

Die Geometrie in Vermeers Meisterwerk 'Die Malkunst'

Hellmuth Stachel, Technische Universität Wien



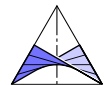
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
WIEN
Vienna University of Technology

stachel@dmg.tuwien.ac.at — <http://www.geometrie.tuwien.ac.at/stachel>



Inhalt

1. Einführung
2. Die Rekonstruktion – analytisch oder graphisch ?
3. Die analytische Rekonstruktion
4. Vermeers versteckte Kompositionsregeln
5. Schlussbemerkungen



1. Einführung



Johannes Vermeer van Delft *De Schilderkunst*

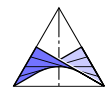
[Die Malkunst]

(1666/1668)

Kunsthistorisches Museum (khm)

1.00 × 1.20 m

Im Frühjahr 2010 gab es eine
Sonderausstellung im khm, die ausschließlich
diesem Meisterwerk gewidmet war



Gerhard Gutruf, ein österreichischer Künstler



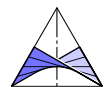
Gerhard Gutruf
Hommage á Vermeer
(1973/1976)

Österreichische Galerie Belvedere

Dahinter steht die Idee:

*Vermeers Ideen von der Kunst – im
Kontrast zu unserer Welt der Maschinen*

Gerhard Gutruf war mein Partner und
Koautor; er gab den Ansporn zu dieser
Arbeit.



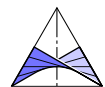
Gerhard Gutruf, ein österreichischer Künstler

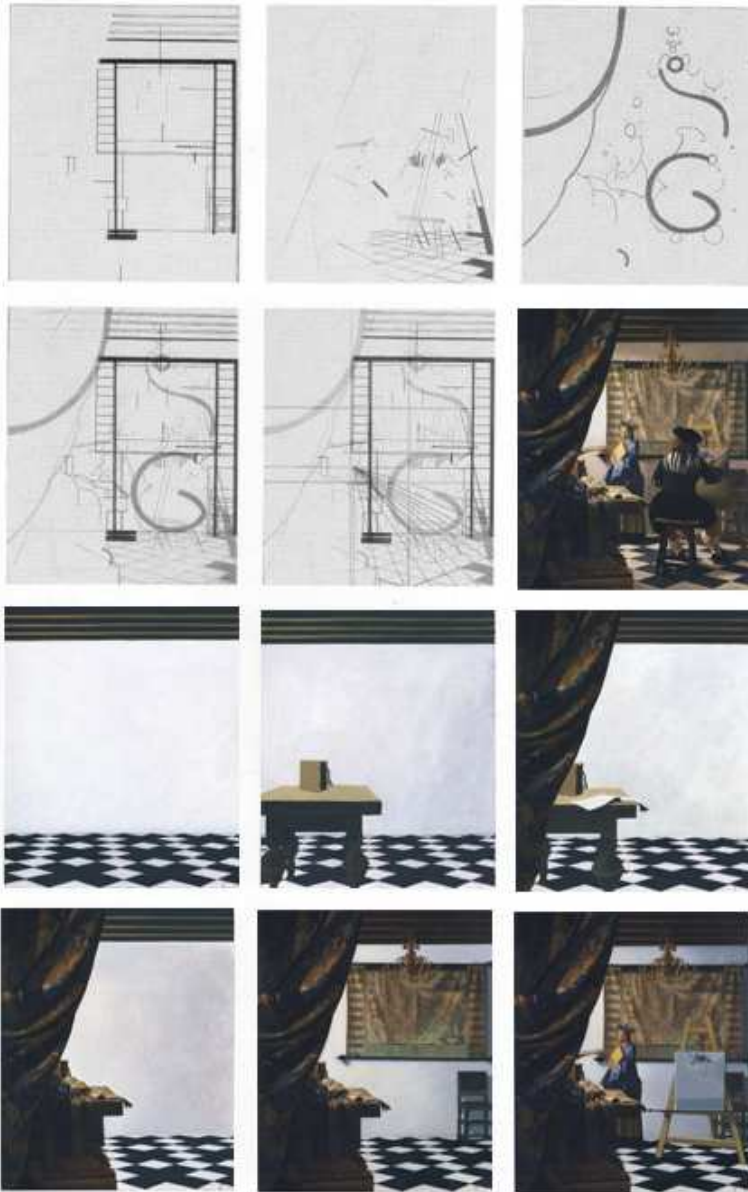


Gerhard Gutruf ist ein prominenter österreichischer Künstler. Seine Werke sind in allen wesentlichen **internationalen Sammlungen** zu finden, in Österreich z.B. im Belvedere, im khm, im Museum für angewandte Kunst und im Heeresgeschichtlichen Museum.

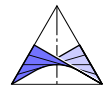
Er war auf vielen **Ausstellungen** im In- und Ausland vertreten, z.B. in Rom, Mexiko-City, Kairo, Prätoria, Peking, Kiew and kürzlich in Delft.

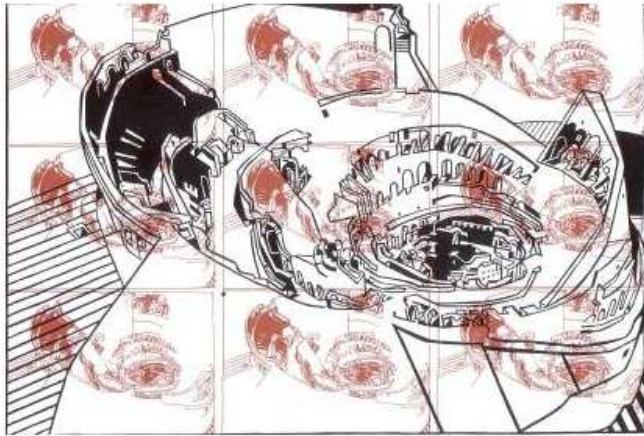
Seit fast 40 Jahren befasst er sich intensiv mit Vermeers Werk und entdeckte dabei viele Details und Kompositionselemente.





links: Aus Gerhard Gutrufs
Beschäftigung mit Vermeer





Das große Kolosseum II, 1992



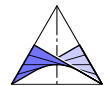
Hommage á Goya, 1996



Laura, 1992



Plaza Mayor, 2004



2. Der Grund für die Rekonstruktion



Das ist Gutrufs Vorstudie zu einer neuen, erstmals heuer in Delft ausgestellten Version zur 'Malkunst'.

Gerhard Guteruf **opponiert** heftig gegen die weit verbreitete Ansicht, dass Vermeer eine *camera obscura* für die Konstruktion der Perspektive benutzt hat.

**Philip Steadman: *Vermeers Camera*,
Uncovering the Truth behind the Masterpieces. Oxford University Press, 2002.**

Die Rekonstruktion – analytisch oder graphisch ?

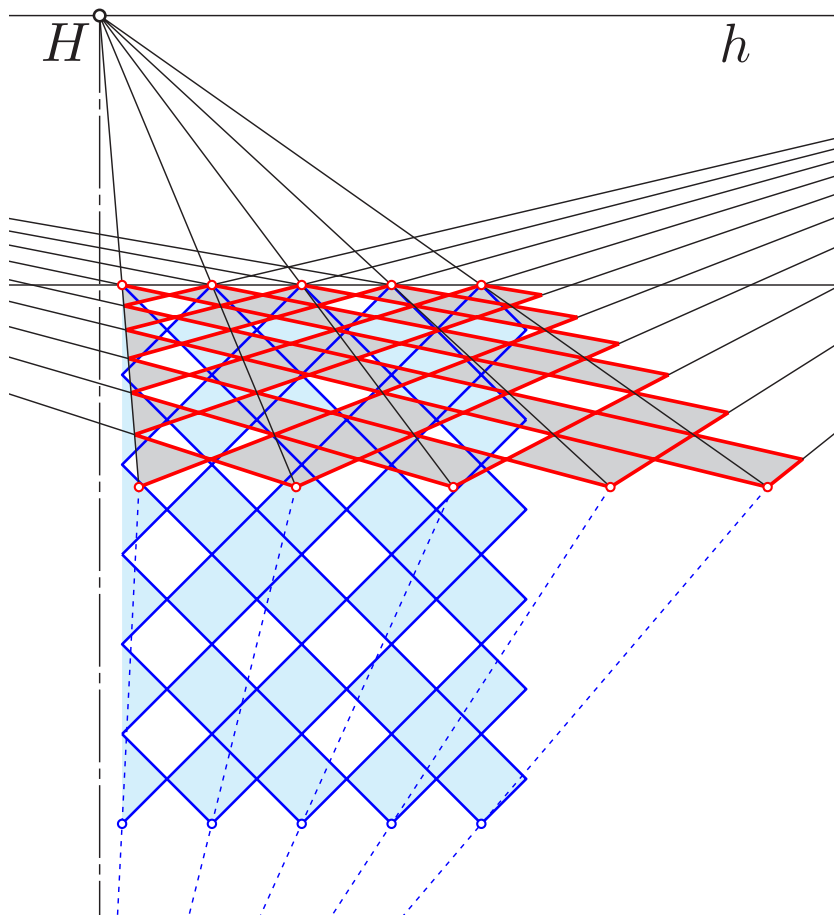


Es war Gutrufs Absicht, bei der Rekonstruktion Argumente gegen [Steadmans Camera-Obscura-Theorie](#) zu finden,

etwa durch kleine Fehler in der Perspektive oder durch den Nachweis, dass die dargestellten Objekte verschiedene Maßstäbe aufweisen.

Man beachte, dass am linken Bildrand rund [20% der Bildfläche](#) durch den Vorhang verdeckt sind.

Die Rekonstruktion – analytisch oder graphisch ?

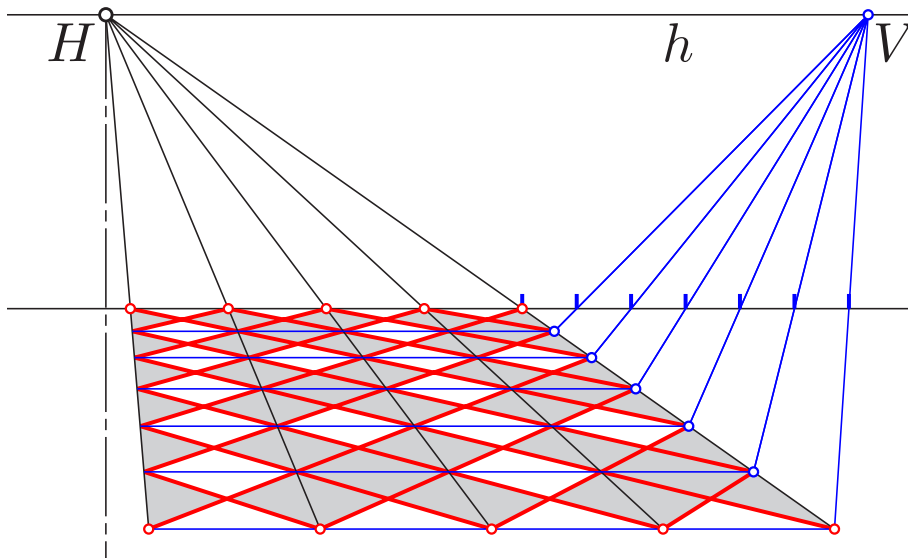


Ein starkes Argument gegen die Camera-Obscura-Theorie ist die Tatsache, dass es **keineswegs mühsam** ist, diese Perspektive zu konstruieren.

Offensichtlich handelt es sich um eine **frontale Perspektive**. Die Bilder der Fliesen können leicht mit Hilfe einer perspektiven Kollineation bestimmt werden.

Allerdings liegen wichtige Fluchtpunkt rund 1 m außerhalb der Zeichenfläche.

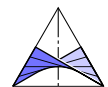
Die Rekonstruktion – analytisch oder graphisch ?



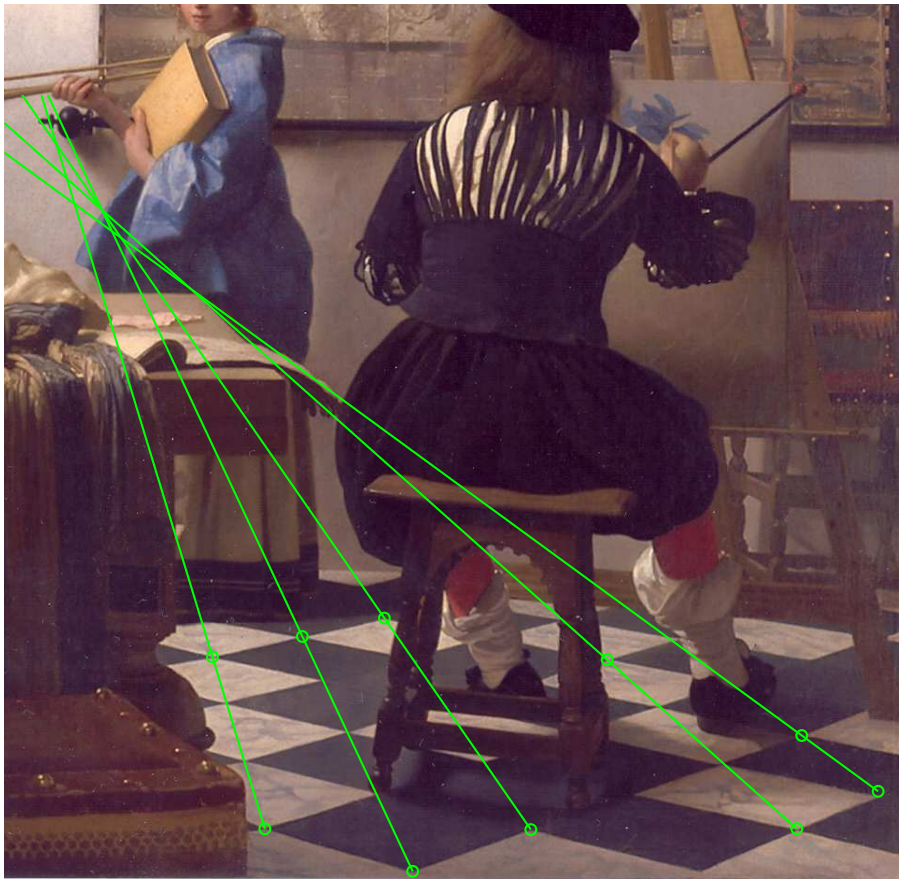
Die Zeichnung links zeigt, wie man mittels 'Freier Perspektive' auch ohne diese unerreichbaren Fluchtpunkte auskommt.

Diese Methode war den Künstlern der italienischen Renaissance bereits bekannt.

Erst kürzlich wurde nahe V am rechten Bildrand eine **kleine Beschädigung** der Leinwand festgestellt, die auf eine Anwendung dieser Methode hindeutet. Kunsthistoriker hatten bisher keine vernünftige Erklärung dafür.



Die Rekonstruktion – analytisch oder graphisch ?

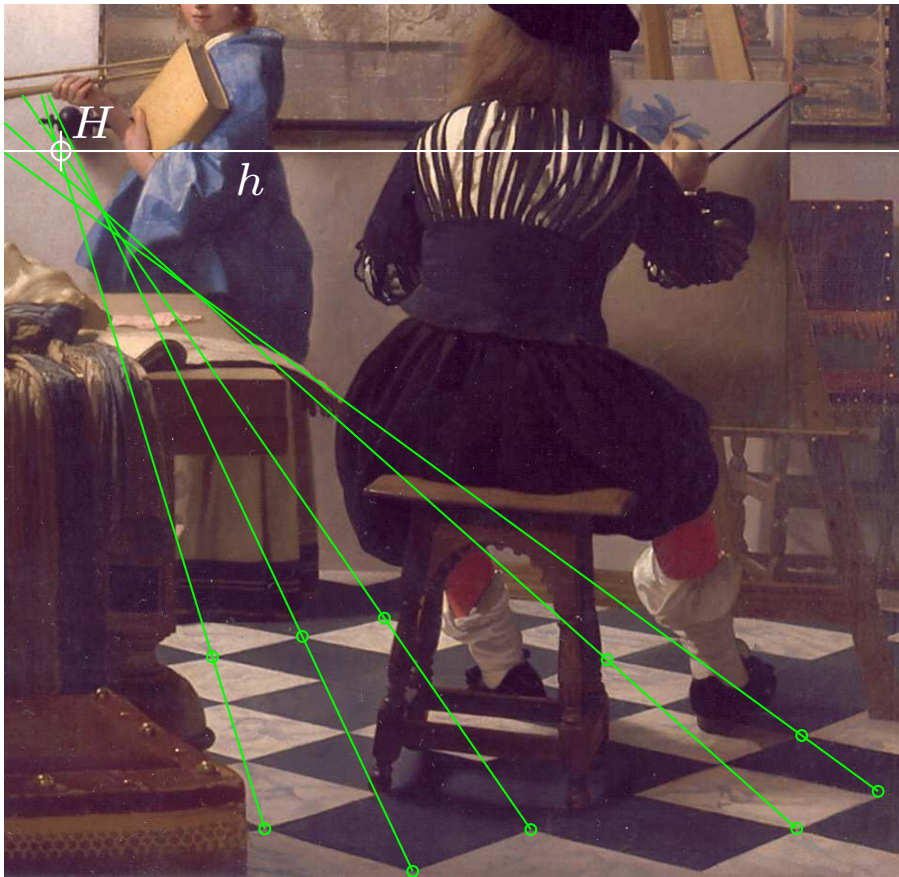


Als erstes stechen dem Betrachter die Bodenfliesen ins Auge.

Die graphische Methode basiert auf dem Hauptpunkt H und dem Horizont h , jedoch . . .

Was ist die beste Wahl für den Hauptpunkt H und den Horizont h ?

Die Rekonstruktion – analytisch oder graphisch ?

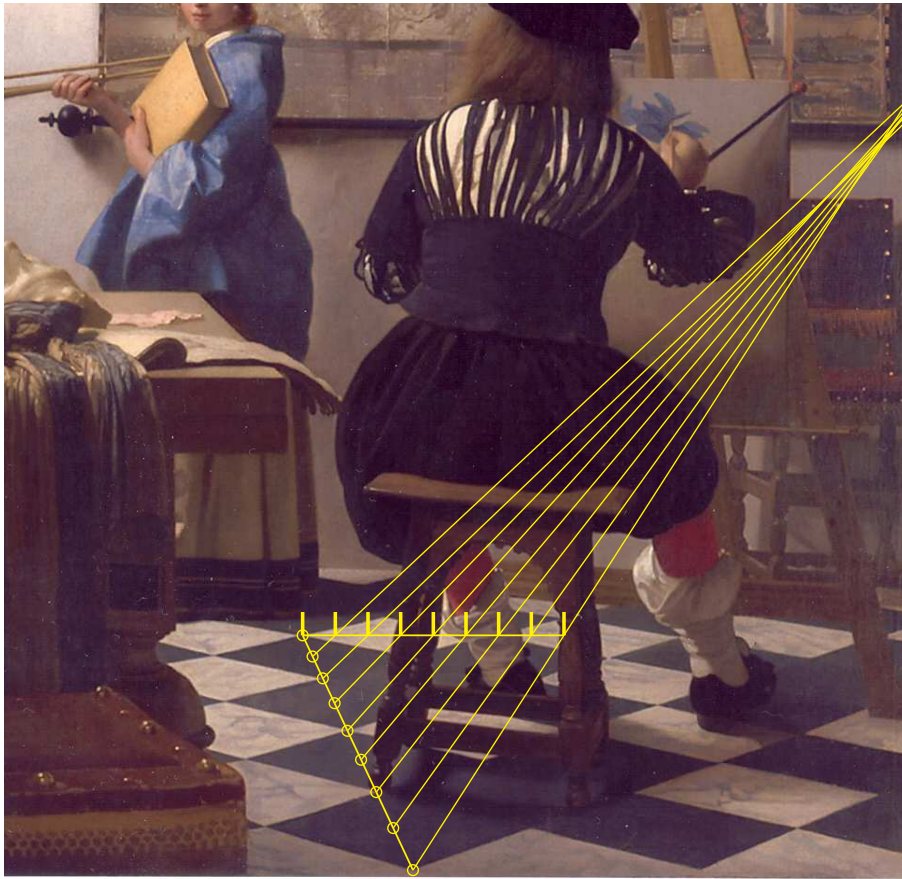


Als erstes stechen dem Betrachter die Bodenfliesen ins Auge.

Die graphische Methode basiert auf dem Hauptpunkt H und dem Horizont h , jedoch . . .

Was ist die beste Wahl für den Hauptpunkt H und den Horizont h ?

Die Rekonstruktion – analytisch oder graphisch ?



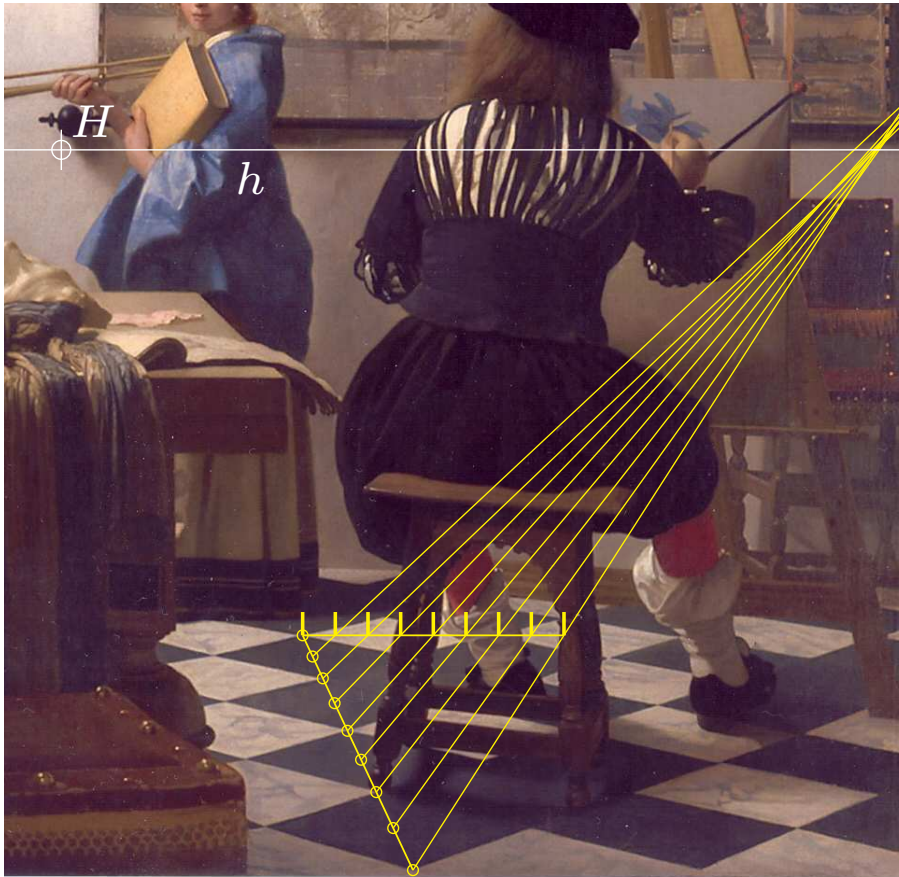
Auf den Geraden durch den Hauptpunkt bestimmen die Fliesenecken eine parabolische Projektivität.

Die gelben Linien sollten sich in einem Punkt auf dem Horizont treffen.

Auch diese **Methode versagt** wegen der Streuung der Linien.

Bei der analytischen Methode werden alle Informationen gleichzeitig berücksichtigt.

Die Rekonstruktion – analytisch oder graphisch ?



Auf den Geraden durch den Hauptpunkt bestimmen die Fliesenecken eine parabolische Projektivität.

Die gelben Linien sollten sich in einem Punkt auf dem Horizont treffen.

Auch diese **Methode versagt** wegen der Streuung der Linien.

Bei der analytischen Methode werden alle Informationen gleichzeitig berücksichtigt.

Die Rekonstruktion – analytisch oder graphisch ?



Daniel Lordick (TU Dresden) präsentierte im Vorjahr eine auf dynamischer Software basierende Rekonstruktionsmethode in dem Vortrag

Der virtuelle Raum in Vermeers Gemälde "Brieflesendes Mädchen am offenen Fenster"

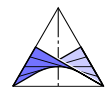
Herr Lordick ist übrigens **kein** Gegner der Camera-Oscura-Theorie.

Die Kunst des Vermeer



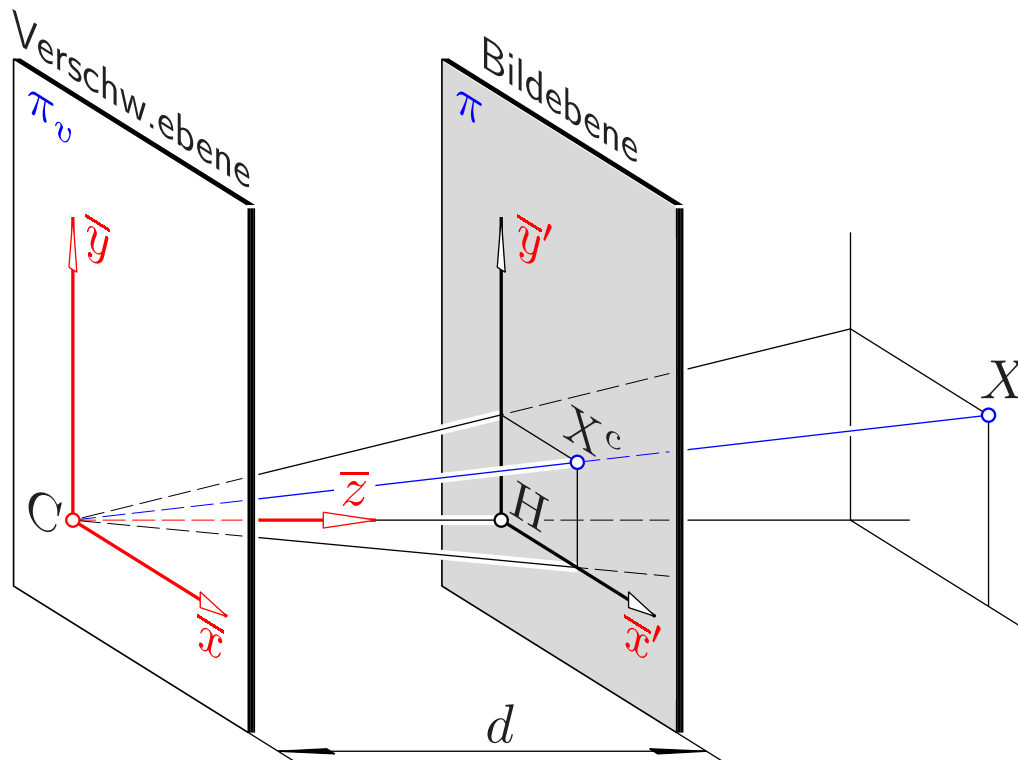
Vermeer (1632-1675) gilt als Meister

- des **Sfumato**, jener Maltechnik, die scharfe Konturen vermeidet und alles mit Weichheit umgibt.
- der Darstellung des **Lichtes**. Meisterhaft der in Reflexe aufgelöste Luster.



3. Die analytische Rekonstruktion

Die Abbildungsgleichungen $X = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \mapsto (\bar{x}', \bar{y}') = X^c$ sind im Kamera-Koordinatensystem einfach anzugeben:

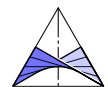


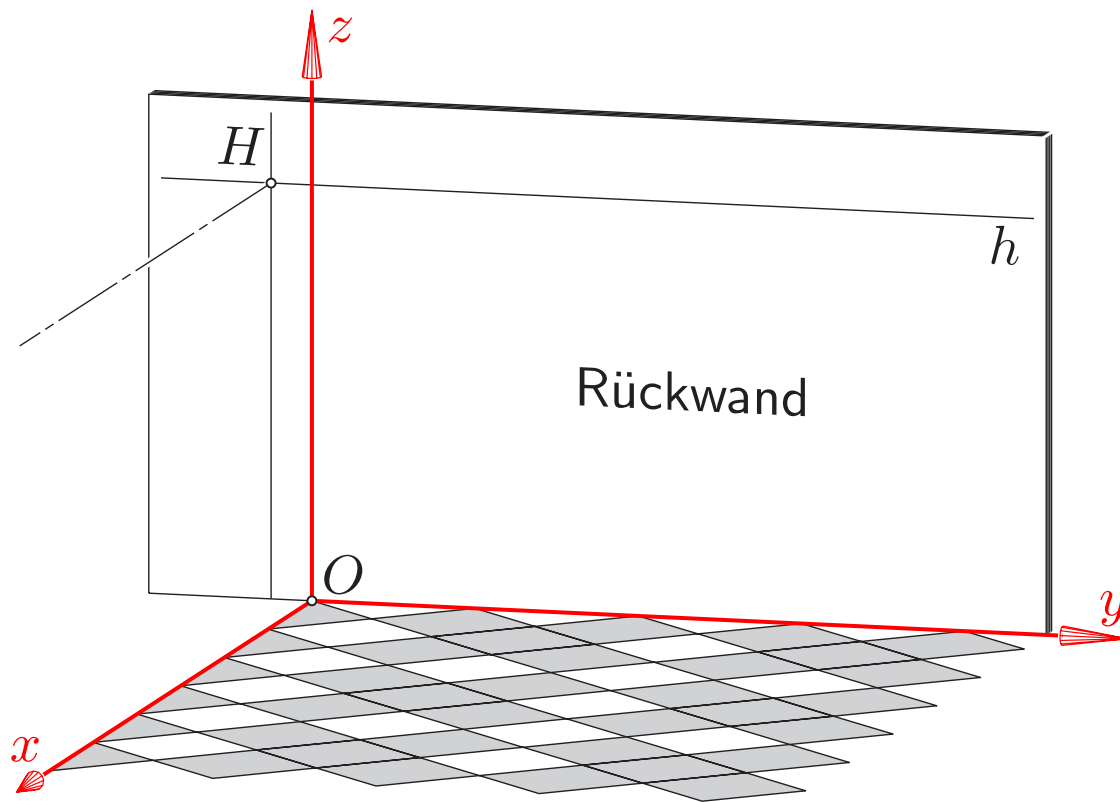
$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \frac{d}{\bar{z}} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

oder homogen geschrieben

$$\begin{aligned} (1 : \bar{x} : \bar{y} : \bar{z}) &= (\bar{\xi}_0 : \bar{\xi}_1 : \bar{\xi}_2 : \bar{\xi}_3), \\ (1 : \bar{x}' : \bar{y}') &= (\bar{\xi}'_0 : \bar{\xi}'_1 : \bar{\xi}'_2) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi}'_0 \\ \bar{\xi}'_1 \\ \bar{\xi}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\xi}_0 \\ \bar{\xi}_1 \\ \bar{\xi}_2 \\ \bar{\xi}_3 \end{pmatrix}$$





Wir wählen die Rückwand als Bildebene und ändern Bildkoordinaten von (\bar{x}', \bar{y}') zu (x', y') :

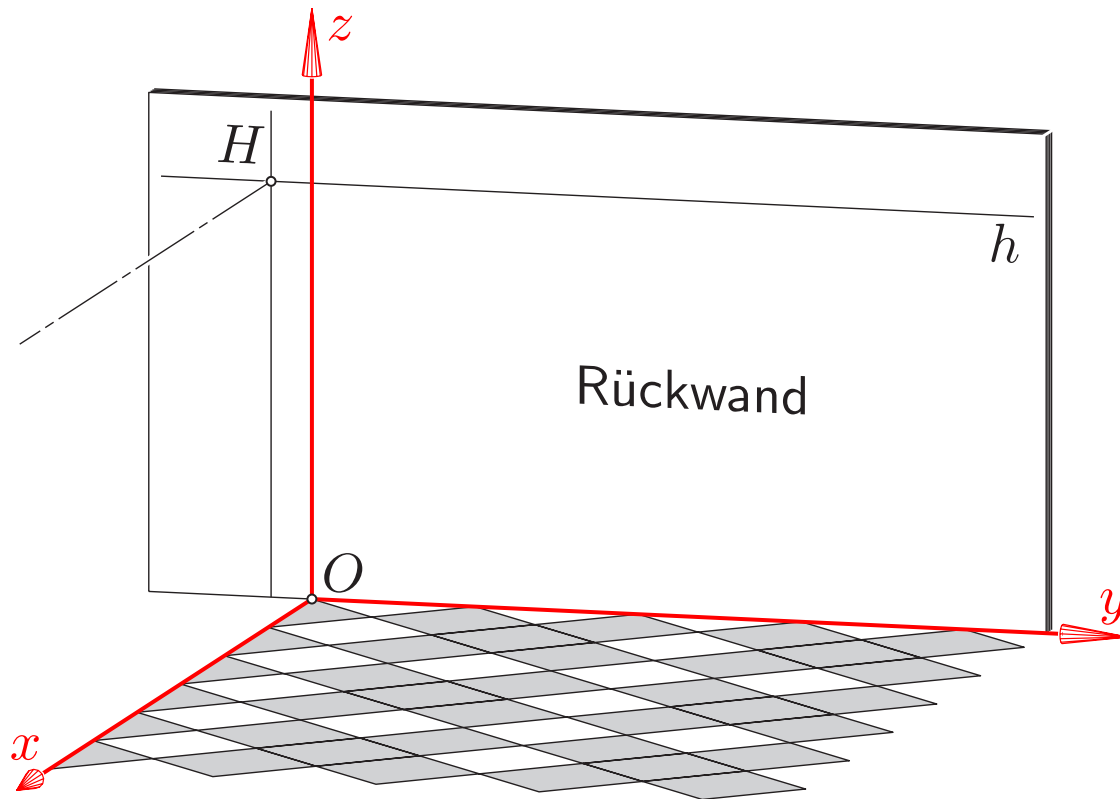
$$\begin{aligned} x' &= x'_H + \sigma_x \bar{x}' \\ y' &= y'_H + \sigma_y \bar{y}' \end{aligned}$$

mit Streckfaktoren σ_x und σ_y .

Ferner ersetzen wir die Kamerakoordinaten $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ durch Weltkoordinaten (x, y, z) :

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_H \\ -z_H \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3. Die analytische Rekonstruktion



Dies führt auf die Abbildungs-
gleichungen

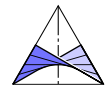
$$x' = x'_H + d \sigma_x \frac{-y_H + y}{d - x}$$

$$y' = y'_H + d \sigma_y \frac{-z_H + z}{d - x}$$

Darin gibt es **7 Unbekannte**:

Parameter für die innere Orientierung: $\sigma_x, \sigma_y, x'_H, y'_H$.

äußere Orientierung: d, y_H, z_H



3. Die analytische Rekonstruktion



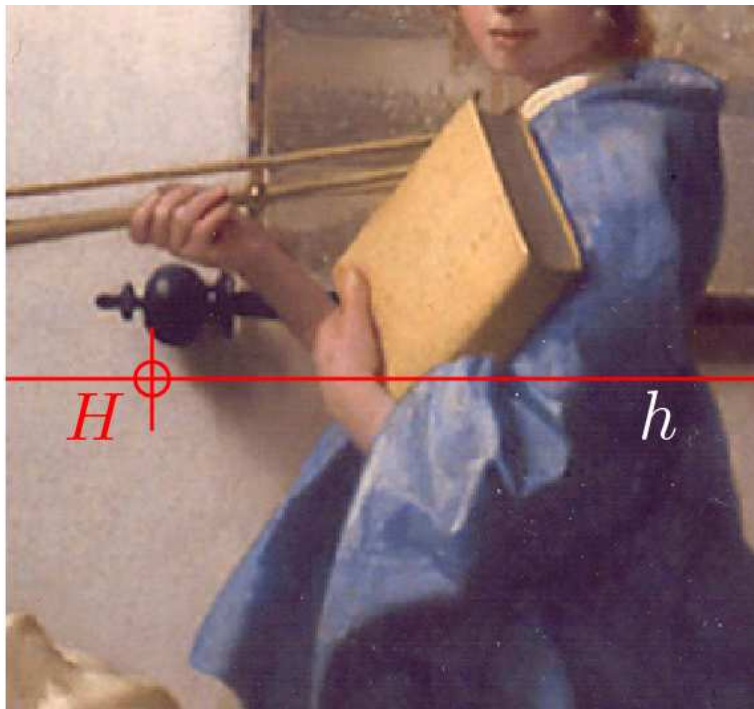
Es sind **18 Fliesenecken** erkennbar; deren Weltkoordinaten $(x_i, y_i, 0)$ sind bekannt – Längeneinheit = $\frac{1}{2}$ Fliesendiagonale.

Wir messen in einem gescannten Foto die jeweiligen Bildkoordinaten (x'_i, y'_i) . Das ergibt pro Ecke zwei lineare Gleichungen ($i \in \{1, \dots, 18\}$):

$$\begin{aligned}x'_i u_1 - y_i u_2 + x_i u_3 - u_4 &= x_i x'_i \\ y'_i u_1 - z_i u_5 + x_i u_6 - u_7 &= x_i y'_i\end{aligned}$$

mit u_j als Funktionen der **7 Unbekannten**.

3. Die analytische Rekonstruktion



Zur Bestimmung der 'optimalen' Lösung dieses überbestimmten Gleichungssystems wenden wir ein Standardverfahren an:

Statt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}$ ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{36 \times 7}$) lösen wir die **Normalgleichungen**

$$(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{b}$$

(oder wir multiplizieren \mathbf{b} von links mit der Pseudo-Inversen von \mathbf{A} .)

An der Stelle des berechneten Hauptpunktes **H** weist die Leinwand ein Loch auf.



Eine kleine, von Vermeer vermutlich beabsichtigte **Spitzfindigkeit**:

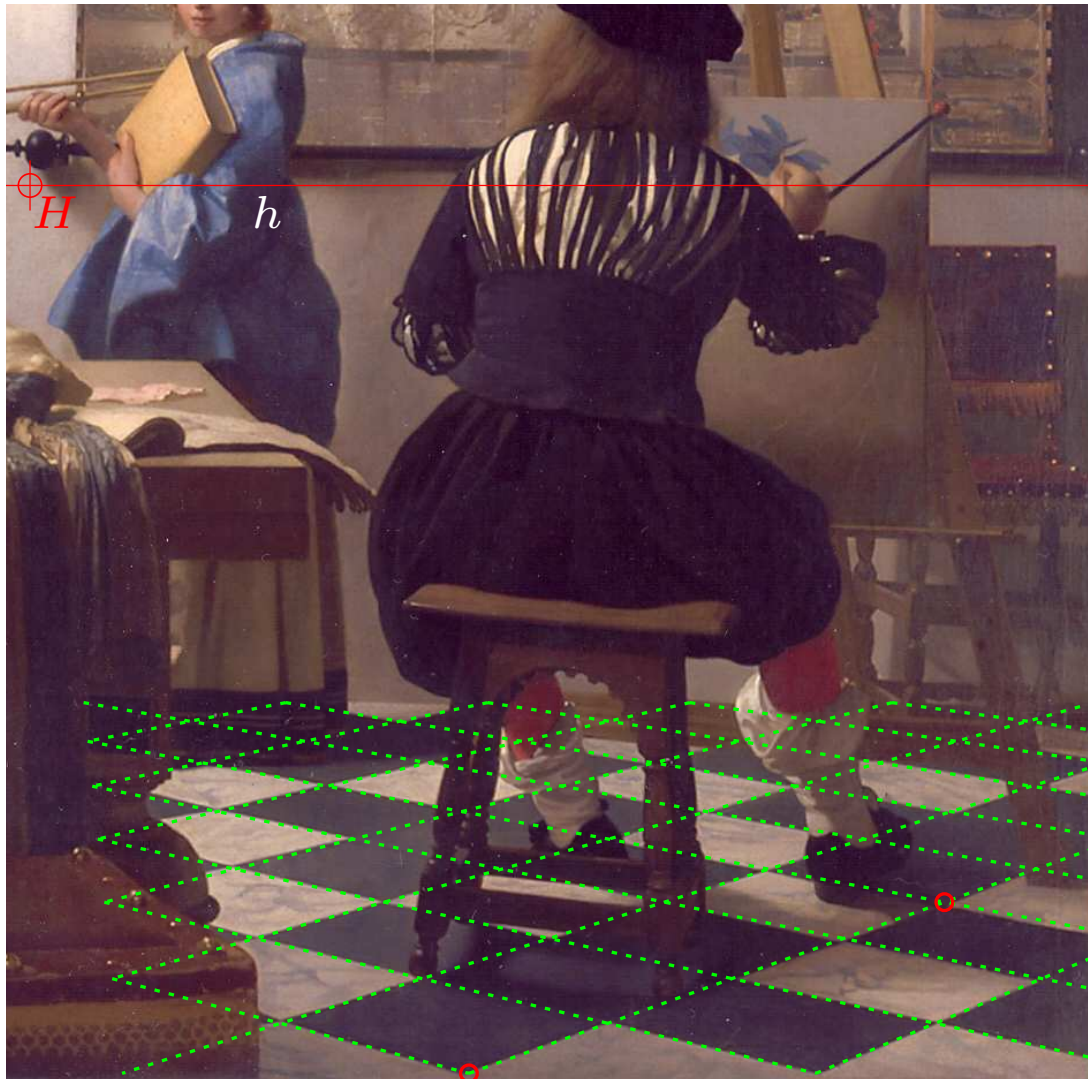
Der **Horizont** des dargestellten Malers liegt **höher** als jener des Betrachters.

Den **höchsten Horizont** hat das Mädchen, welches die Muse Clio (der Malerei) darstellt.

Die **Signatur** von Vermeer liegt in Augenhöhe des dargestellten Malers.



Zur Genauigkeit der Perspektive



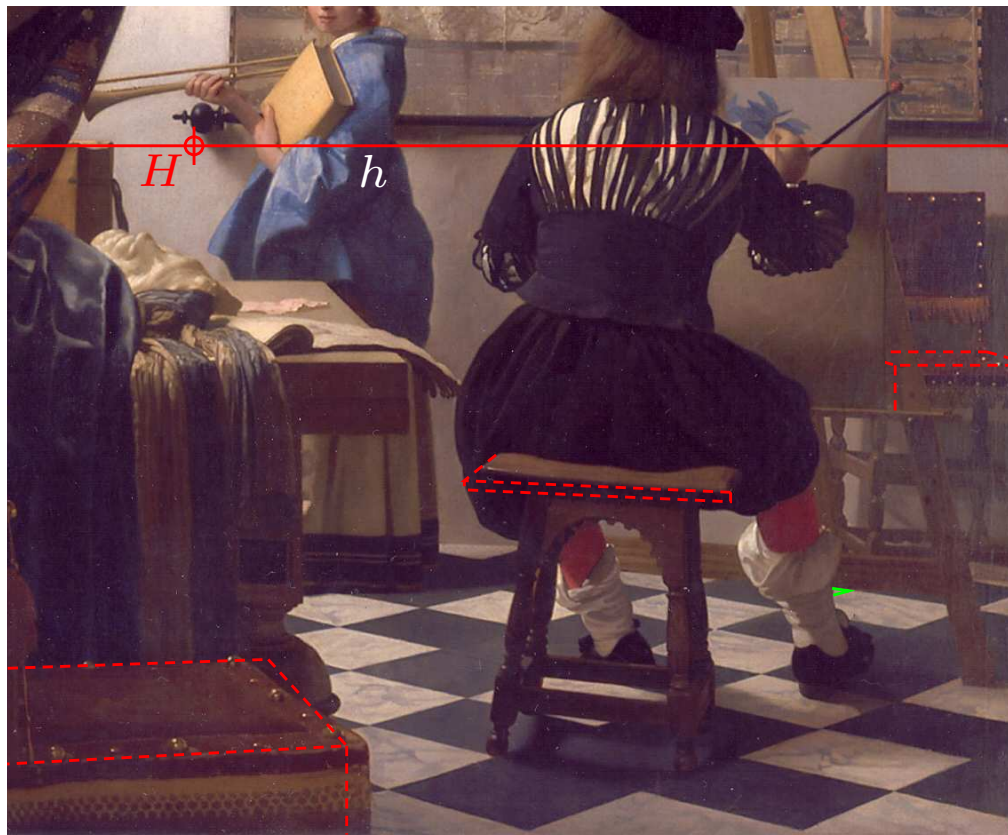
Die Perspektive der Fliesen ist von erstaunlicher Präzision:

mittlerer Fehler	1.0 mm
maximaler Fehler	2.5 mm.

Übrigens, der Horizont h geht genau durch die Hand des Malers.

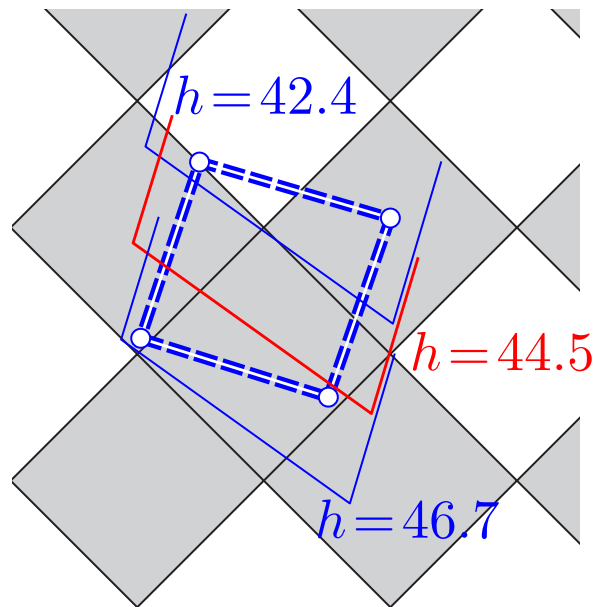
Zur Genauigkeit der Perspektive

Es gibt aber auch bemerkenswerte Abweichungen:



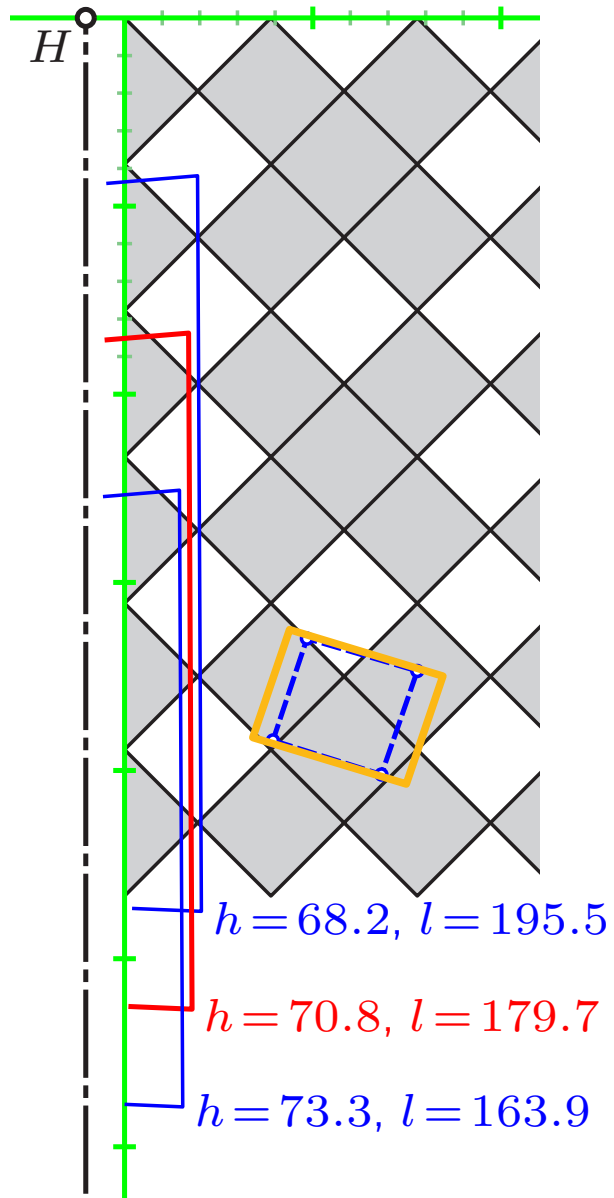
- Die Fliesen werden vorne nicht bis zum Bildrand fortgesetzt.
- Die **Ecke** einer schwarzen Fliese **fehlt**.
- Die Sitzflächen beider **Sessel** sind sehr schräg
- Die Sitzfläche des **Hockers** ist falsch (Vorderkante nahezu parallel zur Basis).

Zur Genauigkeit der Perspektive

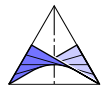


Rekonstruktion der Höhe des Hockers



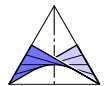
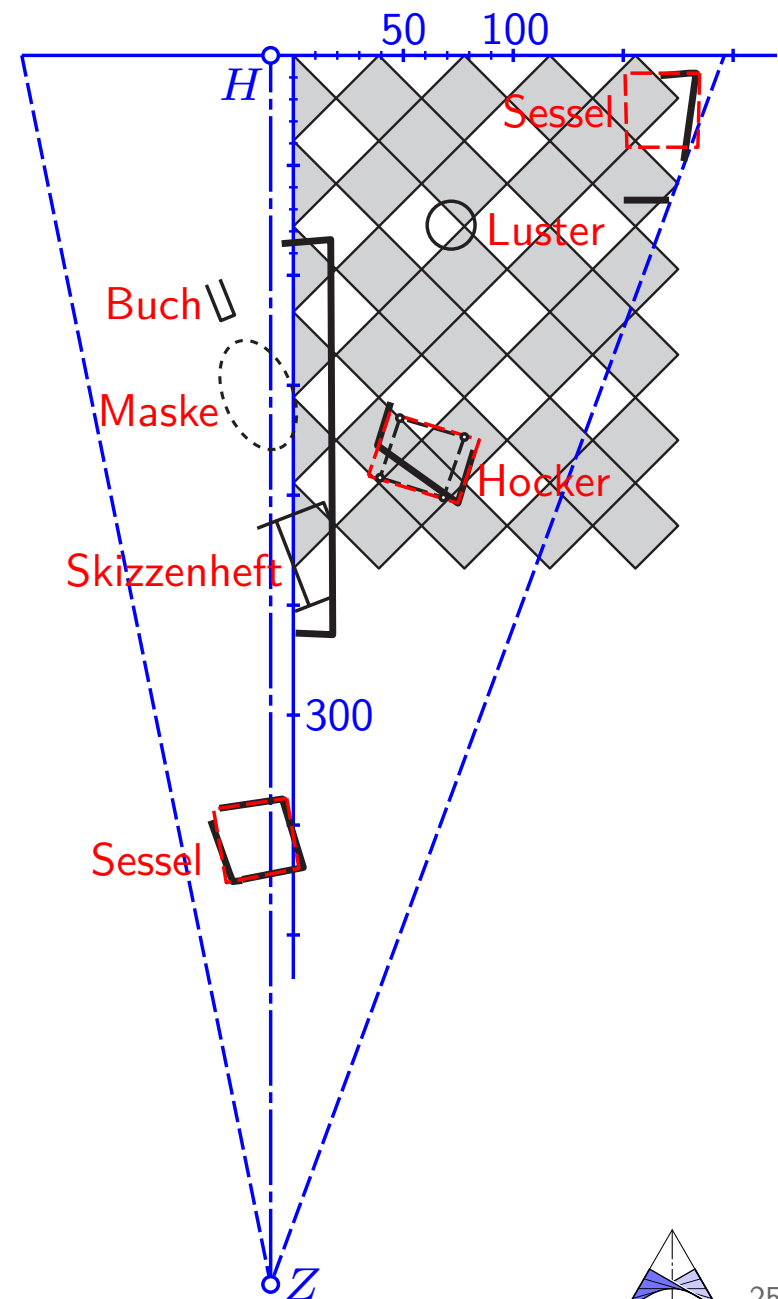


Rekonstruktion der Tischhöhe



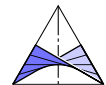


der wahrscheinliche Grundriss →



Zur Genauigkeit der Perspektive

Geschätzte Fliesenlänge	27.5	29.5	Originalgröße
Tischlänge	179.7	192.7	189–192
Tischhöhe	70.8	75.9	78–80
Dicke der Tischplatte	9.4	10.1	8–10
Hockerhöhe	44.5	47.8	
Hockerbreite	42.6	45.7	
Sesselhöhe	48.8	52.4	47
Sesselbreite	32.3–33.9	34.7–36.4	
Höhe des Lusters	64.9	69.6	65
Durchmesser des Lusters	75.7	81.2	73
Größe von Clio	145.0	155.0	
Abmessungen der Landkarte	95.5×133.3	102.4×143.0	111.64×150.3
Wandkarte total	123.5×187.7	132.5×201.4	147.0×211.6



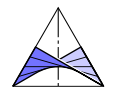
Zur Genauigkeit der Perspektive



Bemerkungen zur Fliesenlänge:

- Philip Steadman besitzt eine Fliese aus Delft mit der Seitenlänge 29.5 cm.
- Gutruf besitzt kleine Delfter Dekorfliesen aus dem 17. Jh. mit Seitenlänge 12.7 cm.

Das Bild "*Landy standing at a virginal*" ("Dame am Spinett stehend") von Vermeer zeigt kleine Fliesen: dreifache Kantenlänge = Diagonallänge einer großen Fliese. Das entspräche einer Fliesenlänge von etwa 27.5 cm.



4. Vermeers versteckte Kompositionsregeln



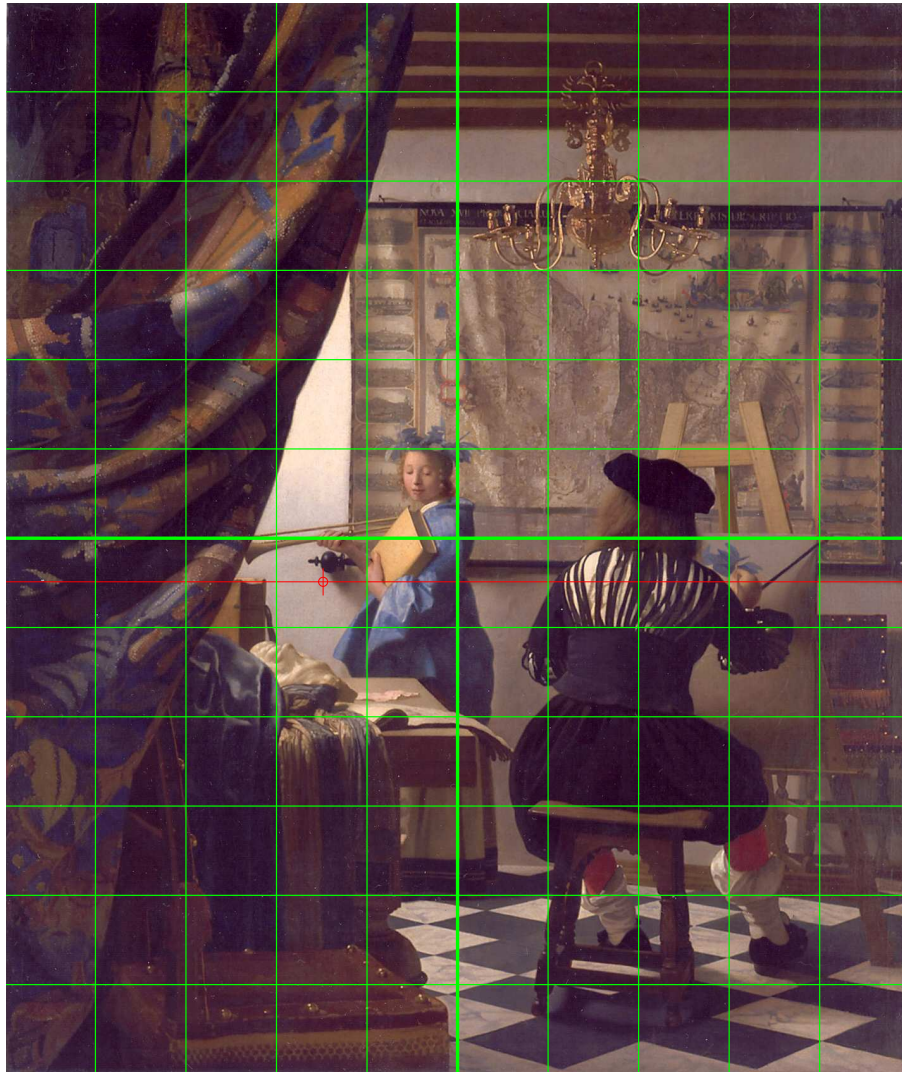
Vermeer selbst nannte sein Meisterwerk '*Die Malkunst*' – im Unterschied zu anderen Titeln wie '*Woman in blue reading a letter*', '*Girl with a red hat*', '*Woman with a pearl necklace*' etc.

G. GUTRUF:

'Es war ein geplantes Meisterwerk'.

Was ist gemeint mit dem Titel '*Die Malkunst*' ?

Offensichtlich ist es keine wirkliche Szene der Art '*Der Maler und sein Modell*'.



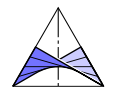
Das Seitenverhältnis beträgt 5:6:

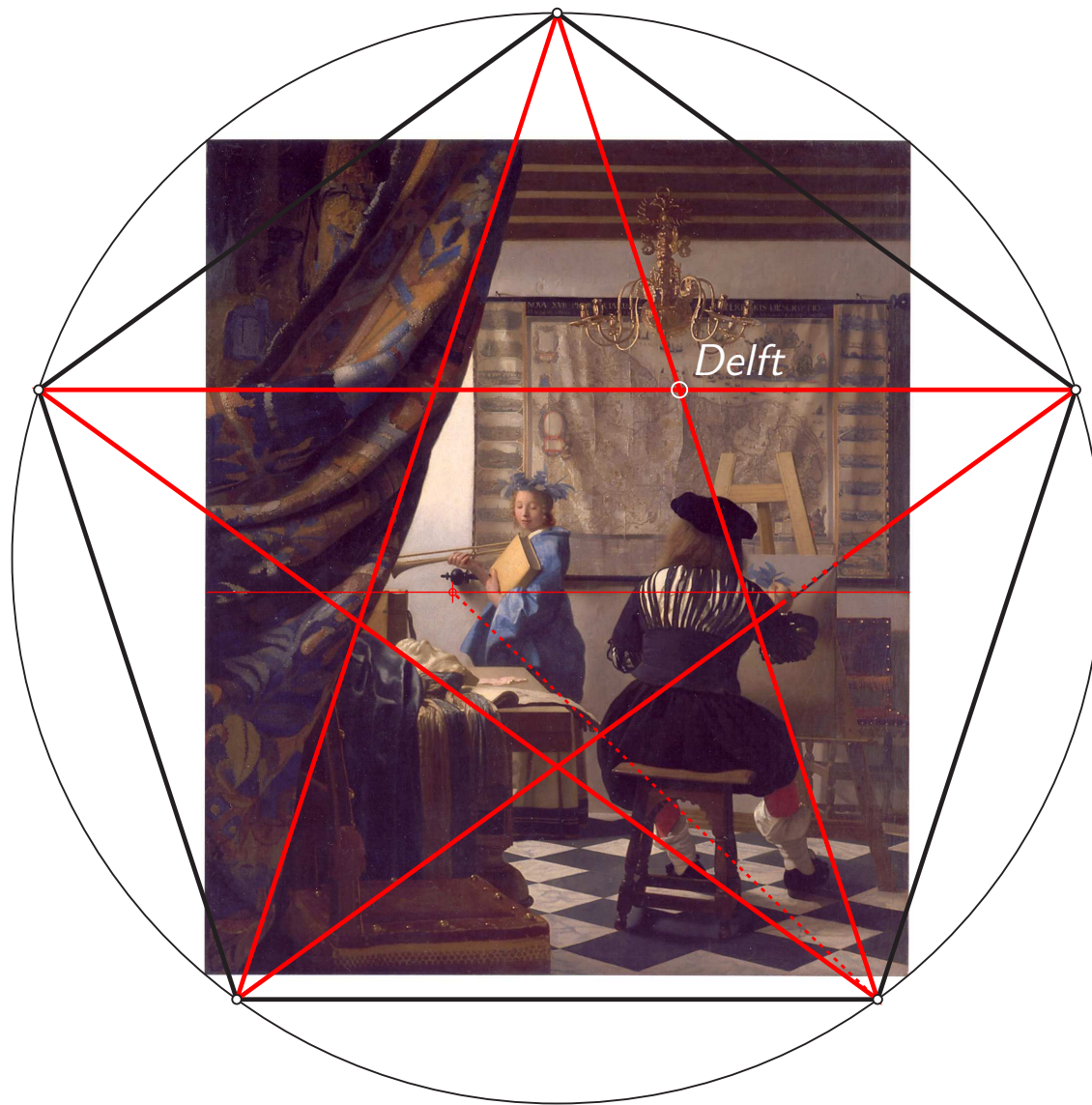
- Die horizontale Mittellinie berührt den Knopf des Malstocks und geht durch die Hand des Mädchen, mit welcher dieses die Trompete hält
- Vertikale Linie gehen durch Fliesenecken
- Die vertikale Mittellinie zerteilt die römische Ziffer XVII auf der Landkarte und erinnert damit an die Teilung der 17 holländischen Provinzen durch die Spanier



Der goldene Schnitt:

- Die linke vertikale Linie deckt sich mit dem linken Rand der Wandkarte
- Der Maler scheint genau das von den Teilungslinien eingeschlossene **Zentralmotiv** zu malen

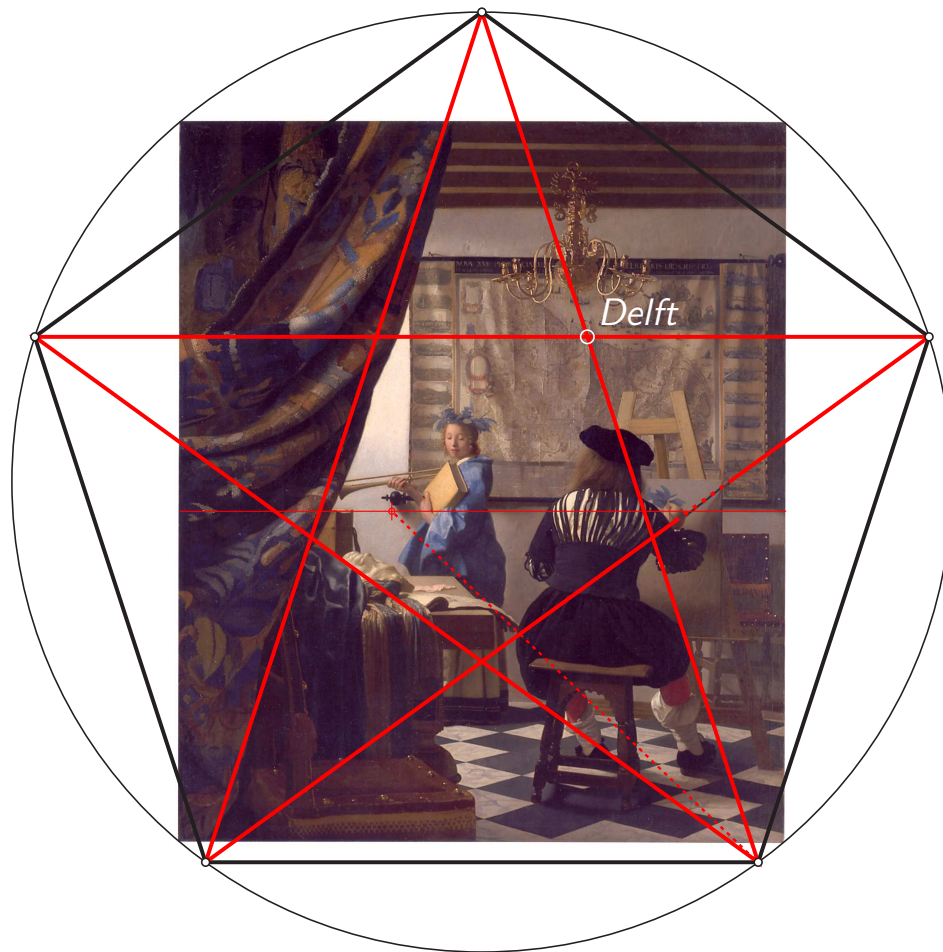




Das dem Umkreis eingeschriebene **Fünfeck**:

- Der Vorhang folgt der linken Diagonale
- die rechte Diagonale geht genau durch den Malstock
- die auf der Landkarte dargestellte Stadt Delft liegt genau im Schnittpunkt von Diagonalen

5. Schlussbemerkungen



Hauptziel dieser Arbeit war,

- einige Geheimnisse in Vermeers Meisterwerk **aufzudecken**, sowie
- die Camera-Obscura-Theorie von Philip Steadman zu **widerlegen**.

5. Schlussbemerkungen

Robert Wald:

*I agree with your concluding statement that "... for Vermeer the laws of composing the area in a painting are of **higher importance** than a geometrically exact construction"*

Philip Steadman:

... you will not I imagine be expecting me to agree with you



5. Schlussbemerkungen

Philip Steadman:

- *You point to . . . some **small anomalies** . . . very minor . . . could be due to inaccuracies in your own assessment*
- *He would have used a large booth camera which **he sat inside***
- *. . . it is not an argument but an **assertion**: that for Vermeer, composition and allegory were more important than geometrically exact depiction*
- *. . . the camera is a '**composition machine**'. Vermeer could have provisionally placed . . . embarked on a prolonged process of adjustment of their positions.*

