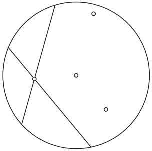
Pflasterungen in der hyperbolischen Ebene

Anita Hahn
Technische Universität Wien
Betreuung: Boris Odehnal

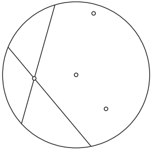
Übersicht

Hyperbolische
Geometrie

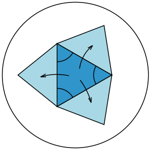


Übersicht

Hyperbolische Geometrie

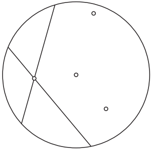


Pflasterungen und Gruppen

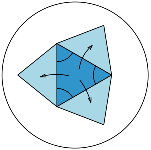


Übersicht

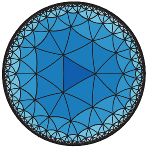
Hyperbolische Geometrie



Pflasterungen und Gruppen

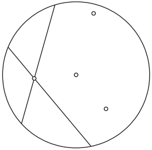


Erstellung von Pflasterungen

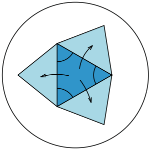


Übersicht

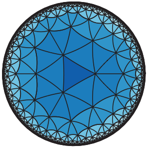
Hyperbolische Geometrie



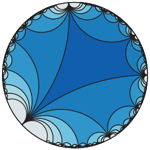
Pflasterungen und Gruppen



Erstellung von Pflasterungen

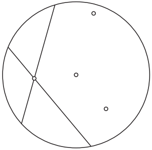


Spezielle Pflasterungen

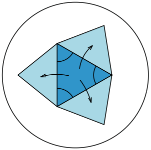


Übersicht

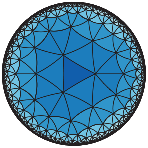
Hyperbolische Geometrie



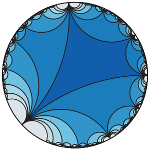
Pflasterungen und Gruppen



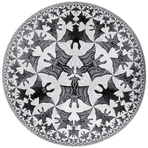
Erstellung von Pflasterungen



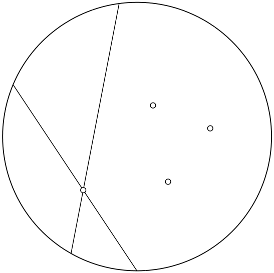
Spezielle Pflasterungen



Anwendungen



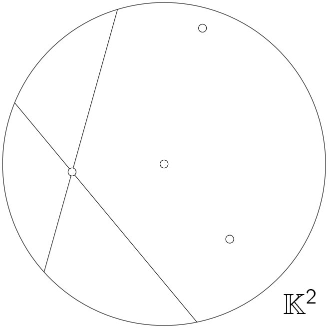
Hyperbolische Geometrie



Was macht eine Geometrie zu einer Geometrie?

- Menge von Elementen (Punkte, Geraden)
- Eigenschaften (parallel, orthogonal, ...)
- Transformationsgruppe, die diese Eigenschaften erhält

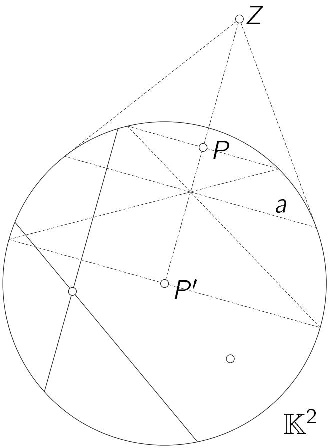
Cayley-Klein Modell $\mathbb{K}^2$



Schauplatz
Das Innere des Einheitskreises Ω

Transformationsgruppe
Automorphe Kollineationen von Ω

Cayley-Klein Modell $\mathbb{K}^2$



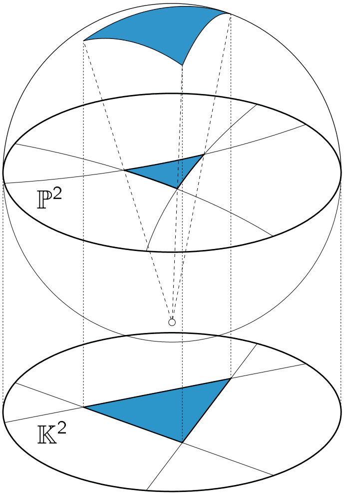
Schauplatz

Das Innere des Einheitskreises Ω

Transformationsgruppe

Automorphe Kollineationen von Ω

Poincaré-Modell $\mathbb{P}^2$

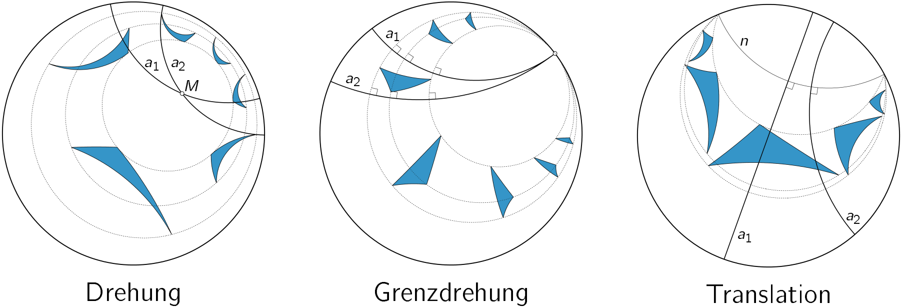


Punkte := Punkte in Ω

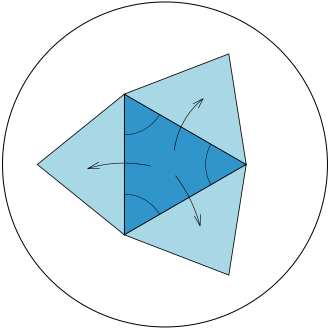
Geraden := Kreisbögen, die Ω orthogonal schneiden

Bewegungen in $\mathbb{P}^2$

Jede gleichsinnige hyperbolische Bewegung in $\mathbb{P}^2$ ist durch zwei Kreisinversionen darstellbar.

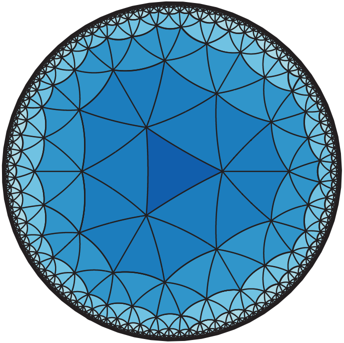


Pflasterungen und Gruppen



Was ist eine Pflasterung?

Definition:
Eine Menge kongruenter Polygone, die eine Ebene ohne Löcher und Überlappungen überdecken, heißt Pflasterung.



[3,7]-Pflasterung

Definition:
Eine $[p, q]$-Pflasterung enthält ausschließlich regelmäßige p-Ecke, von denen immer q in einem Punkt zusammentreffen. Das Symbol [p,q] heißt Schläfli-Symbol.

Was ist eine Pflasterung?

Es gibt ∞-viele verschiedene hyp. Pflasterungen mit regelmäßigen Polygonen.

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	S	S	S	E	H	H	H	H
4	S	E	H	H	H	H	H	H
5	S	H	H	H	H	H	H	H
6	E	H	H	H	H	H	H	H
7	H	H	H	H	H	H	H	H
8	H	H	H	H	H	H	H	H
9	H	H	H	H	H	H	H	H
10	H	H	H	H	H	H	H	H

S…elliptisch, E…euklidisch, H…hyperbolisch

$[p, q]$-Pflasterung hyperbolisch

$$\Updownarrow$$

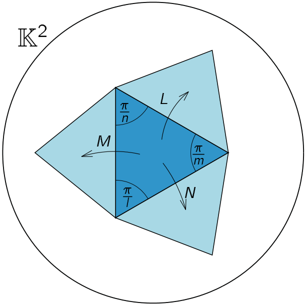
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$$

Fundamentalgebiet und Bewegungsgruppe

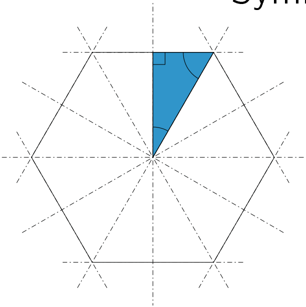
Fundamentalgebiet T_0:
Vereinigung einer offenen Menge und ihrer Randpunkte

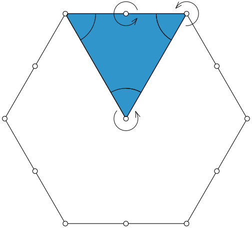
Bewegungsgruppe D:
Symmetriegruppe, Untergruppe der hyperbolischen Bewegungen

Zu je zwei Zellen T_1 und T_2 einer Pflasterung gibt es eine Bewegung $M \in D$, sodass $M(T_1) = T_2$.



Symmetriegruppen





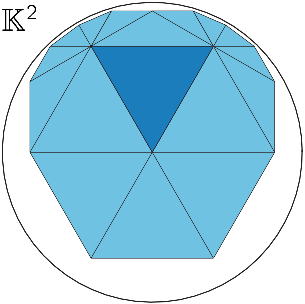
Spiegelungen

- an den Polygonkanten
- an den Mittelsenkrechten der Polygonkanten
- an den Durchmessern durch die Eckpunkte des Polygons

Drehungen

- um die Mitten der Polygone, $\sphericalangle \frac{2\pi}{p}$
- um die Ecken der Polygone, $\sphericalangle \frac{2\pi}{q}$
- um die Mitten der Polygonkanten, $\sphericalangle \pi$

Lokales Pflasterungsproblem

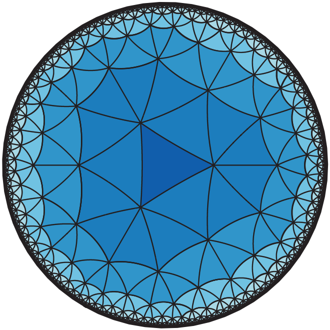


Die angrenzenden Polygone bedecken eine Fläche, die das Ausgangspolygon komplett umschließt und keine Löcher oder Überlappungen aufweist.

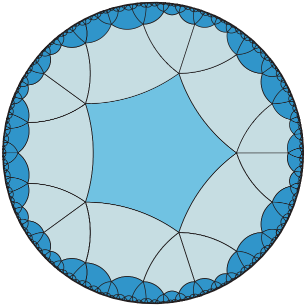
$\Updownarrow$

Pflasterung ist möglich.

Erstellung von Pflasterungen



Wahl eines zentralen Polygons einer [p,q]-Pflasterung

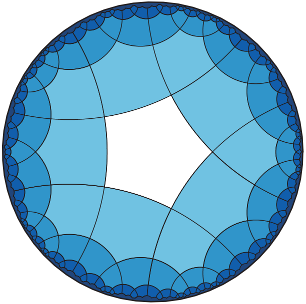


[5,5]-Pflasterung

Durch die Angabe des Schläfli-Symbols $[p, q]$ ist der Umkreisradius r der Polygone eindeutig bestimmt:

$$r^2 = \frac{2(\cos\frac{2\pi}{p} + \cos\frac{2\pi}{q})}{\cos\frac{2\pi}{p}\cos\frac{2\pi}{q} + \cos\frac{2\pi}{p} + \cos\frac{2\pi}{q} + 1}$$

Generationen einer Pflasterung



[5,4]-Pflasterung

Das Ausgangspolygon ist die nullte Generation der Pflasterung.

Zur k-ten Generation gehören all jene Polygone, die einen Punkt oder eine Kante mit einem Polygon der $(k-1)$-ten Generation gemeinsam haben und noch in keiner der vorigen Generationen enthalten waren.

Vervielfältigung des Polygons

Aus der k-ten Generation entsteht die $(k+1)$-te durch Drehung oder Spiegelung an jenen Ecken und Kanten, die sowohl der k-ten als auch der $(k+1)$-ten Generation angehören.

Im Algorithmus von *Douglas Dunham* verwendete Transformationen:

- reflect ... Spiegelung an einer Polygonkante
- rotateP ... Drehung um die Polyogonmitte, $\sphericalangle \frac{2\pi}{p}$
- rotateQ ... Drehung um eine Polygonecke, $\sphericalangle \frac{2\pi}{q}$

Algorithmus von Douglas Dunham

pattern(p,q,n)

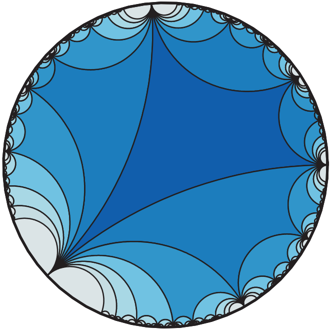
```
T1=identity
for i=1..p
  T=T1 ∘ reflect
  replicate(T,n−1,edge)
  T1=T1 ∘ rotateP
  T2=rotateP ∘ rotateQ
  for j=1..(q−3)
    replicate(T ∘ T2,n−1,vertex)
    T2=T2 ∘ rotateQ
  endfor
endfor
```

Algorithmus von Douglas Dunham

replicate(T,n,N)

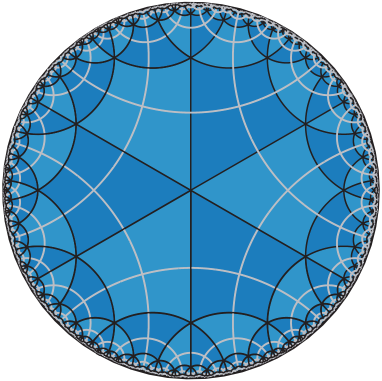
```
drawPgon(T)
if (n>0)
 case N=edge
  exposedEdges=p-3
  T1=T ∘ rotateP ∘ rotateP
 case N=vertex
  exposedEdges=p-2
  T1=T ∘ rotateP
 for i=1..exposedEdges
  T=T1 ∘ reflect
  replicate(T,n-1,edge)
  T1=T1 ∘ rotateP
  if (i<exposedEdges)
   then PgonsPerVertex=q-3
   elseif (i=exposedEdges)
   then PgonsPerVertex=q-4
  endif
  T2=rotateP ∘ rotateQ
  for j=1..PgonsPerVertex
   replicate(T ∘ T2, n-1, vertex)
   T2=T2 ∘ rotateQ
  endfor
 endfor
endif
```

Spezielle Pflasterungen

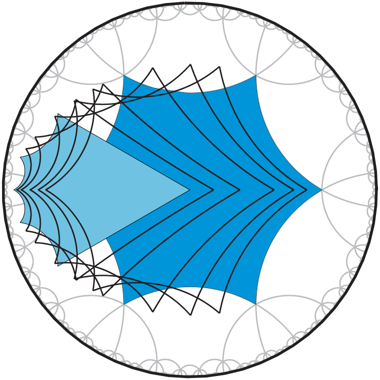


Duale Pflasterung

Verbindung der Mittelpunkte angrenzender Polygone

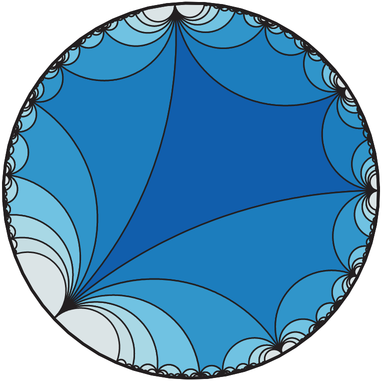


[6,4]- und [4,6]-Pflasterung



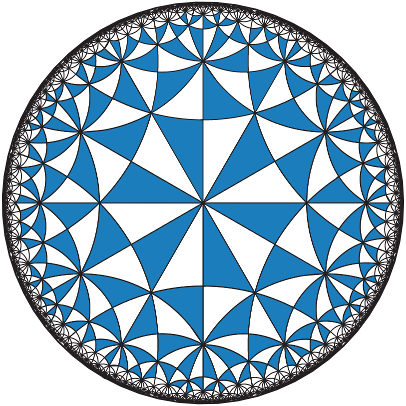
selbstdual = kongruent

Pflasterung mit Grenzpolygonen



- unendlich lange Kanten
- Innenwinkel alle Null
- alle n-eckigen Grenzpolygone sind kongruent

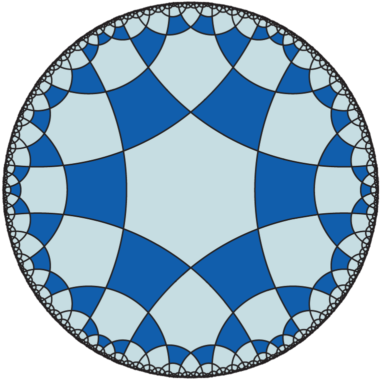
Pflasterung mit rechtwinkligen Dreiecken



Jedes Polygon kann in kongruente rechtwinklige Dreiecke unterteilt werden.

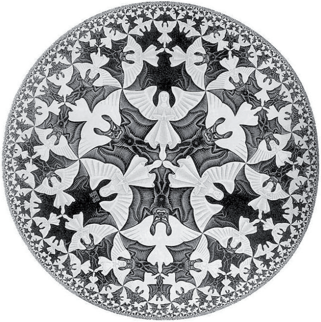
Quasireguläre Pflasterung

Verbinden der Kantenmittelpunkte angrenzender Polygone



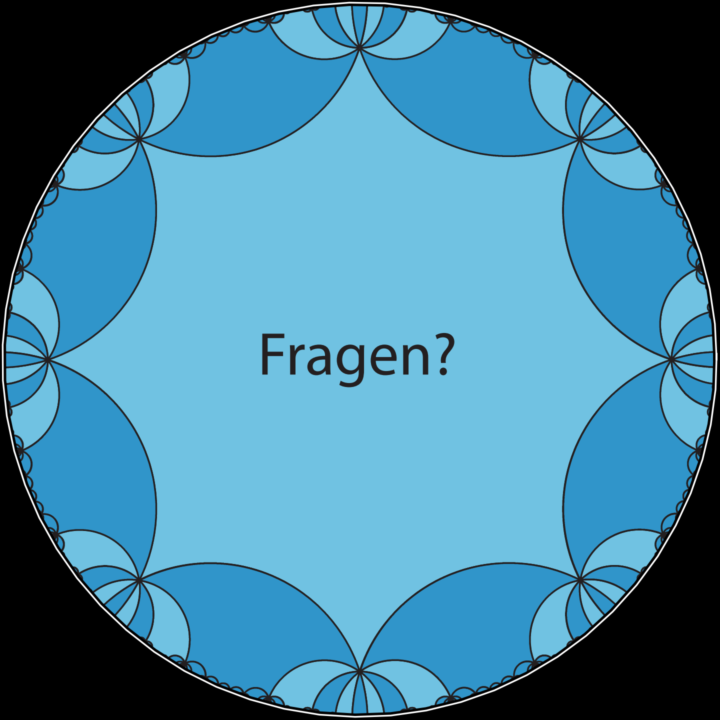
- enthält zwei Arten regulärer Polygone
- gleichartige Polygone haben höchstens eine Ecke gemeinsam
- verschiedenartige Polygone sind nur über Kanten benachbart

Anwendungen



Anwendungen

- Modellierung kompakter Flächen mit Hilfe diskreter Transformationsgruppen
- Datenvisualisierung (Hyperbolic Self-Organizing Map)
- Chemische Kristallstrukturen
- Anti-de-Sitter Räume als Modell unseres Universums
- M.C. Escher's Circle Limits


Fragen?