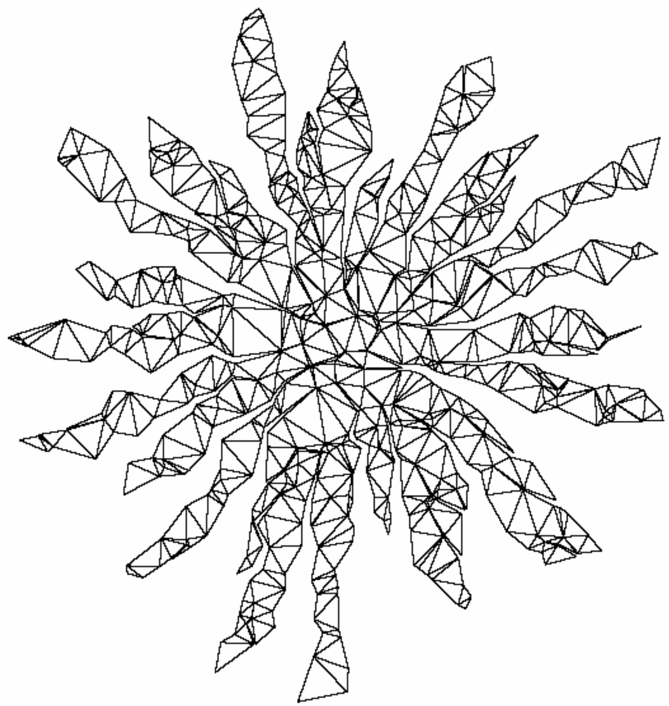
Für einen endgültigen Beweis benötigt man also einen konvexen Polyeder, bei dem sich alle seine Abwicklungen überlappen!

→ noch nicht gefunden!

Ein weiteres Anzeichen in diese Richtung lieferte Wolfram Schlickenrieder, der Abwicklungsalgorithmen entwickelte und sie an zehntausenden Polyedern testete.

Bei jedem seiner Algorithmen stieß er auf Polyeder, die sich der Abwicklung zu Netzen widersetzten (Überlappungen).

Sein erfolgreichster Algorithmus:
Steepest-Edge-Unfold (Abwicklung durch steilste Kanten):



Stärke: „gerade Pfade“, die die Abwicklung ausbreiten sollten.

Schlickenrieder teste auf diese Art 60000 Polyeder.

Auch hier traten Überlappungen auf.

Nach Änderung der Zielfunktion (mittels Zufall) gelang die Abwicklung irgendwann.

Dabei waren höchstens 6 Versuche erforderlich.

Es gelang ihm nicht, einen Algorithmus zu finden, der nachweislich mit Garantie in allen Fällen erfolgreich ist.

Somit reichten auch seine gewonnen Fakten nicht aus, um die Kantenabwicklung aller konvexer Polyeder zu Netzen ausreichend zu beantworten.

Anwendungsgebiete polyedrischer Netze:

- **Industrielle Produktion:**

Herstellung von Objekten aus Blechplatten oder ähnlichen Materialien.

Anforderungen:
– Die Abwicklung muss überlappungsfrei sein.
– Der Materialverschleiß soll möglichst gering sein (Gewinnoptimierung).

➢ Origami:

Objekte durch polyedrische Flächen annähern, auf Papier zeichnen, ausschneiden und dann falten.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!