FASZINOSUM ELEMENTARGEOMETRIE

Gunter Weiss
(TU Dresden & TU Wien)

33. Fortbildungstagung Geometrie
Strobl (Österreich) 5-.8.November 2012

“Elementargeometrie” – eine Definition

Schauplatz der EG ist die naive Anschauungsebene bzw. -raum.

EG handelt von *Punkten, Geraden, Kreisen* ,
von Kegelschnitten und geom. Örtern,
von Ebenen, Kugeln, “Primitives”

EG handelt von *Abstand, Winkel,*
von *Teilverhältnis* (Doppelverhältnis)

EG handelt von unerwarteten Inzidenzen

Worum geht es ?

- **Warum wird Elementargeometrie und die-jenigen, die sie betreiben, von “hardcore Mathematikern” nicht geachtet ?**
- **Ist “Advanced Elementary Geometry” ein Ausweg aus dieser Missachtung?**
- **Beeinflusst Elementargeometrie aktuelle mathematische/geometrische Forschung ? Ist sie Grundlage tiefliegender Resultate ?**
- **Welche pädagogische Bedeutung hätte Elementargeometrie ? Welchen Gewinn böte sie Schülern und Lehrern?**

Warum wird EG wenig wertgeschätzt ?

- **es gibt keine “gute” Systematik**

  siehe Versuche zur **Dreiecksgeometrie** , z.B. Kimberling’s Encyclopedia of Triangle Centres

- **Synthetische Beweise sind trickreich, Analytische Beweise oft langatmig**

  + es bleibt oft verborgen, wohin das Problem eigentlich gehört.

Warum wird EG wenig wertgeschätzt ?

- **EG-Forschung wird (auch) von Hobby-mathematikern betrieben.**

  Viele ihrer Entdeckungen sind trivial, wenn im Kontext der Projektiven Geom. oder der "Kreisgeometrien" gesehen.

- **Moderne Mathematik-Ausbildung erfolgt (im Ausland) weitgehend geometriefrei.**

  Selbst UnivProfs für Math. erinnern selber kaum mehr als die Sätze von Pythagoras und Thales!

Worum geht es ?

- Welche pädagogische Bedeutung hat Elementargeometrie ? Welchen Gewinn bietet sie Schülern und Lehrern ....

  ... in Zeiten von “Zentralmatura” und standardisiertem Lehr- und Lernstoff ?

Sie bietet und gibt

- Entdeckerfreude auf math.-geom. Gebiet,
- Anleitung zu Kreativität
- Motivation zu eigenständiger Beschäftigung

Positive Aspekte von “Advanced EG”

- **Berühmte Mathematiker haben (A)-EG beforscht,**
  z.B: C.F. GAUSS, L. EULER, B. PASCAL, A. MÖBIUS …

- **Resultate erlauben oft interessante *Verallgemeinerungen* , stimulieren neue Zweige math. Forschung**

  z.B.: aktuelle Entwicklungen in ORIGAMI und in MINKOWSKI-Geom. (mit Oval als Kreis/Kugel)

Grob-Einteilung der Resultate der (A)EG

(a) “Zufalls-Entdeckungen” in der euklid. 2D- und 3D-Geometrie (H. EBISUI).

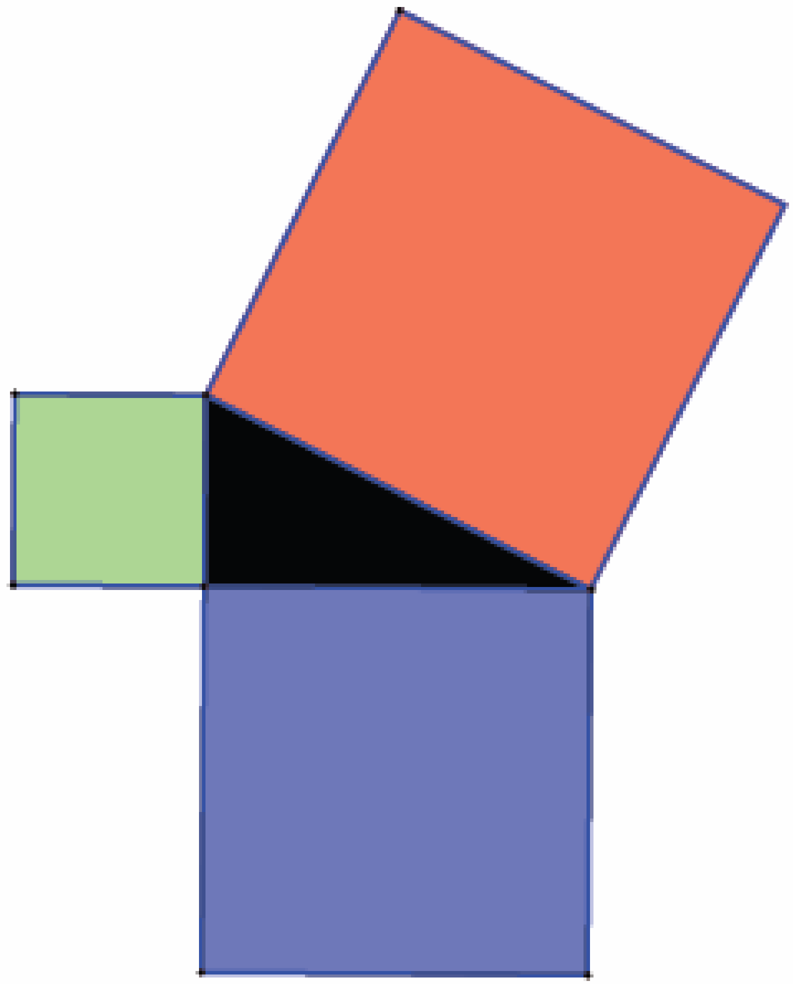
(b) Euklid. Verallgemeinerungen und Erweiterungen zu (a)

(c) Probleme der “Intuitiven Geometrie” (P. ERDÖS)

(d) Modifikationen von Ergebnissen (a)&(b)
z.B. für n-dimensionale Räume,
für allg. Koordinatenkörper,
für nichteuklidische Geometrien, ...

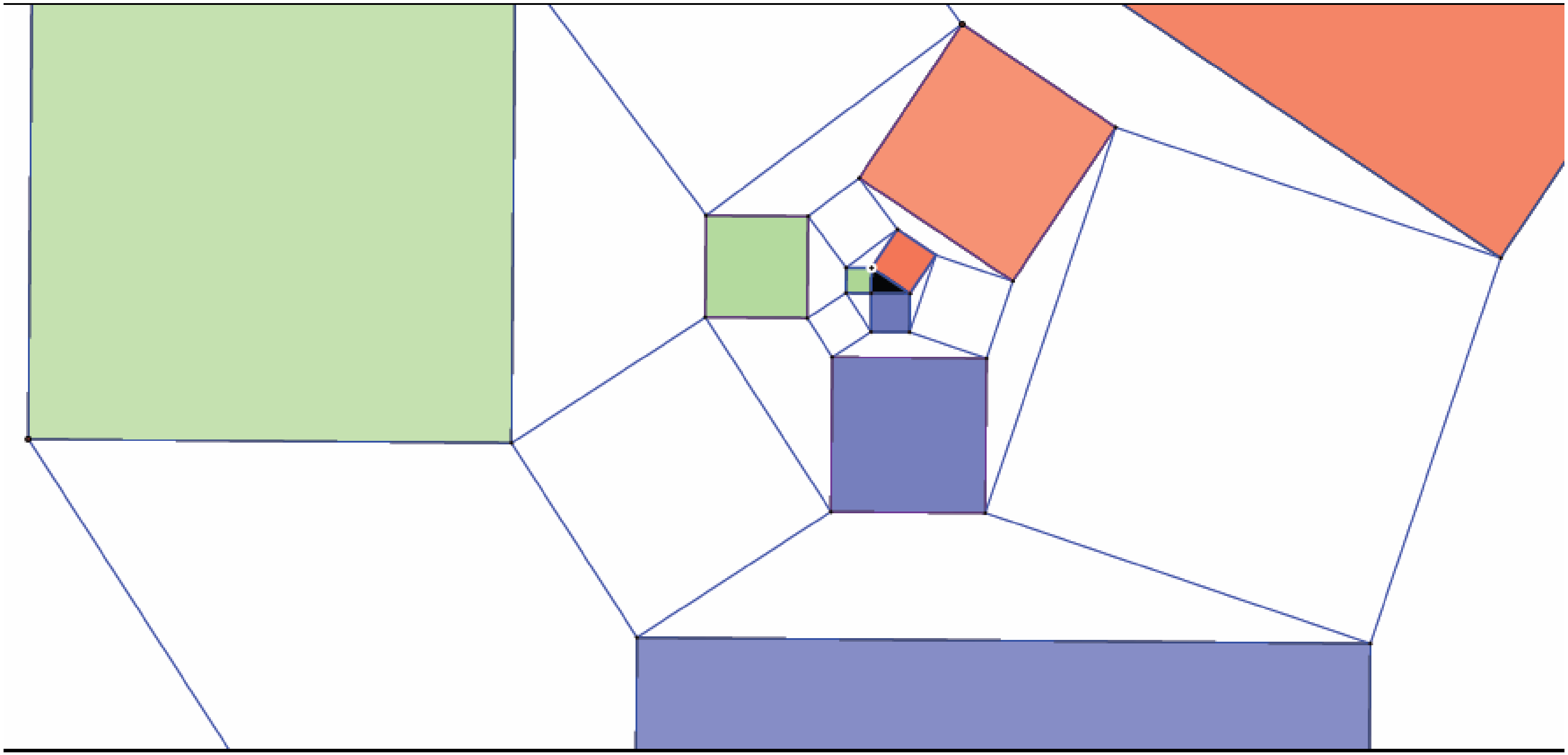
Beispiel 1: Neues zum “Pythagoras”

Ist das wirklich schon alles ?



Beispiel 1: Neues zum “Pythagoras”

Idee von H. EBISUI (2012):
Iteriere das Quadrate-Ansetzen!



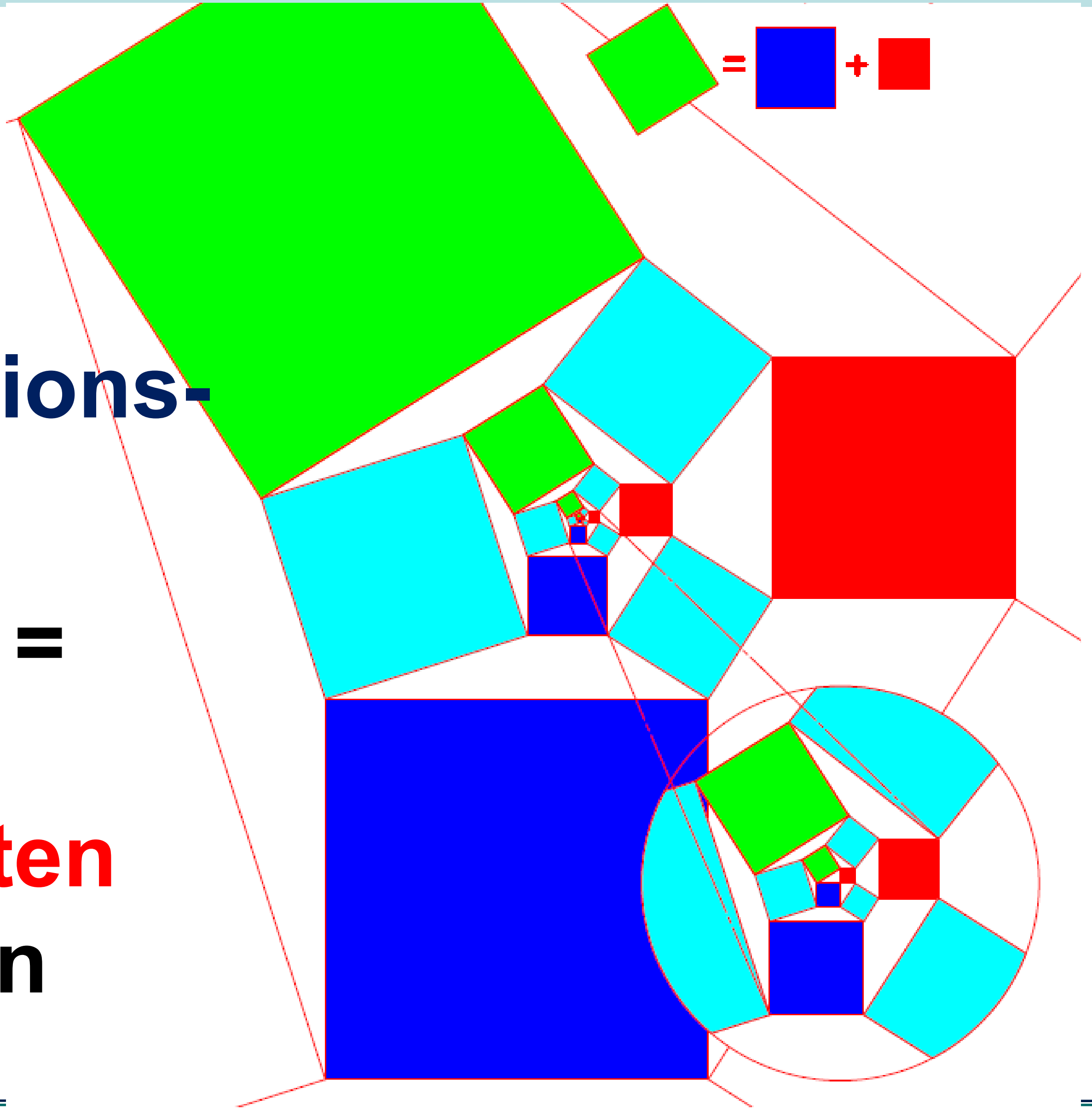
H.EBISUI: „I found a new theorem, please enjoy!

Beispiel 1: Neues zum “Pythagoras”

Satz von H. EBISUI:

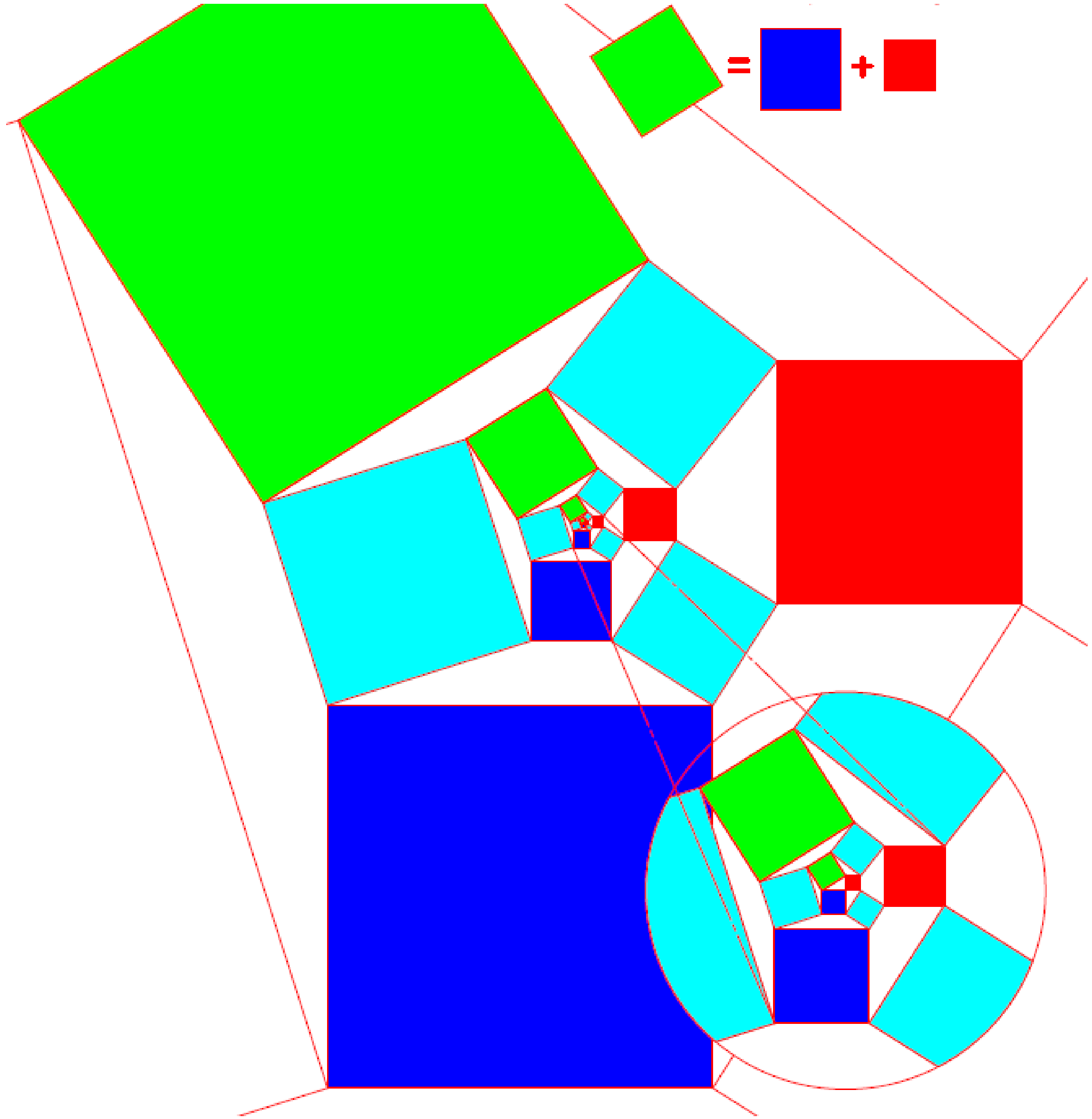
In jedem Iterations-schritt gilt:

Grüne Fläche =
= Summe der
blauen und roten
Quadratflächen

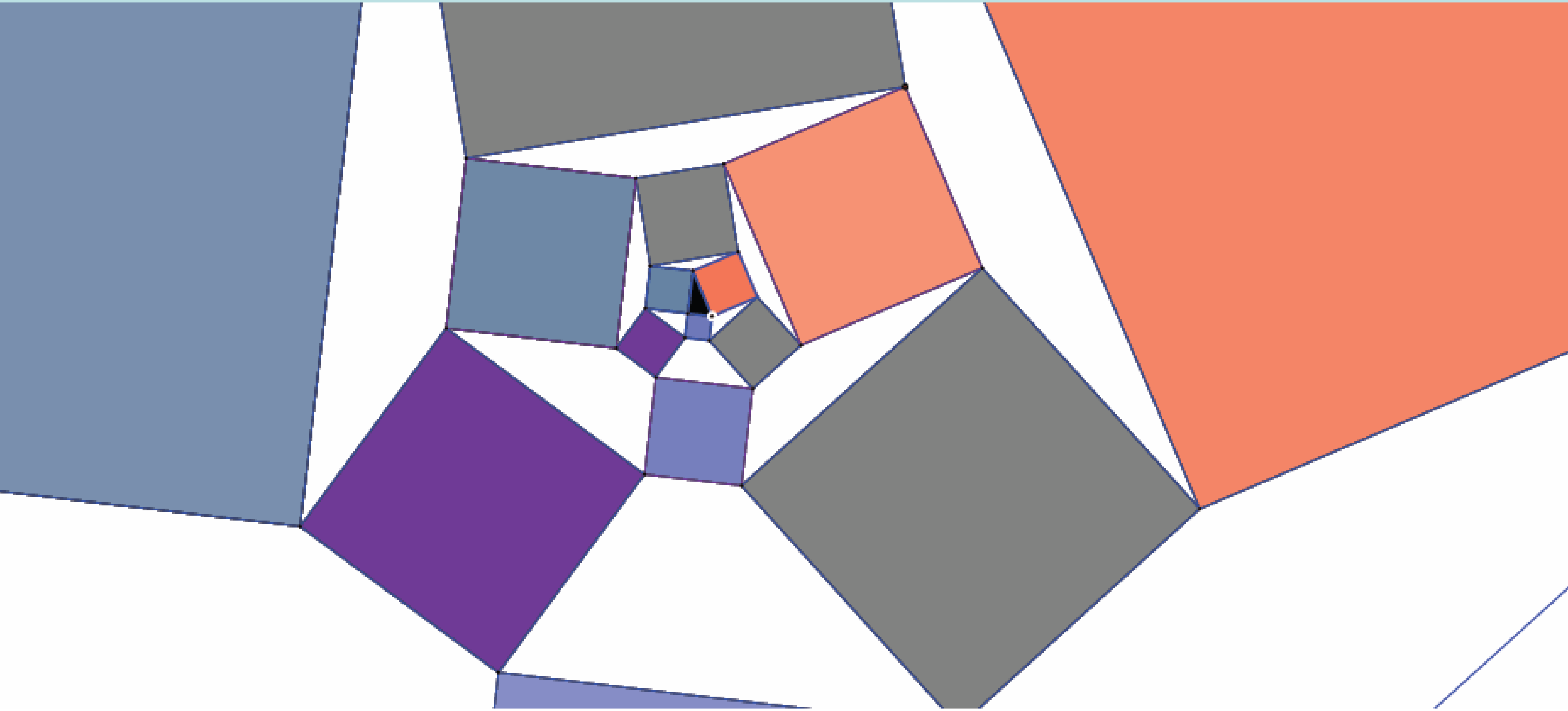


Beispiel 1: Neues zum "Pythagoras"

Und was ist mit den hellblauen Quadraten?

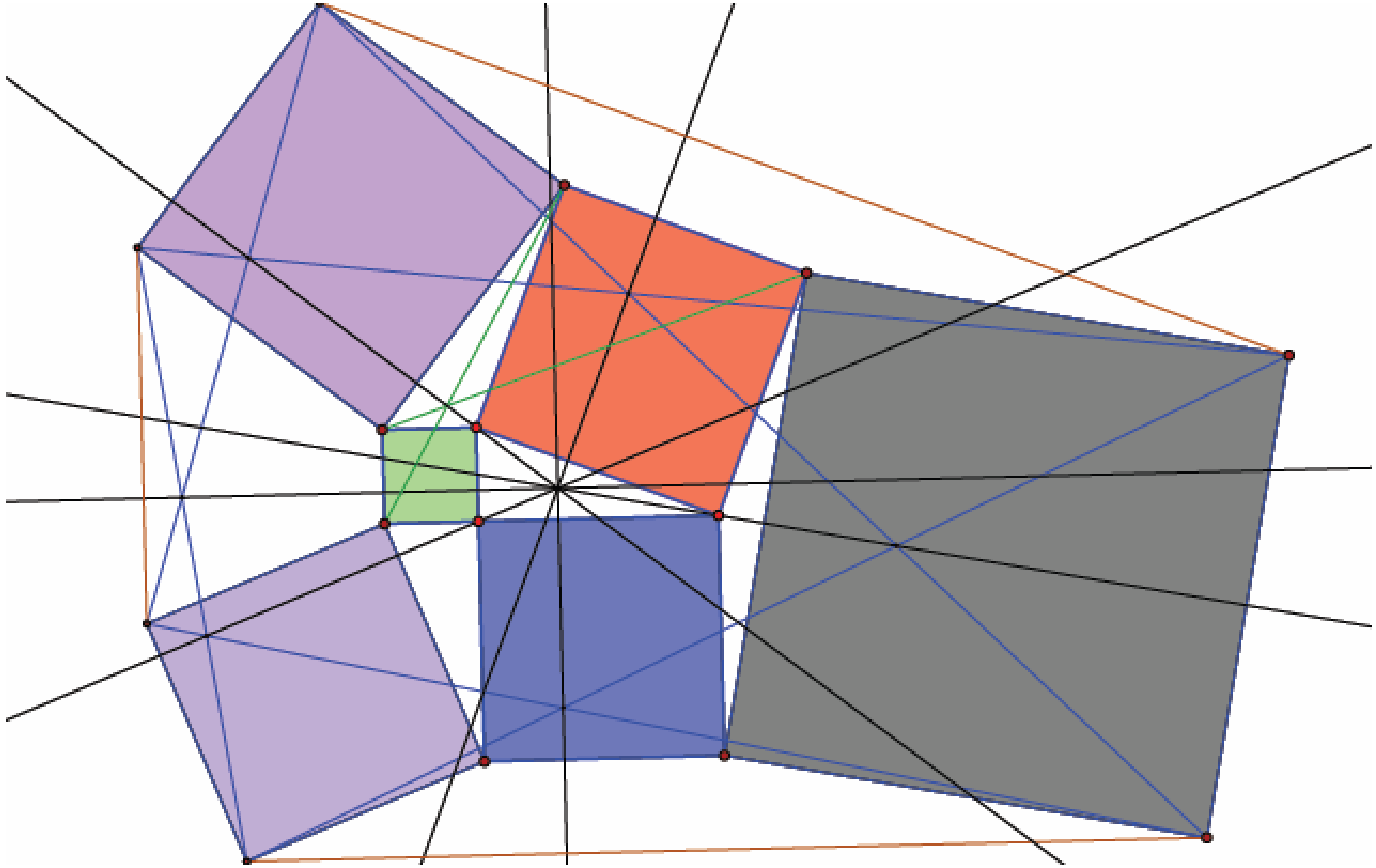


Beispiel 1: Neues zum “Pythagoras”



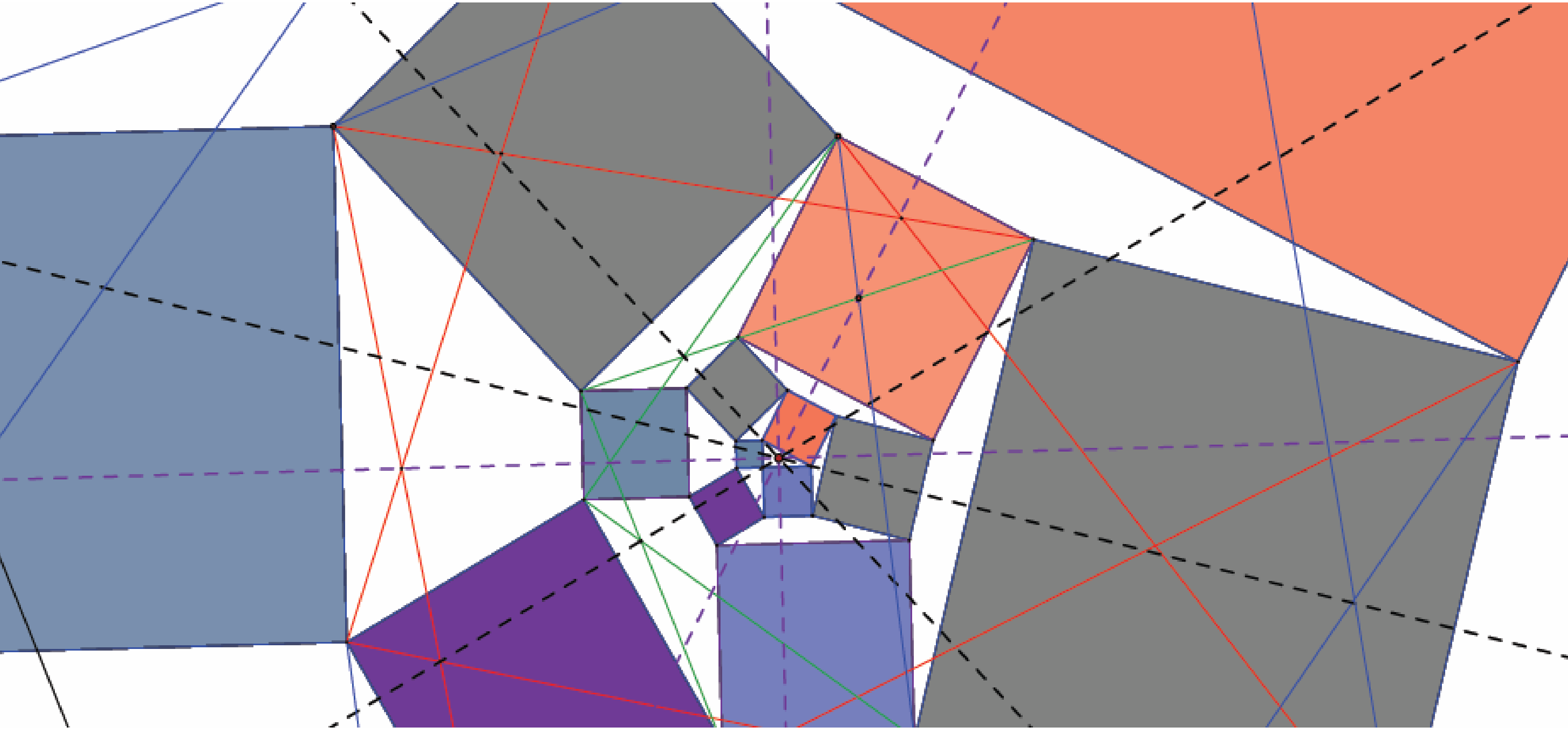
H.EBISUI: „Also: blau+blau = rot,
grau+grau = 5 x violett“

Beispiel 1: Neues zum "Pythagoras"



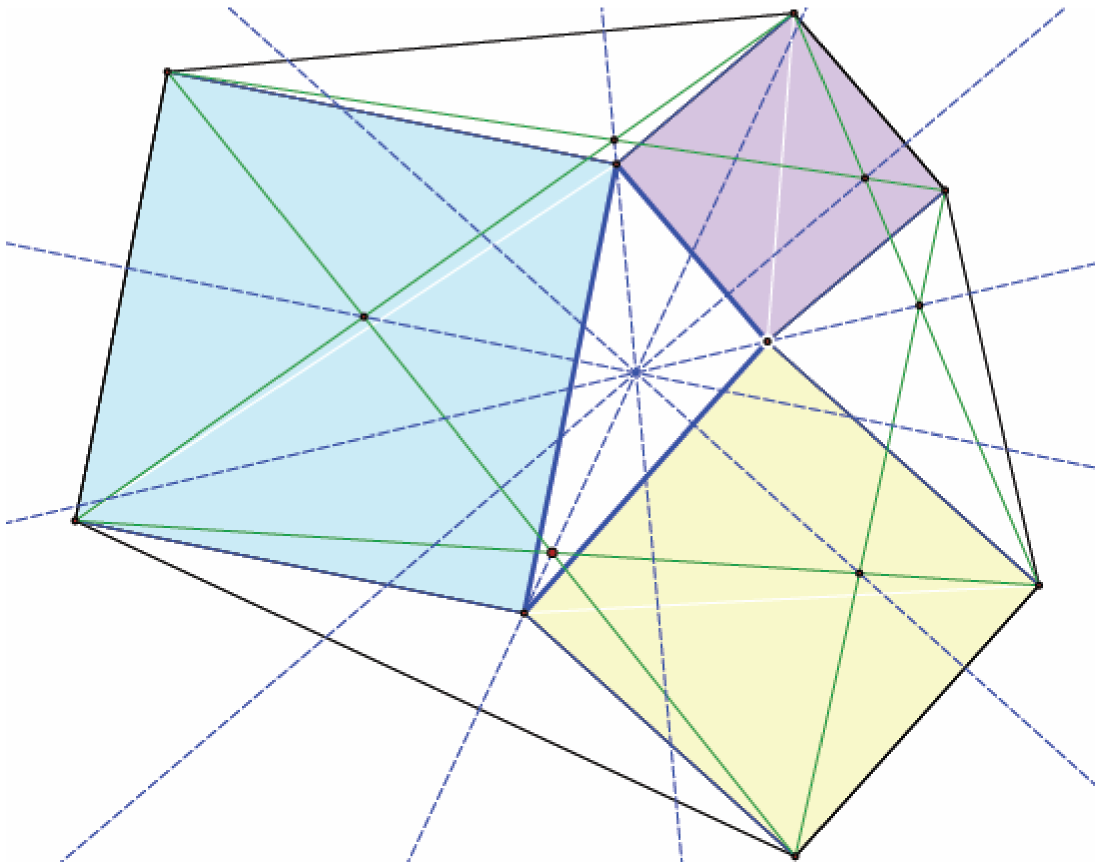
H.EBISUI: „Zusatz: 6 Seitennormalen durch Diagonalschnittpunkte sind kopunktal.“

Beispiel 1: Neues zum "Pythagoras"



H.EBISUI: „Zusatz: 6 Seitennormalen durch Diagonalschnittpunkte sind kopunktal."

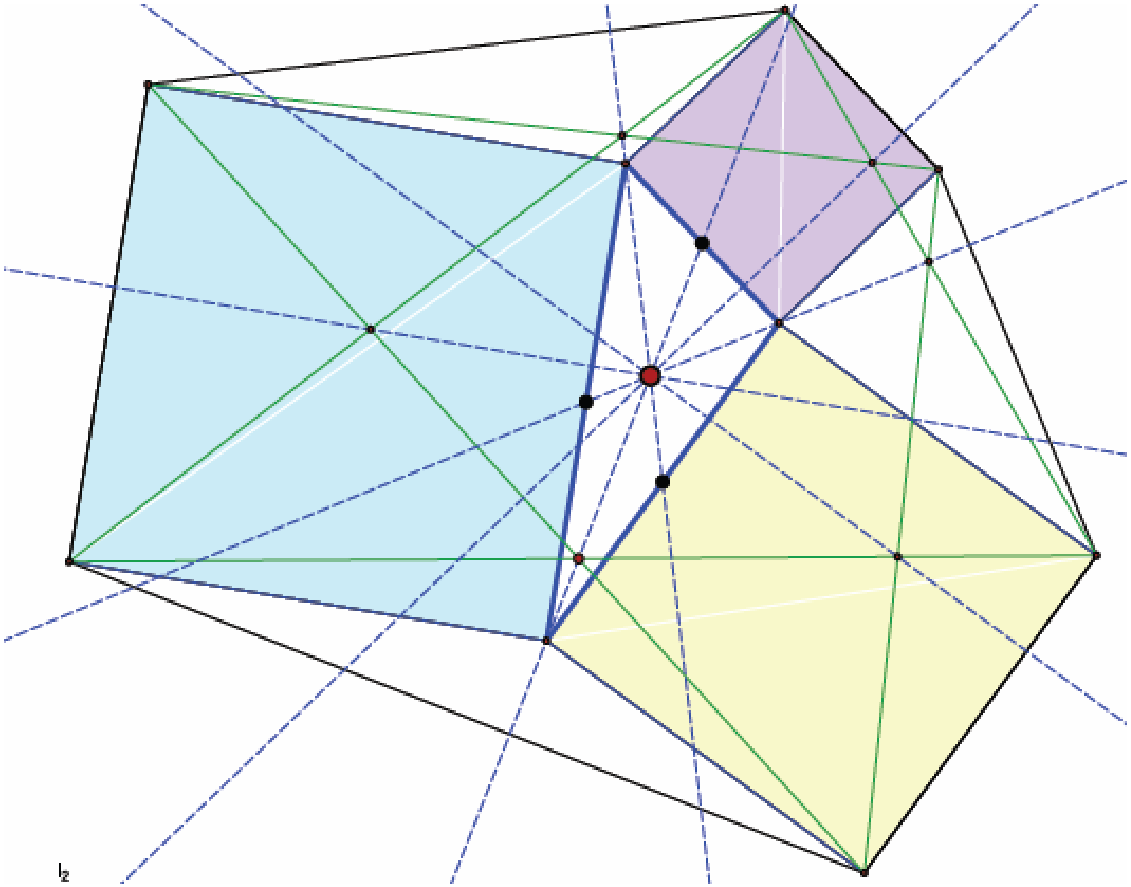
Beispiel 1: Neues zum “Pythagoras”



„Zusatz gilt für allgemeine Dreiecke !!!“

(Please enjoy.)

Beispiel 1: Neues zum “Pythagoras”



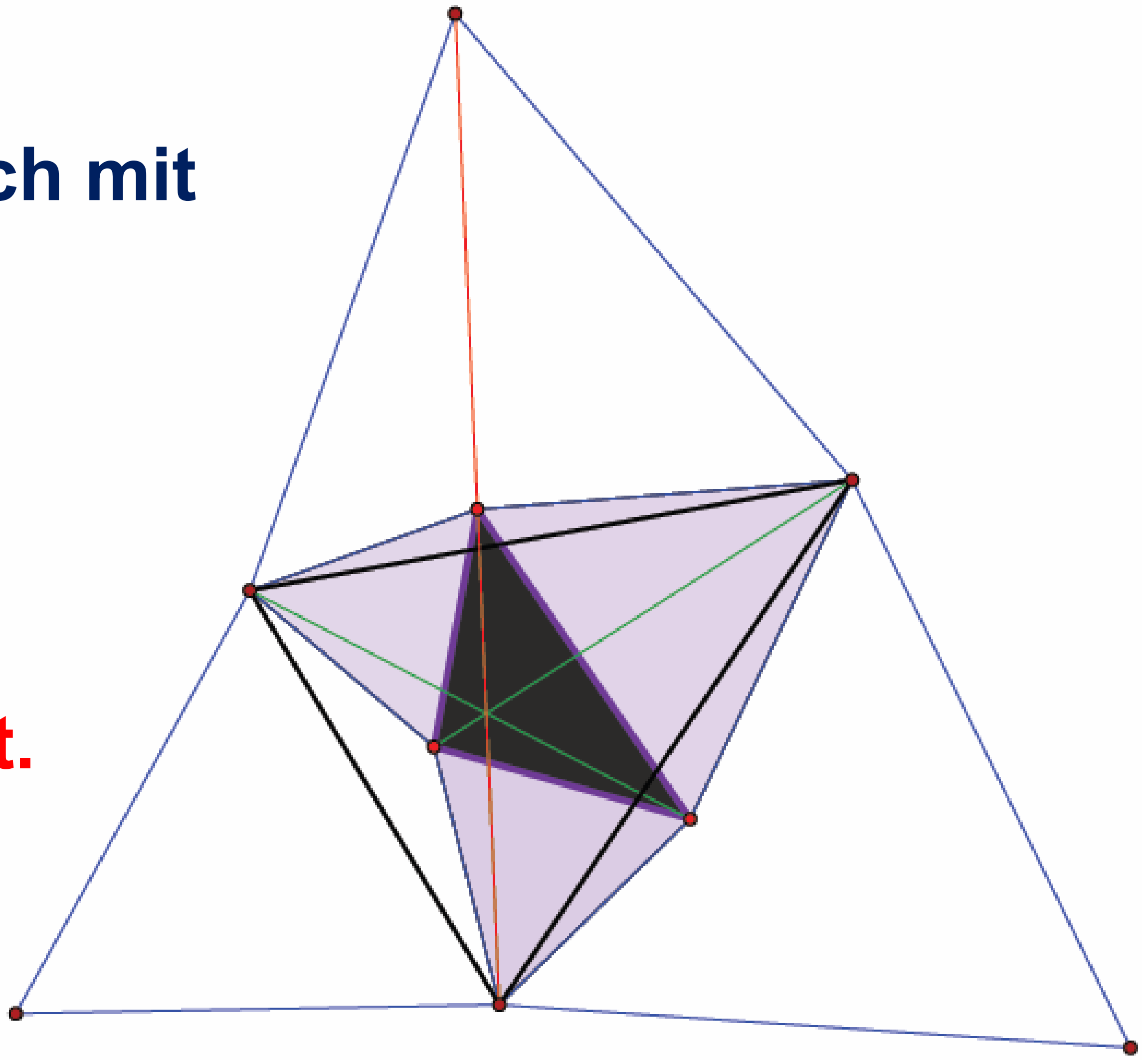
Schnittpunkt ist der Schwerpunkt des Ausgangsdreiecks!

Beispiel 2: Neues zum Fermat-Punkt ?

Frage:
Geht Analoges auch mit gleichseitigen Ansatzdreiecken?

Ergebnis: Auch bei Iteration immer der selbe Fermat-Punkt.

Limes der Iteration regulär?

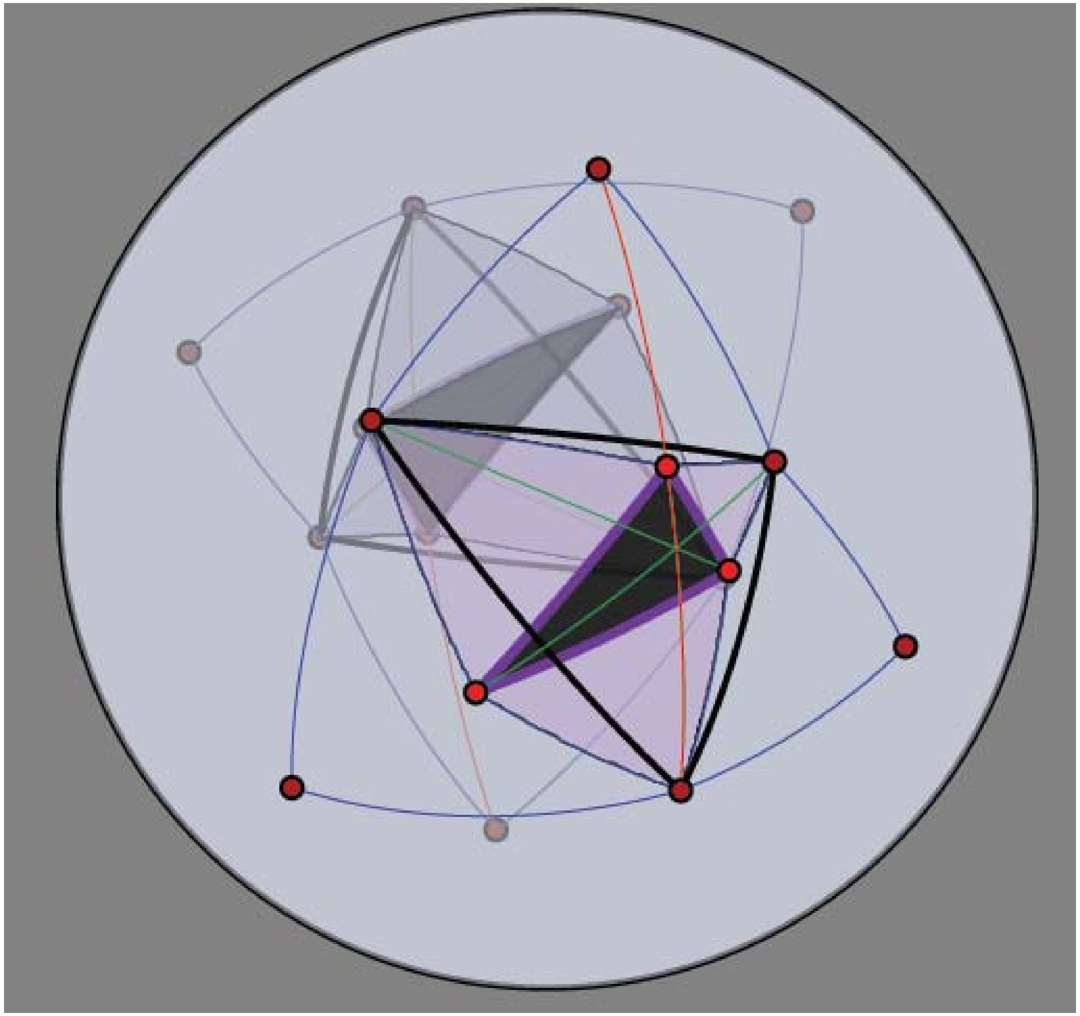


Beispiel 2: Neues zum Fermat-Punkt ?

Frage:
Fermat-Problem auf der Kugel ?

⇕

= Fermat-Problem in elliptischer Geometrie ?

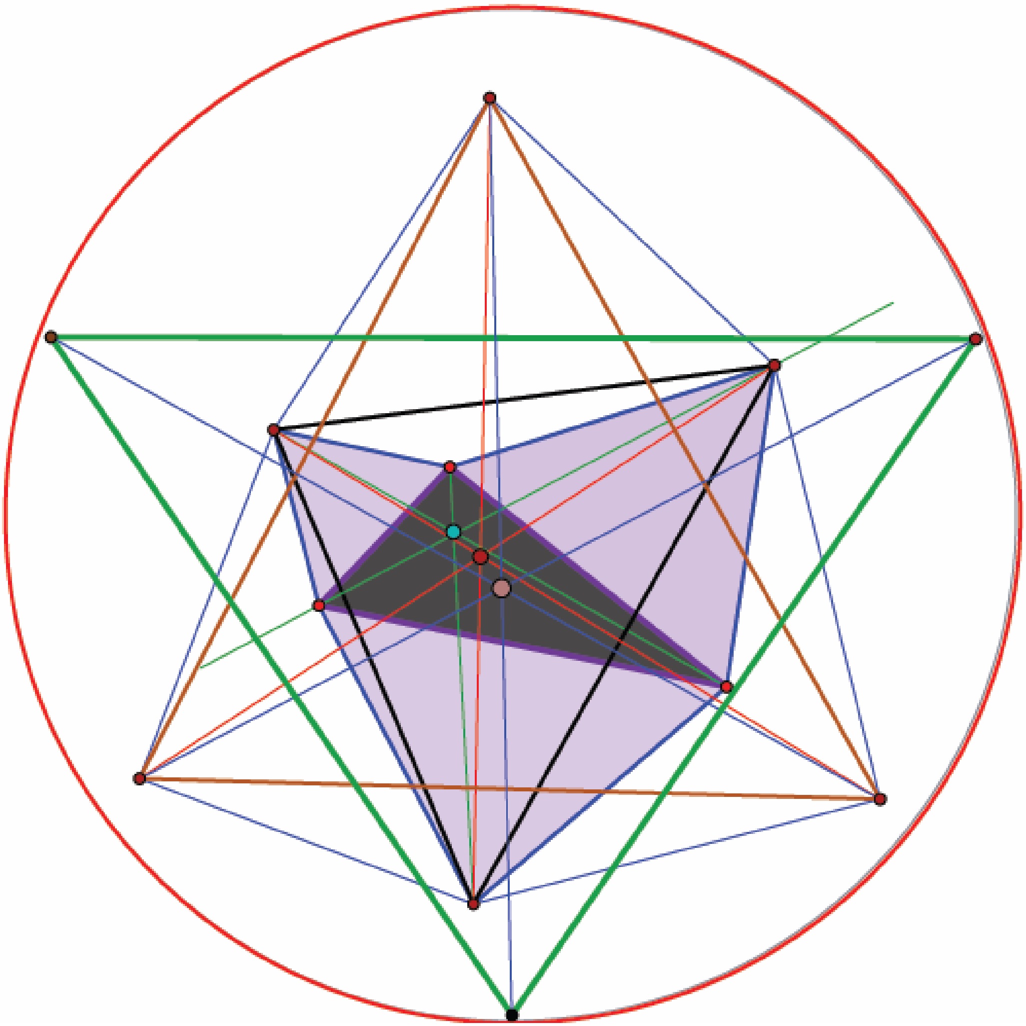


S.Mick 2010:
Antwort : Fermat gilt nicht!

Beispiel 2: Neues zum Fermat-Punkt ?

⇕

Fermat-Problem hyperbolisch auch falsch. (S.Mick)



Figur zeigt nur„scheinbar“ Fermat-Punkte !

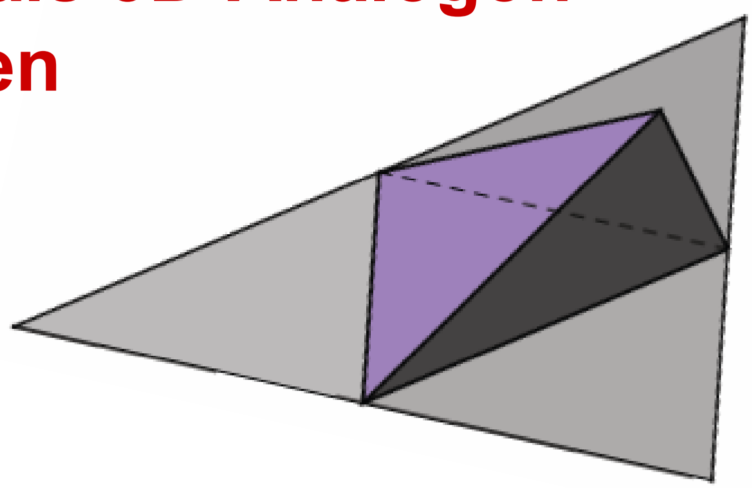
⇕

Andere Frage:
∃ Limes-Figur „regulär“? ∃ Limes-Fermatpunkt?

Beispiel 2: Neues zum Fermat-Punkt ?

Frage :
∃ euklid.-räumliche Verallgemeinerung ?

Aufsatz-Figuren zu Tetraeder ?
gleichflächige Tetraeder als 3D-Analogon zu gleichseitigen Dreiecken wohl am sinnvollsten



⇕

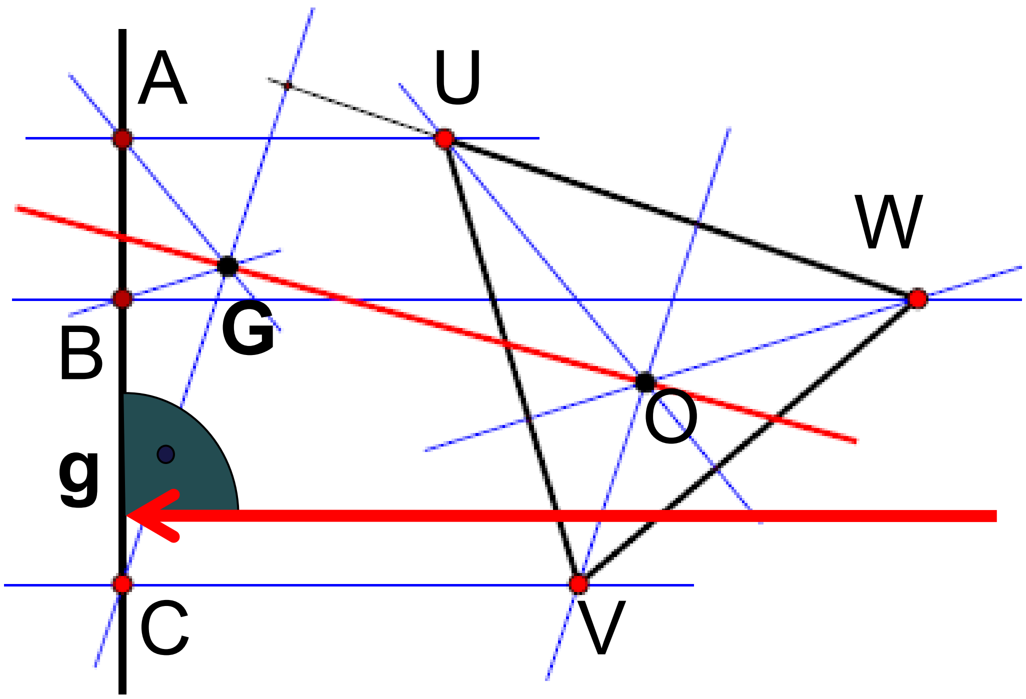
Vermutung:
noch offenes Problem! Interessant?!

Beispiel 3: Goormaghtigh & Pavillet

R. Goormaghtigh:

„ Ortho-Pol Abbildung“

$\omega : g \to G$



Schauplatz ist euklid. Ebene

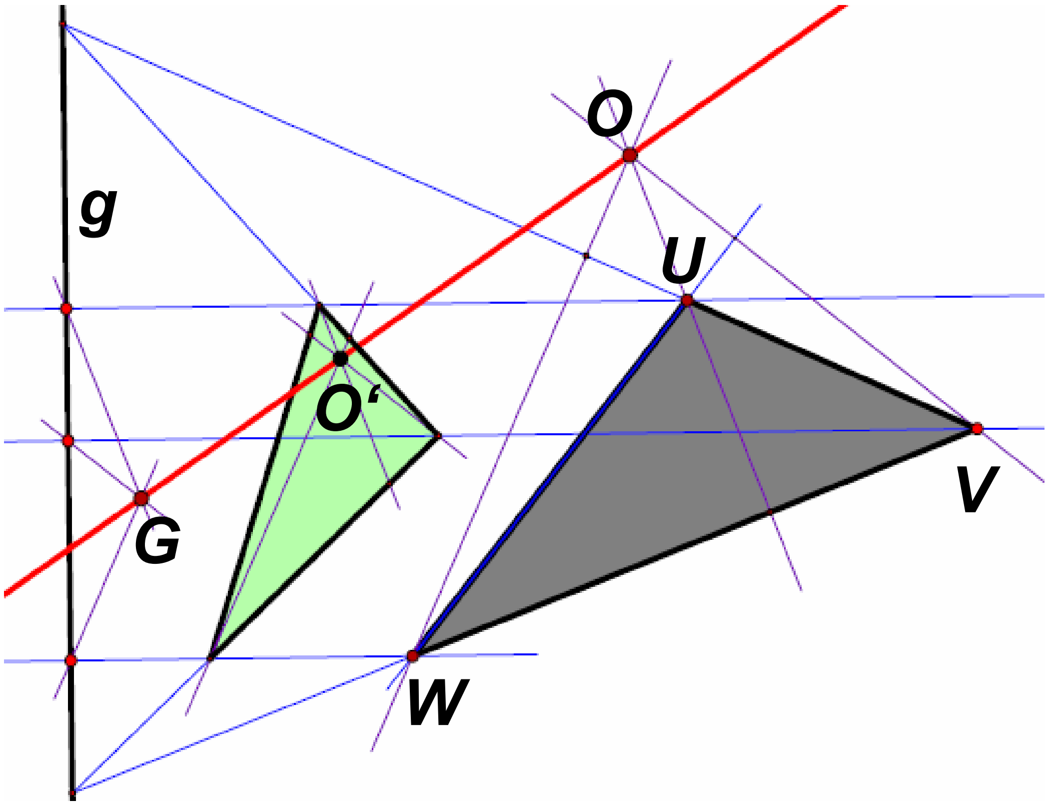
ω global,
ω surjektiv,
ω nicht injektiv!
(ω^{-1} quadratisch,
Determinante $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$
0-setzen)

Beispiel 3: Goormaghtigh & Pavillet

R. Goormaghtigh

Erweiterung:

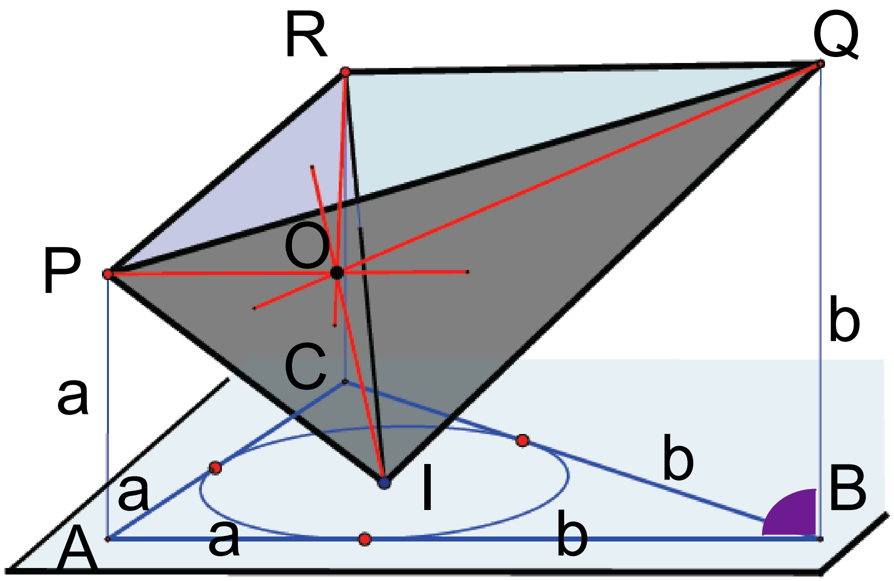
Ersetze *g* durch ein persp. affines Dreieck zu (*UVW*):



Parallelen zu den Höhen von (*UVW*) durch die Ecken des neuen schneiden einander auch, und zwar in *O'* auf *GO* !

Beispiel 3: Goormaghtigh & Pavillet

A. Pavillet's Entdeckung:



Das Tetraeder *(IPQR)* ist orthozentrisch!

Weitere Fragen :

- Ersetze I durch I_a .
- Gegeben: orthozentr. *(IPQR)*, finde Ebenen π , sodass Pavillet's Bedingung erfüllt ist.
- Dimensionsverall-gemeinerungen ?
- Beziehungen zu R. Goormaghtigh ?

Beispiel 4: Merkwürdiges am Tetraeder

Klar: $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{Schwerpunkt } S \\ \textbf{Umkugelmitte } U \\ \textbf{Inkugelmitte } I_0, \\ \textbf{4 Ankugelmitten } I_1..I_4 \end{array} \right.$

Höhenschnittpunkt O ?

i.a. sind die 4 Höhen windschief ! (mit Darst.Geom.)

Frage 1: **Kriterium für $\exists$ Orthozentrum O?**

Frage 2: $\nexists O$, **$\exists$ Ersatzpunkt für O ?**

$\exists$ EULER-Gerade ?

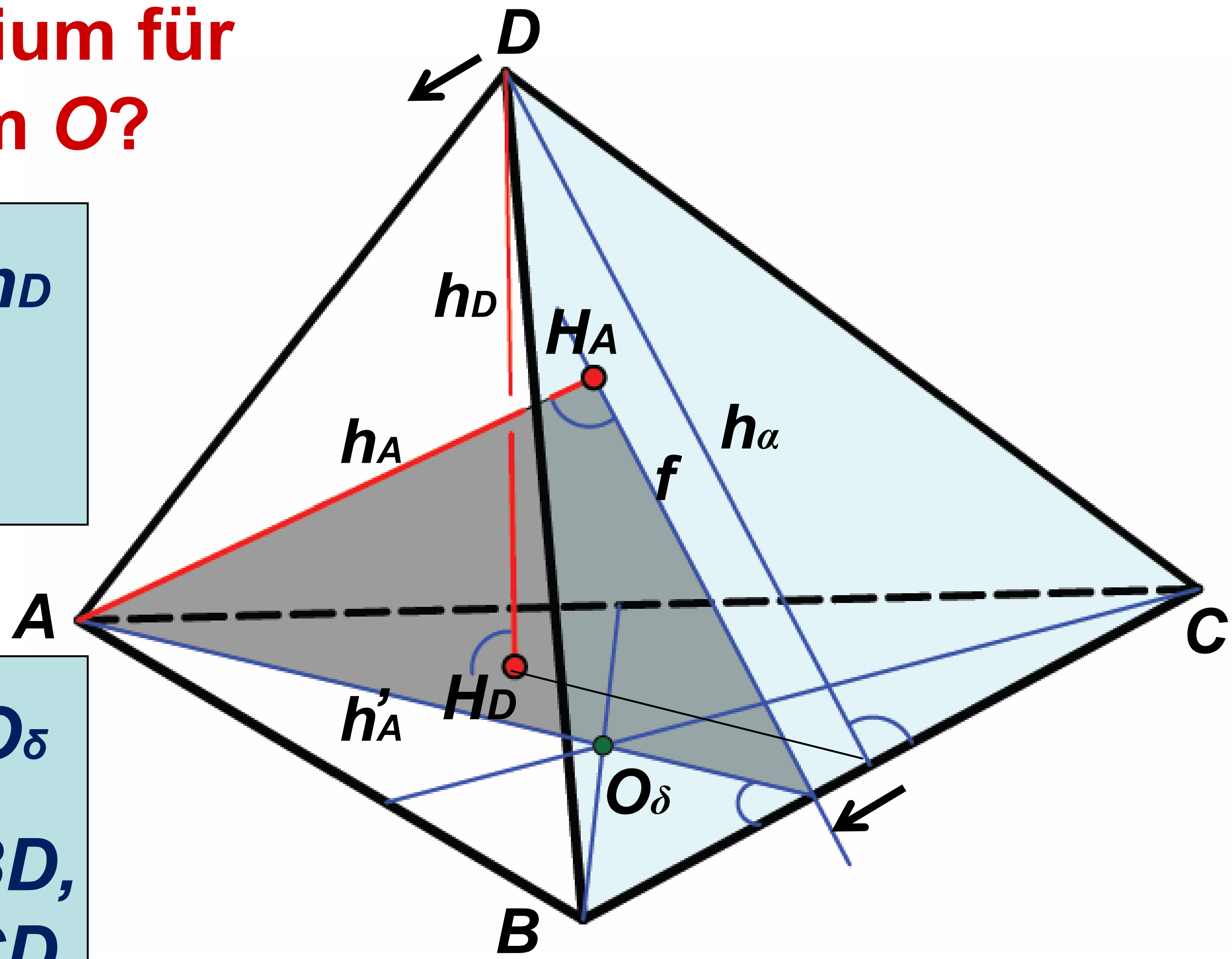
Beispiel 4: Merkwürdiges am Tetraeder

Frage 1: Kriterium für $\exists$ Orthozentrum *O*?

h_A schneidet h_D

$\Longleftrightarrow$

$AD \perp BD$



$\exists\, O \Longleftrightarrow H_D = O_\delta$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} AD \perp BD, \\ AB \perp CD, \\ AC \perp BD \end{array} \right.$$

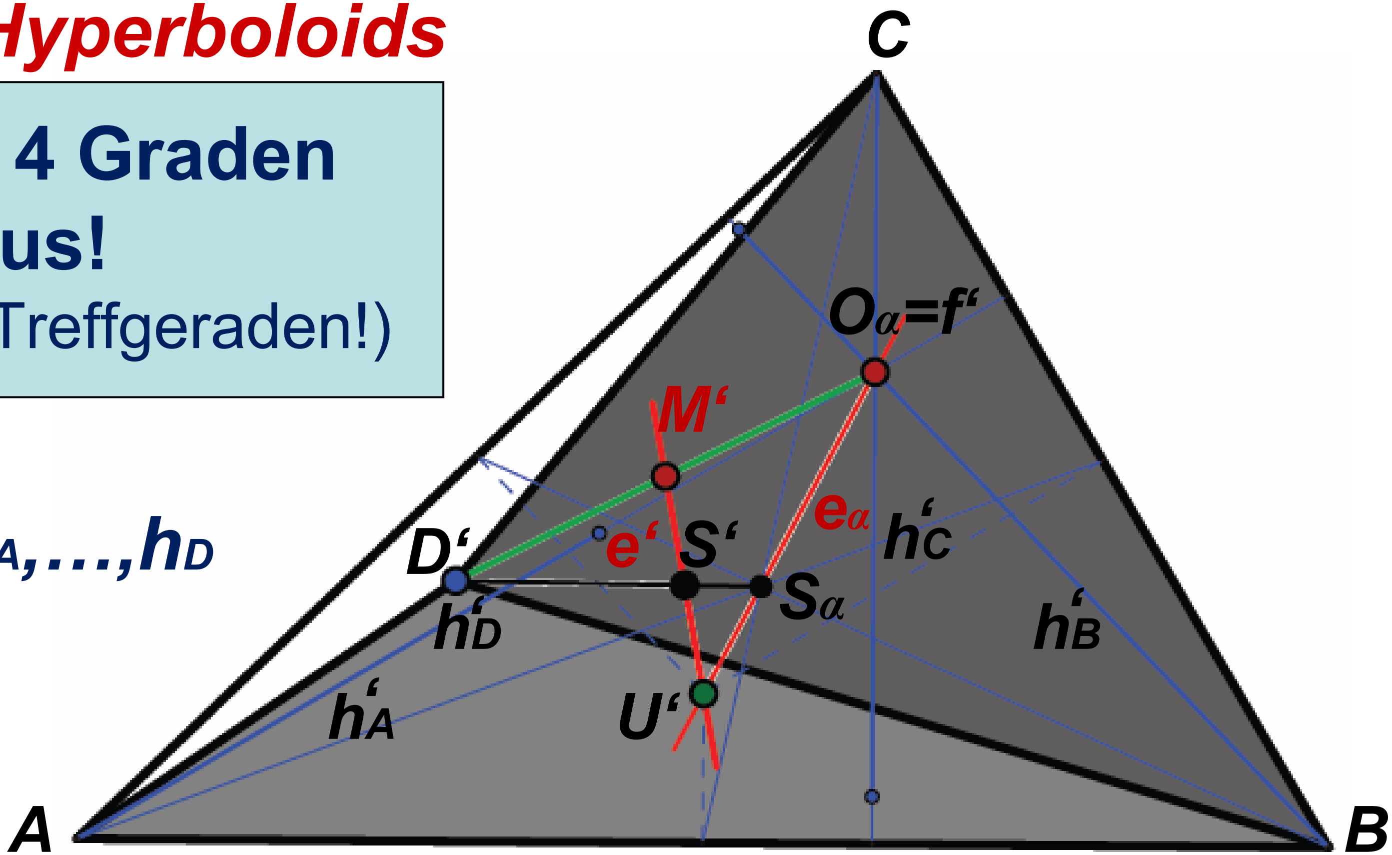
Beispiel 4: Merkwürdiges am Tetraeder

Frage 2: Ersatzpunkt für *O* ?

MONGE-Punkt *M* eines Tetraeders := Mittelpunkt des *Höhen-Hyperboloids*

$h_A,\ldots,h_D$ sind 4 Graden eines Regulus!
(∃ mehr als 2 Treffgeraden!)

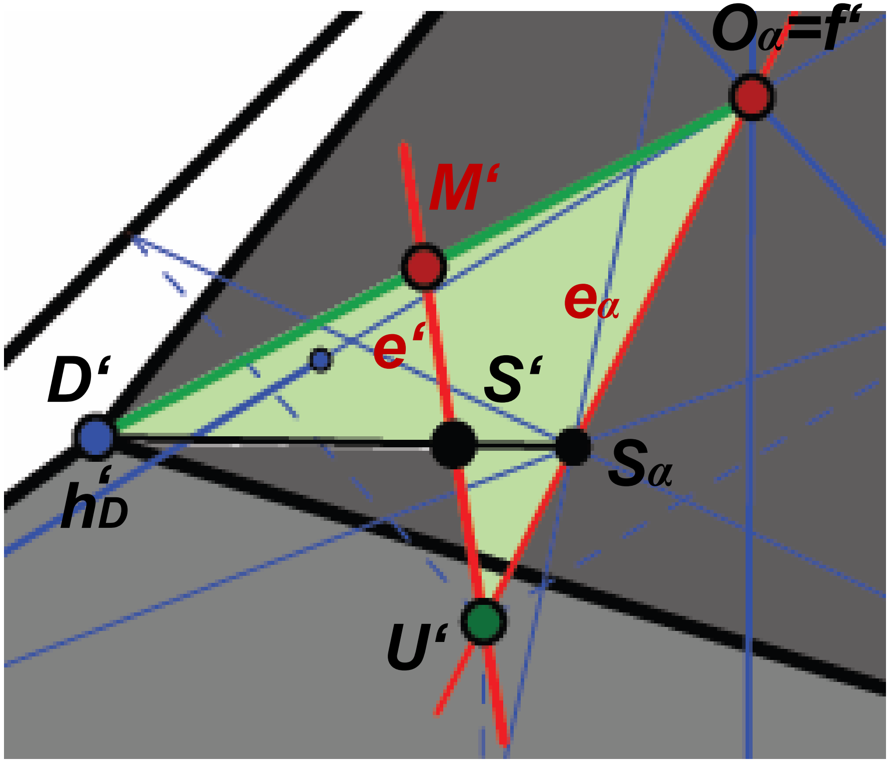
$f \| h_D$ trifft $h_A,\ldots,h_D$ usw.

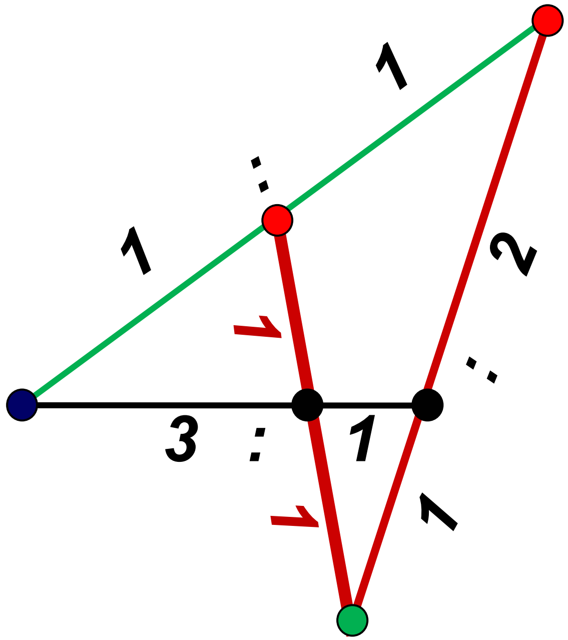


Beispiel 4: Merkwürdiges am Tetraeder

Frage 3: ∃ "Tetraeder-EULER-Gerade" e ?

Ja, e kollinear mit *U*, *S*, *M* und $\overline{US} = \overline{SM}$.





„Merkwürdiges" Vierseit
(affin ausgezeichnet)

Beispiel 5: Poncelet-Porismus

Gegeben Um- und Inkreis eines Dreiecks

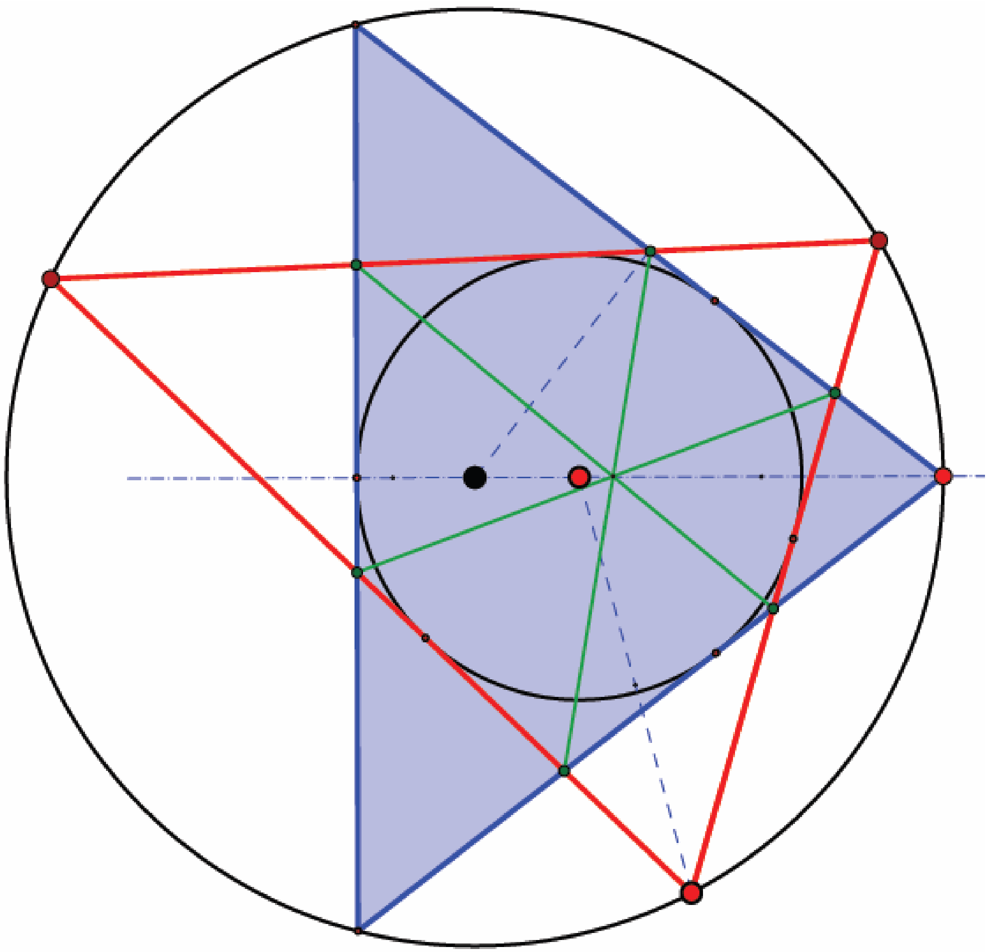
➡ **Entweder $\cancel{\exists}$ Dreieck oder $\exists$ ∞ viele !**
(„Poristisches Problem“)

➡ ***R, r, z*** … keine Dreiecksangabe !
(d.h. ***R,r,z*** …sind abhängig)

H.EBISUI:
2 Dreiecke mit gemeinsamem Um- und Inkreis:
$\exists$ „merkwürdige“ Inzidenzen

Beispiel 5: Poncelet-Porismus

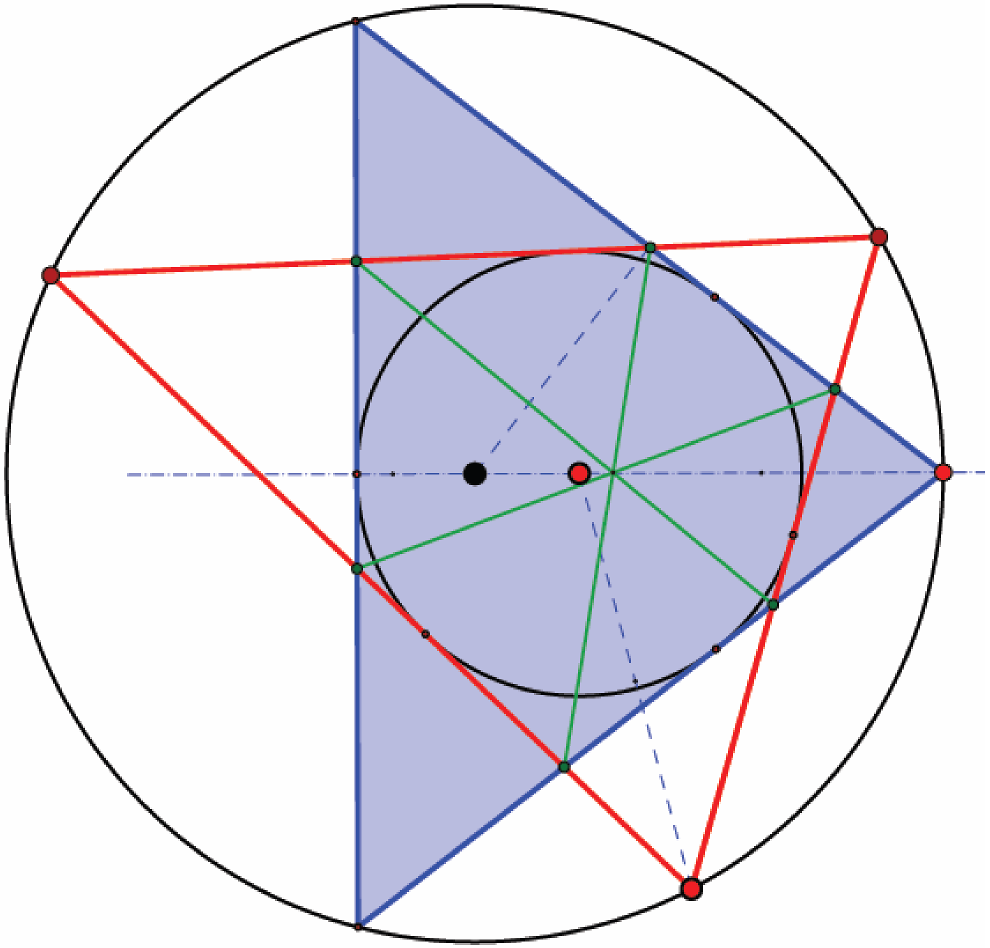
H.EBISUI: 2 Dreiecke mit gemeinsamem Um- und Inkreis: ∃ „merkwürdige" Inzidenzen !!



Wirklich ?

Beispiel 5: Poncelet-Porismus

H.EBISUI: **2 Dreiecke mit gemeinsamem Um- und Inkreis: ∃ „merkwürdige“ Inzidenzen !!**



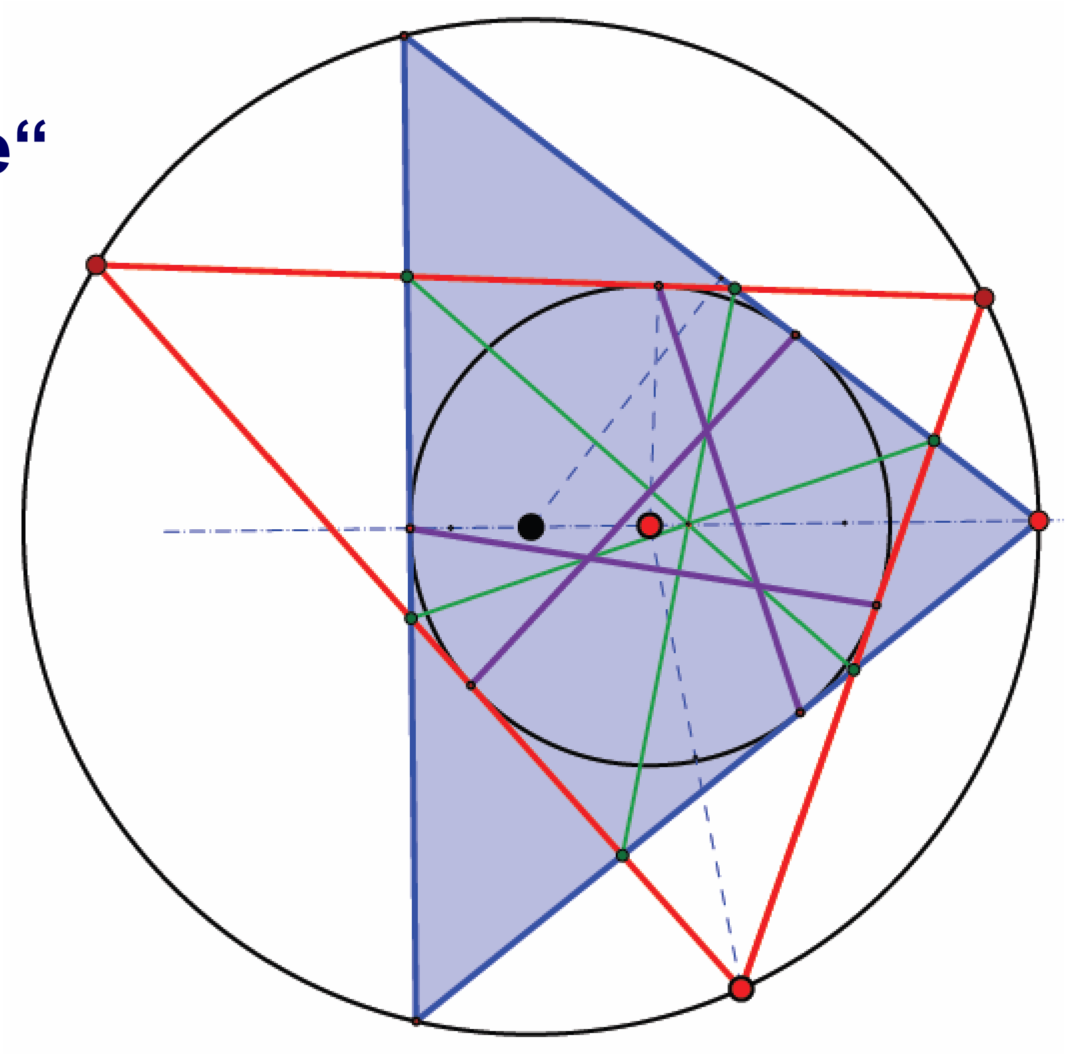
Wirklich ?

Schnittpunkt ist „nur“ BRIANCHON-Punkt der Tangentensechsecks des Inkreises ! ABER …

Beispiel 5: Poncelet-Porismus

ABER….

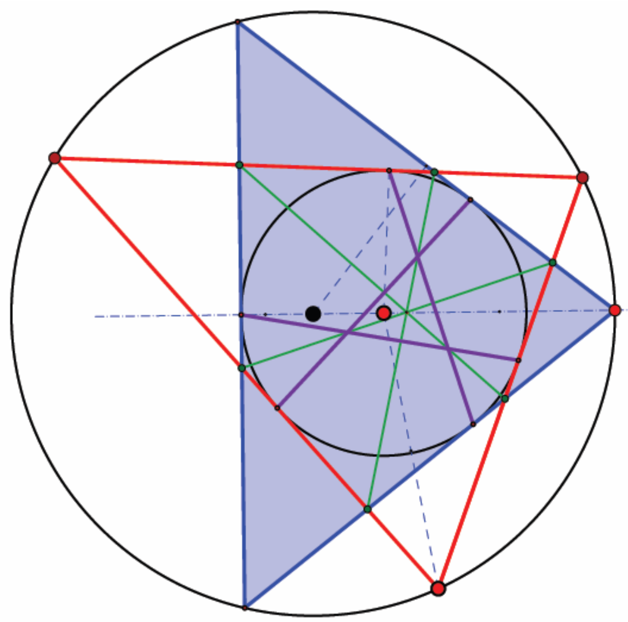
∃ doch „merkwürdige“ Inzidenzen !!

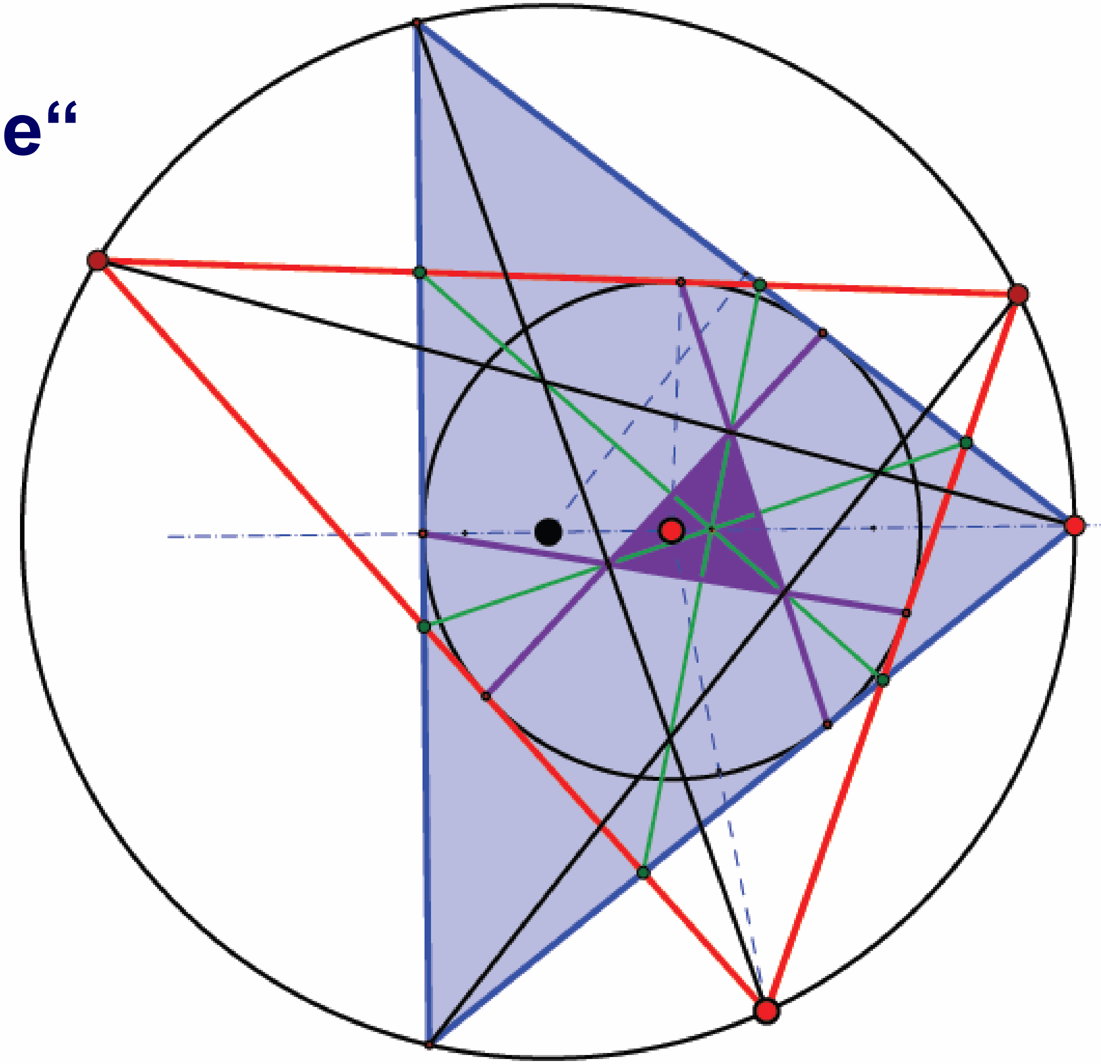


Beispiel 5: Poncelet-Porismus

ABER….

∃ doch „merkwürdige“ Inzidenzen !!

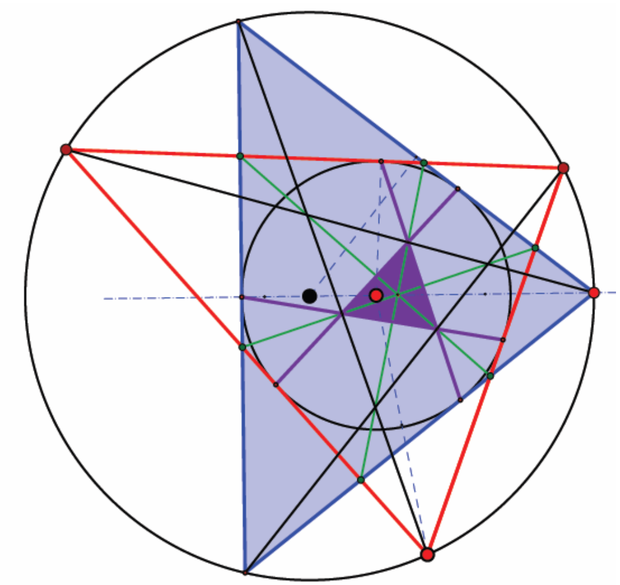


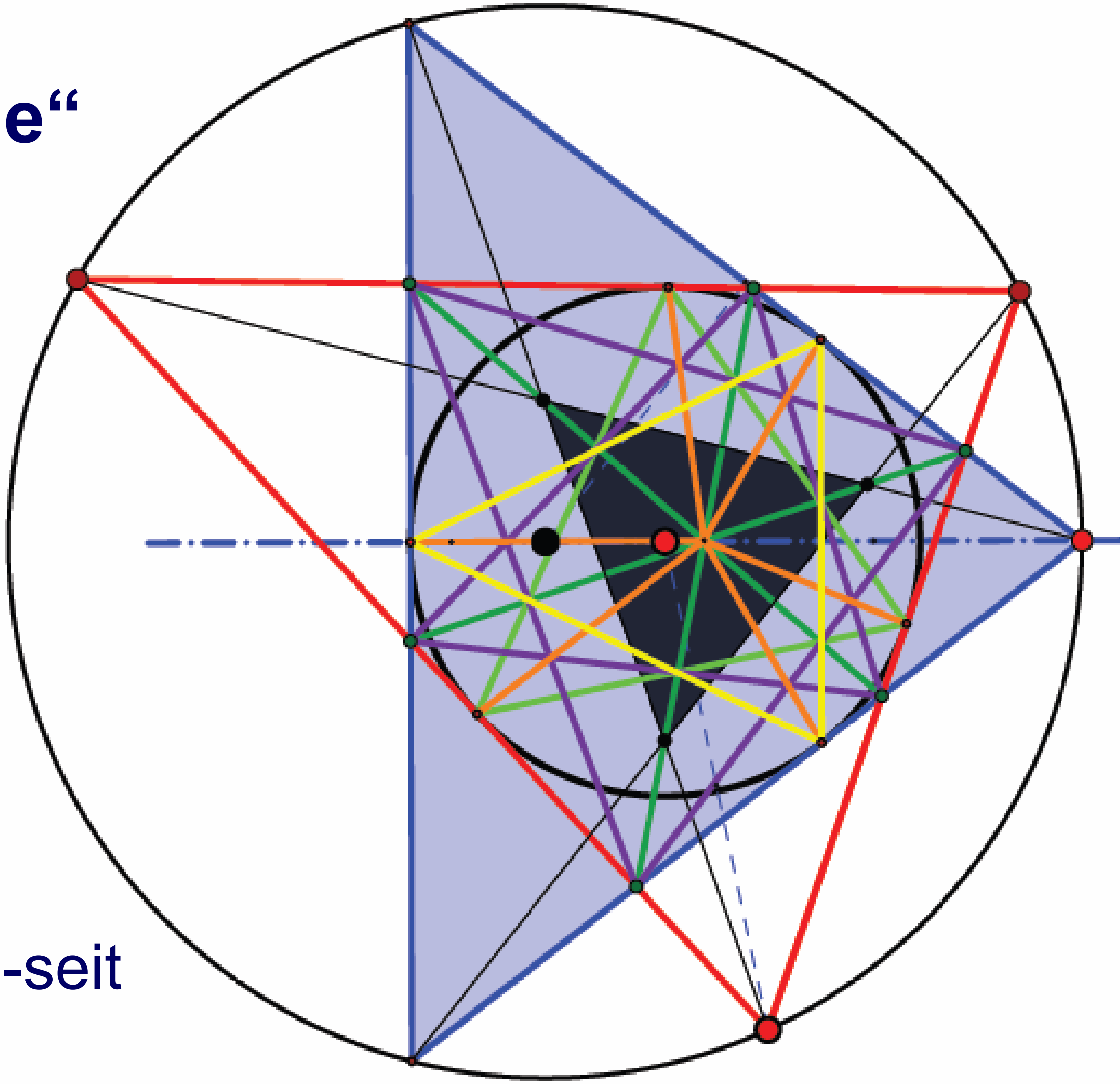


Beispiel 5: Poncelet-Porismus

ABER….

∃ doch „merkwürdige“ Inzidenzen !!



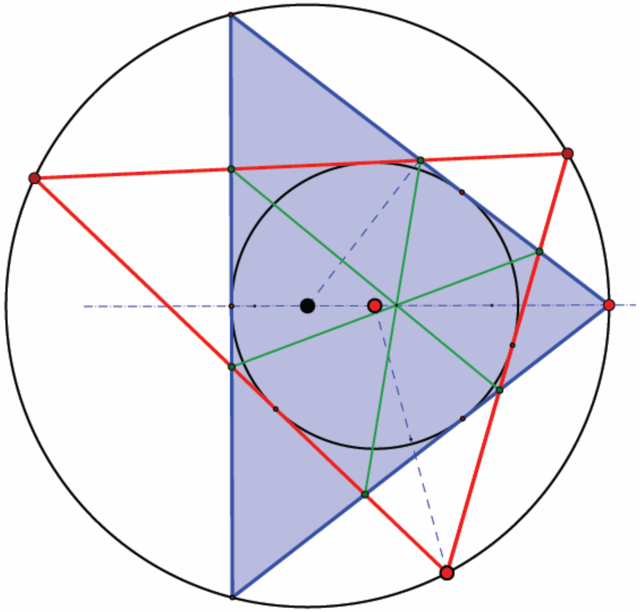


… nur Aussagen für Tgt-6-seit eines Kegelschnittes !!!

Beispiel 5: Poncelet-Porismus

Frage: ∃ 3D-Verallgemeinerungen ?

Gegeben 1 Tetraeder mit Um- und Inkugel,
∃ dazu ein poristisches Problem ? Ist dieses trivial ?



Leider Ja ! Trotzdem interessant !!!

Beispiel 6: EG in nichteukl. Ebenen

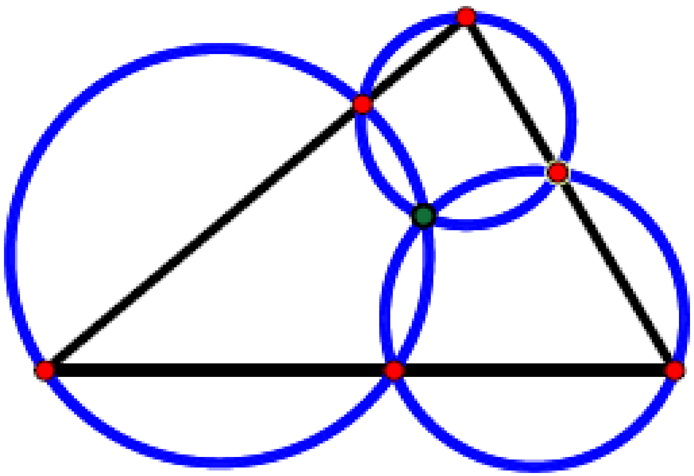
Fragen:

- **Welche eukl. Eigenschaften bleiben erhalten ?**
- **Was ist die “korrekte Formulierung” der Eigenschaften ?**

Z.B.:

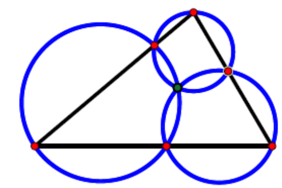
Das Theorem von MIQUEL

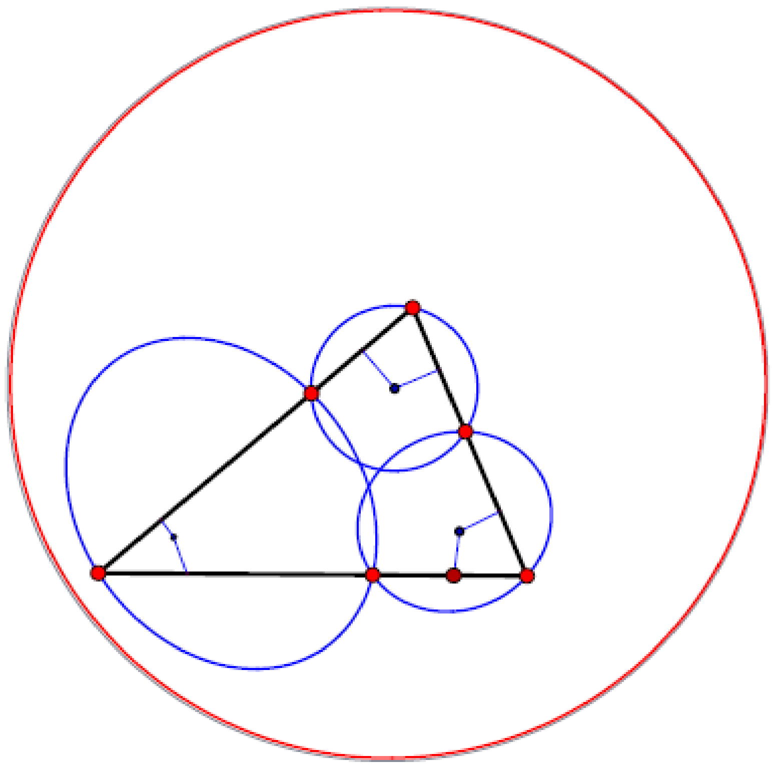
(hat Bedeutung als Axiom in der euklid. Kreisgeometrie)

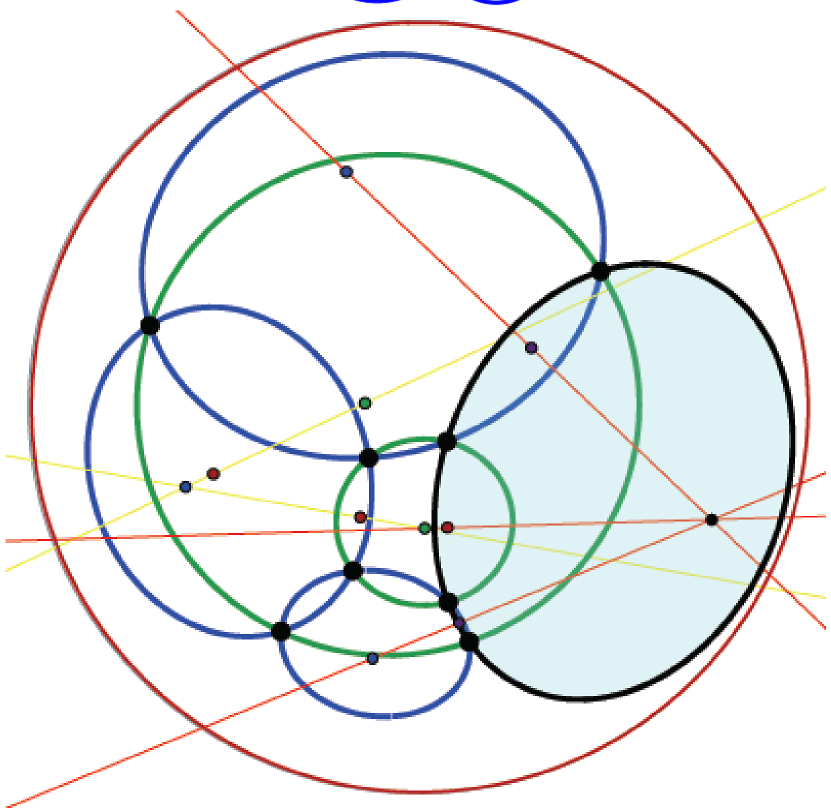


Beispiel 6: EG in nichteukl. Ebenen

Z.B.: Das Theorem von MIQUEL in der hyp. Ebene:







… als Satz der h-Dreiecks-geometrie falsch,

als Satz der h-Kreis-geometrie richtig!

Beispiel 7: Elem. MINKOWSKI Geometrie

"Minkowski Geometrie":=

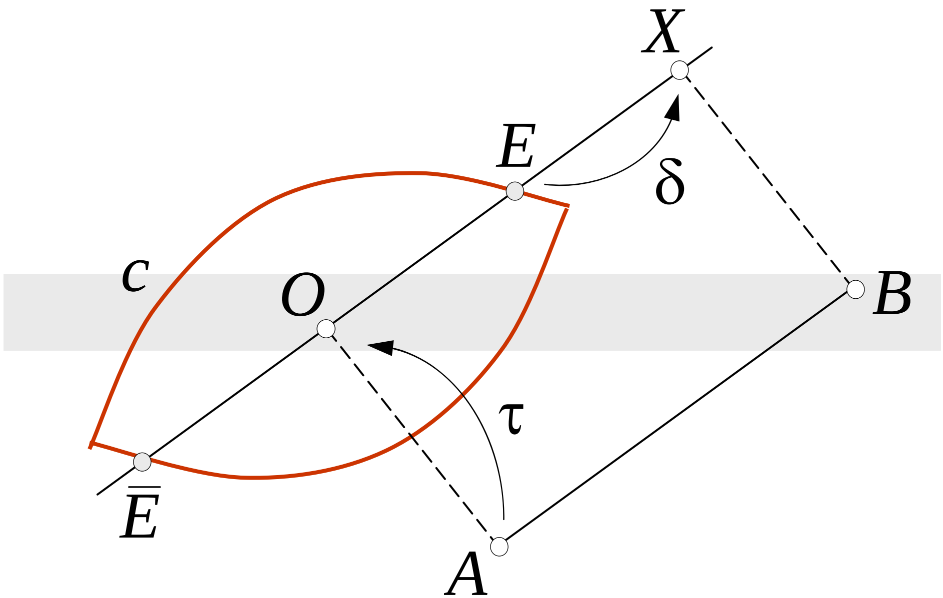
:= Geometrie metrischer Räume,

(eingebettet in einen reellen affinen Raum)

"Metrik":

basiert auf ein konvexes, zentralsymmetrisches Eich-Oval

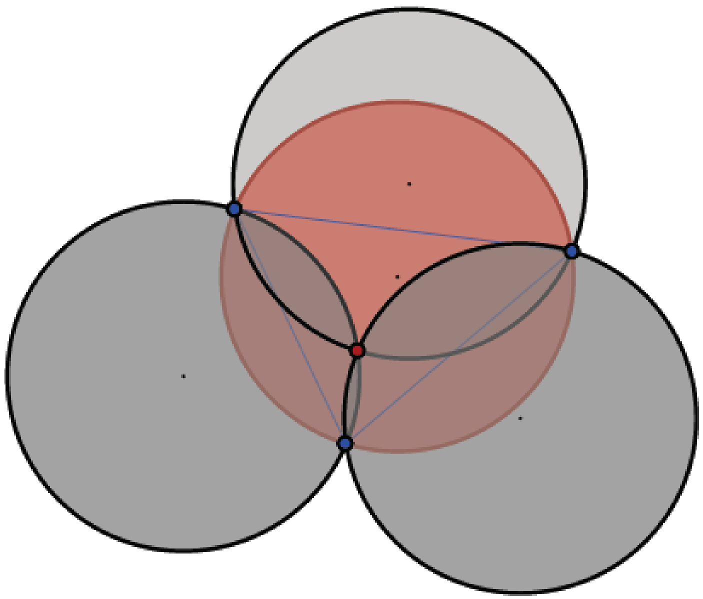
(!! $\cancel{\exists}$ Skalarprodukt !!)

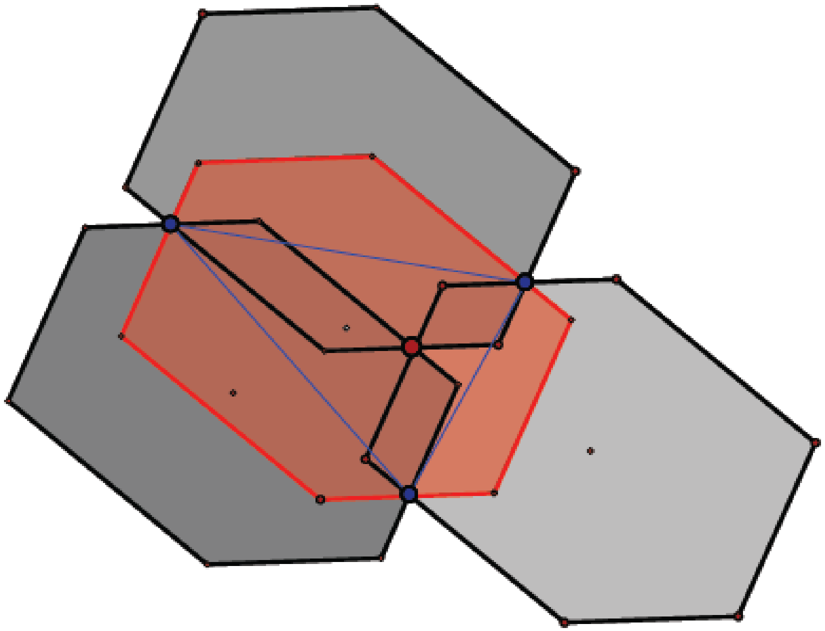


$$\Rightarrow \quad d(AB) = |\mathrm{TV}(X,E,O)| = |\mathrm{TV}(X,\bar{E},O)|$$

Beispiel 7: Elem. MINKOWSKI Geometrie

Z.B.: "Bierdeckel- Theorem (Grünbaum-Shephard)





… ist zur Definition des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks in einer Minkowski-Ebene geeignet.

… und so weiter….

Aus, Ende !

Danke