Geometrie - schräg

ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ ΜΟΥ ΤΗΝ ΣΤΕΓΗΝ
Platon, Aufschrift am Eingang zu seiner Akademie

Es gibt keinen Königsweg zur Geometrie".
Dies war, so berichtet Proklos, die Antwort Euklids auf die Frage von König Ptolemaios I., ob es einen leichteren Weg zur Geometrie gäbe als das Studium der Elemente.

Wer die Geometrie begreift, vermag in dieser Welt alles zu verstehen.
Galileo Galilei

Es gibt nicht nur euklidische und nichteuklidische, sondern noch viele weitere Geometrien.

In allen gibt es

- **Punkte** und **Geraden** und
- **Beziehungen** zwischen ihnen, festgelegt durch Axiome,
- aus denen weitere **Definitionen** und **Sätze** abgeleitet werden.
- Und schließlich noch **Abbildungen** und
- **Größen**, die unter den Abbildungen **invarian**t sind.

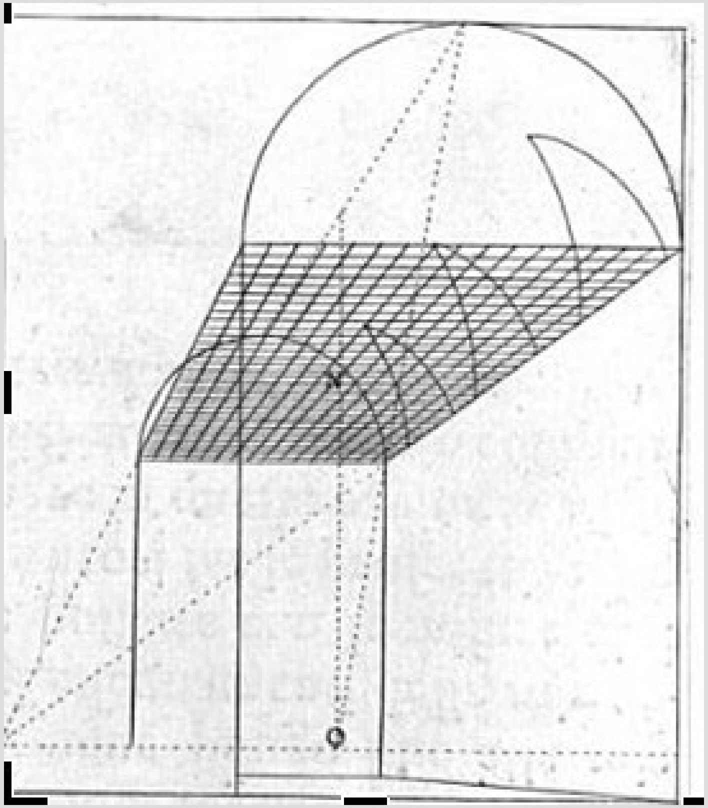
Und fertig ist die Geometrie

Bemerkung zu Amon/ Wittmann

Andrea Pozzo (1642-1709), ab 1702 in Wien
"Prospettiva de' pittori, e architetti"
gewidmet unserem Römischen Kaiser und Deutschen König Leopold I., und Joseph I.
Berühmtestes Werke in Wien: Scheinkuppel der Jesuitenkirche. Sein Buch ist ein richtiges Lehrbuch der Perspektive, mit 102 Abschnitten und wunderschönen Konstruktionen, die ausführlich kommentiert werden, (Gemisch aus Latein und Italienisch).
Jedenfalls verwendet er gerne die Perspektive von Grund- und Aufriss, aus denen er dann den Hauptriss konstruiert."

Bemerkung zu Amon/ Wittmann

Viele seiner Fresken stellen gigantische Scheinarchitekturen dar, die in der Regel auf tonnengewölbte (oder auch flachere) Decken aufgetragen wurden.
Dazu konstruierte er
- zuerst eine ebene Perspektive (davon handeln seine Lehrbücher),
- überzog sie mit einem Raster
- und projizierte diesen dann aus demselben Augpunkt auf den Zylinder.



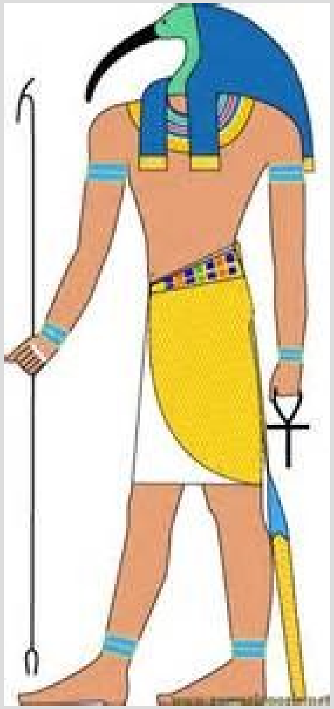
Überblick - Inhaltsverzeichnis

- Anfang von Mathematik & Geometrie, „Elemente“ des Euklid,, Axiomensysteme, Aufbau der Geometrie
- Inversion, Konstruktionen, Hohlwelttheorie
- Nichteuklidische Geometrie: mit/ohne Parallelenaxiom, Modelle, Absolute Geometrie
- Hyperbolische Geometrie, Konstruktionen in verschiedenen Modellen, Pflasterungen (Escher)
- Elliptische Geometrie, Konstruktionen
- Pseudoeuklidische Geometrie, Lorentztransformationen, Konstruktionen in der Minkowski Ebene
- C-Geometrie, Zyklographie
- Galilei Geometrie, Konstruktionen

Quellen:
dg.schule.at - klassische Fachgebiete
jedes Fachgebiet enthält eine große Zahl kommentierter Literatur

Wie alles angefangen hat

Herodotos II,109 (ca. -460)
Auch sagten sie, daß der König Sesostris das Land unter alle Ägypter so verteilt habe, daß er jedem ein gleich großes Viereck gegeben und von diesem seine Einkünfte bezogen habe, indem er eine jährlich zu entrichtende Steuer auferlegte. Wem aber der Fluß von seinem Teil etwas wegriß, der mußte zu ihm kommen und das Geschehene anzeigen; er schickte dann die Aufseher, die auszumessen hatten, um wieviel das Landstück kleiner geworden war, damit der Inhaber von dem übrigen nach dem Verhältnis der auferlegten Abgaben Steuer zahle.H ieraus scheint mir die Geometrie entstanden zu sein. die von da nach Hellas kam.

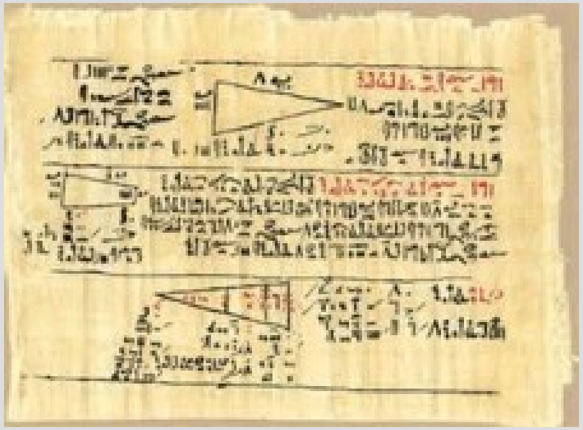


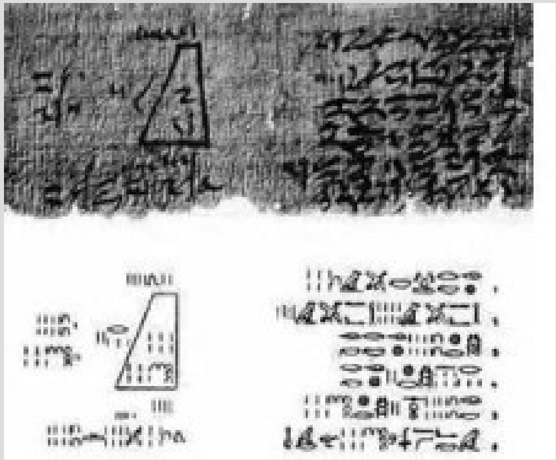
Platon, Phaidros:
(Sokrates sagt)
»Ich habe vernommen, zu Naukratis in Aegypten sei einer der dortigen alten Götter gewesen, dem auch der Vogel geheiligt ist, den sie Ibis nennen, während der Gott selbst den Namen Teuth führt; dieser habe zuerst Zahlenlehre und Rechenkunst erfunden und Geometrie und Astronomie«

Papyrus Rhind, Moskauer Papyrus

Moskauer Papyrus
(-1850)
Sammlung von insgesamt 25 Rechenaufgaben, vermutlich eine Prüfungsarbeit
Aufgabe 10 behandelt die Berechnung einer Korboberfläche (Halbkugel) mit π=3.16
Aufgabe 14: Volumen des Pyramidenstumpfes (exakt)

Papyrus Rhind
(-1550)
eine altägyptische Abhandlung zu verschiedenen mathematischen Themen (Arithmetik, Algebra, Geometrie, Trigonometrie und Bruchrechnung), geometrische Probleme, Rauminhalte und Flächeninhalte, Verhältnis von Höhe zu Seite einer Pyramide als deren Neigung, Berechnung der Kreisfläche mit π=3.16





Στοιχεία του Ευκλείδη

1. Von den Definitionen bis zum Satz des Pythagoras
2. Geometrische Algebra
3. Kreislehre
4. Vielecke
5. Irrationale Größen
6. Proportionen
7. Teilbarkeit und Primzahlen
8. Quadrat-, Kubikzahl und geometrische Reihen
9. Geometrie für inkommensurable Größen
10. Elementares zur Raumgeometrie
11. Exhaustionsmethode
12. Die fünf regelmäßigen Körper
13. Ein Buch des Hypsikles
14. Ein Buch des Damaskios

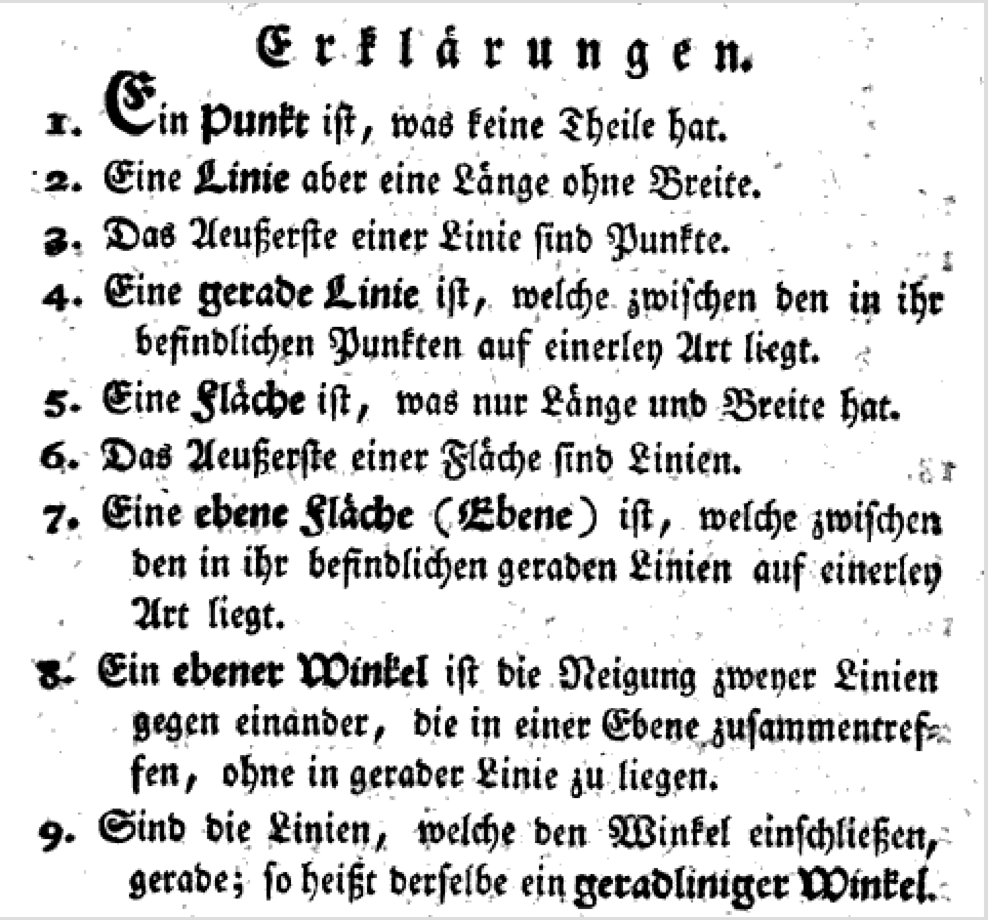
Die Schule von Athen
(Stanzen, Vatikan, Raffael)

Ὅροι (υποδεσειν)

Definitionen:
das, was der Lernende nicht sofort begreift, aber doch zugibt. Es gibt insgesamt 23 davon

Beispiele:

(1) Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
(2) Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.



Erklärungen.

1. Ein **Punkt** ist, was keine Theile hat.
2. Eine **Linie** aber eine Länge ohne Breite.
3. Das Aeußerste einer Linie sind Punkte.
4. Eine **gerade Linie** ist, welche zwischen den in ihr befindlichen Punkten auf einerley Art liegt.
5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Das Aeußerste einer Fläche sind Linien.
7. Eine **ebene Fläche** (**Ebene**) ist, welche zwischen den in ihr befindlichen geraden Linien auf einerley Art liegt.
8. Ein **ebener Winkel** ist die Neigung zweyer Linien gegen einander, die in einer Ebene zusammentreffen, ohne in gerader Linie zu liegen.
9. Sind die Linien, welche den Winkel einschließen, gerade; so heißt derselbe ein **geradliniger Winkel**.

Αξιωματα (Κοιναὶ Ἔνοιαι)

Gemeinbegriffe, Axiome:
das, was dem Lernenden bekannt und glaubwürdig erscheint

Axiome präzisieren den Begriff „gleich“.
Unter heutigem Gesichtspunkt, wie dies auch Hilbert getan hat, würden wir die Postulate und Axiome zusammen als Axiome bezeichnen

Grundsätze.

1. Was Einem und demselben gleich ist, ist einander gleich.
2. Gleichem Gleiches zugesetzt, bringt Gleiches.
3. Von Gleichem Gleiches weggenommen, läßt Gleiches.
4. Ungleichem Gleiches zugesetzt, bringt Ungleiches.
5. Von Ungleichem Gleiches weggenommen, läßt Ungleiches.
6. Gleiches verdoppelt, giebt Gleiches.
7. Gleiches halbirt, giebt Gleiches.
8. Was einander deckt, ist einander gleich.
9. Das Ganze ist größer als sein Theil.
10. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
11. Zwey gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die beiden innern an einerley Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwey rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.

Αἰτήματα

Forderungen
(lat.: **Postulate**):

das, was dem Lernenden weder bekannt noch einsichtig ist, was aber vom Lehrenden übernommen wird

(Fünf) Postulate, also Forderungen, die an die Geometrie gestellt werden, Aussagen, die von der Geometrie gefordert werden und damit als wahr angenommen werden

Forderungen.

1. Es sey ein- für allemal gefordert, von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen;
2. desgleichen, eine begränzte gerade Linie stetig gerade fort zu verlängern;
3. desgleichen, aus jedem Mittelpunkte und in jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben.

4. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
5. Zwey gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die beiden innern an einerley Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwey rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.

Der Königsweg

Aufbau des Textes:

die „Propostionen" gliedern sich in

Lehrsätze = θεωρηματα
mit folgendem Beweis und

Aufgaben = προβληματα,
mit anschließender Lösung

Alle enden mit:

ὅπερ ἔδει δεῖξαι
(quod erat demonstrandum)

ὅπερ ἔδει ποιῆσαι
(quod erat faciendum)

Jede Proposition weist folgende Gliederung auf:

Προτασις
(Satz, Aufgabenstellung)

Εκθεσις
(Voraussetzungen)

Διορισμος
(Ziel)

Κατασκευη (Vorgangsweise)

Αποδειξις
(Beweis)

Σουμπερασμα
(Zusammenfassung)

Axiomensysteme

Zwei Kategorien von Begriffen:

- **undefinierte Grundbegriffe** (z.B. Punkte, Gerade, Ebenen):
- Inhalt durch die Axiome bestimmt
- **definierte Begriffe:** für die auf der Basis der Grundbegriffe Definitionen angegeben werden

zwei Kategorien von Aussagen:

- **Axiome:** unbewiesene Grundaussagen
- **Sätze:** Aussagen, die aus den Axiomen auf logischem Wege abgeleitet werden.

Verschiedene Axiomensysteme, z.B.

- Euklid
- Hilbert
- Kolmogorof

I: Inzidenzaxiome
II: Abstandsaxiome
III: Anordnungsaxiome
IV: Bewegungsaxiom
V. Parallelenaxiom

Hilbert soll einmal gesagt haben, man könne statt „Punkte, Geraden und Ebenen“ jederzeit auch „Tische, Stühle und Bierseidel“ sagen; es komme nur darauf an, dass die Axiome erfüllt sind.

Absolute Geometrie

Axiome I-V: **Euklidische** Geometrie
Axiome I-IV: **Absolute** Geometrie
(also KEIN Parallelenaxiom).
Beispiel: Satz 1-28 von Euklid's Elementen, z.B.

Satz I.1 (ein Problem):
Es sei die gerade Strecke AB gegeben. Es soll auf AB ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden

Die Axiome der absoluten Geometrie sind Teil der euklidischen und der hyperbolischen Geometrie.

Hyperbolische Geometrie
Ersatz des Parallelenaxioms durch das von Lobatschewski
Es existiert eine Gerade g und ein nicht auf g liegender Punkt P, durch den **mindestens zwei Geraden** verlaufen, **die g nicht schneiden**

Elliptische Geometrie
Ist g eine Gerade und P ein Punkt außerhalb dieser Geraden, dann existiert **keine Gerade** h in der Ebene durch g und P, **die g nicht schneidet.**

Sätze der absoluten Geometrie

Gelten in der euklidischen **und** in der hyperbolischen Geometrie (Auswahl)

- Kongruenzsätze SSS, SWS, WSW, WWS, SSW
- Haben zwei Seiten-Symmetralen/ Höhen eines Dreiecks einen Schnittpunkt, so geht auch die dritte durch diesen Punkt.
- In einem Dreieck kann höchstens ein Innenwinkel nicht spitz sein.
- Die drei Innenwinkelhalbierenden schneiden einander
- Größerer Winkel ⇔ größere Seite und umgekehrt.
- Dreiecksungleichung.
- Schwacher Außenwinkelsatz: jeder Außenwinkel größer als jeder nicht anliegende Innenwinkel
-

Saccheri Viereck ABCD wird gerne für Beweise verwendet:

Basis a=1, Winkel α,β =90°, Seiten b=d=1

Dann ist $\gamma+\delta<180°$, =180° oder >180° je nach Geometrie (äquivalent zu den Parallelenpostulaten)

Die Inversion

Die Inversion ist Sonderfall der sog. **Möbius-Transformationen** der komplexen Ebene, d.s. linear gebrochene Abbildungen

$$w=\frac{a*z+b}{c*z+d}$$

Eigenschaften:

- Winkeltreu
- Kreistreu (genauer: Kreis + Geraden-treu)
- Doppelverhältnistreu (a,b,u,v sind komplexe Zahlen bzw. Punkte):)

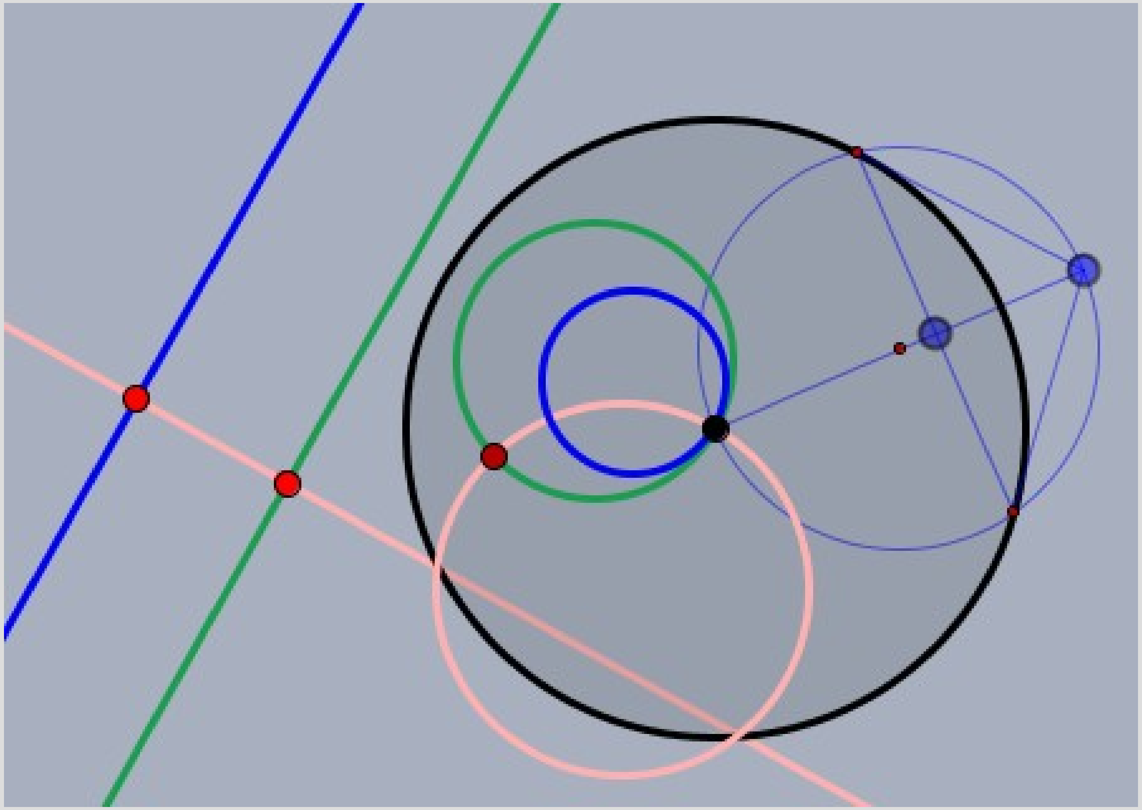
$$DV=\frac{a-u}{a-v}:\frac{b-u}{b-v}$$

Sonderfall: **Inversion**
(z' … konjugiert zu z)

$$w=\frac{1}{z'}$$

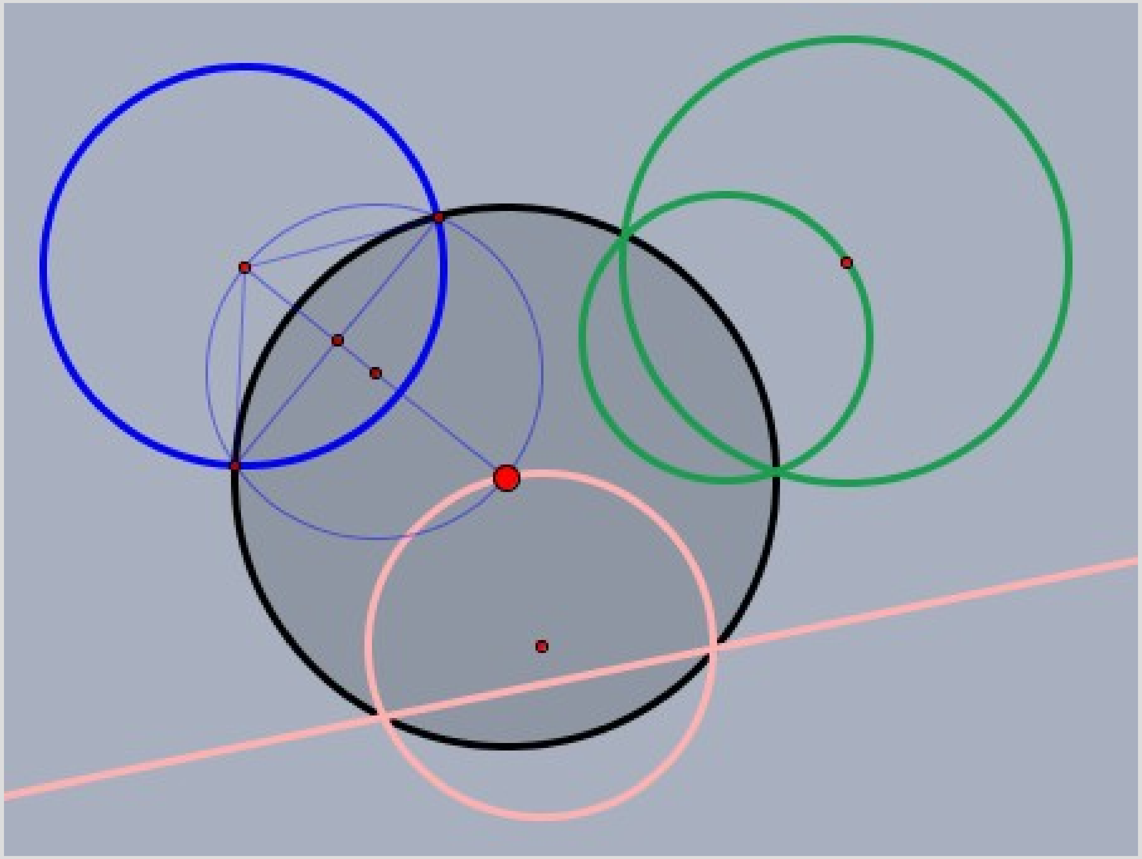
Inversion am reellen Kreis

- Konstruktion (rechts) mit Hilfe der Polaren Abbildungsgleichung folgt aus Kathetensatz
- Gerade geht in Kreis durch den Mittelpunkt O des Inversionskreises über (rosa)
- **Fixpunkte**: alle Punkte des Inversionskreises
- Paralele Gerade: Bilder berühren einander in O (blau und grün)



Fixelemente

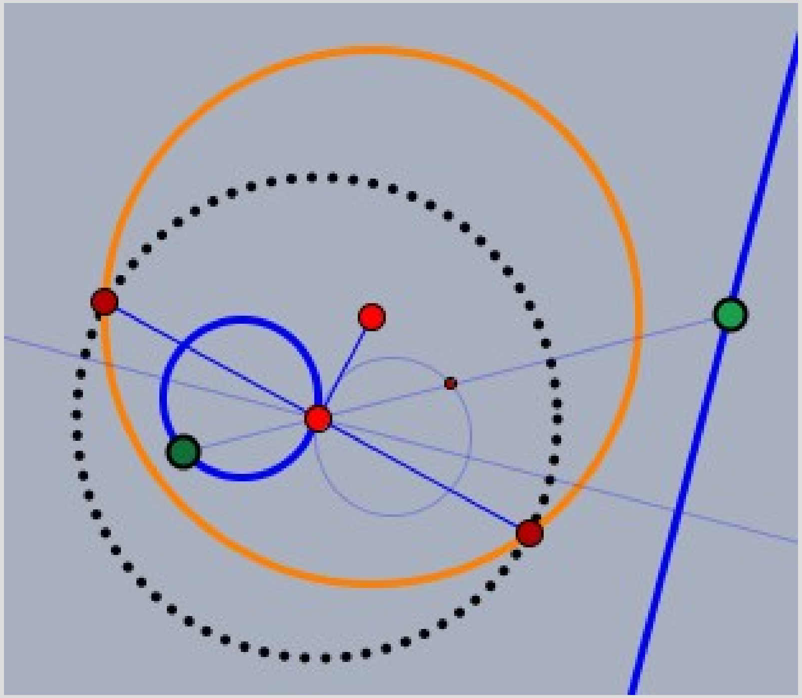
- **Fixpunkte**: alle Kreispunkte (schwarz)
- **Fixgerade**: Gerade durch O
- **Fixkreise**: Orthogonalkreise (blau)
- Rosa: Kreis durch O ⇔ Gerade
- Grün: Inversion eines Kreises
- die Inversion ist involutorisch $Inv^2 = Id$



Inversion am nullteiligen Kreis

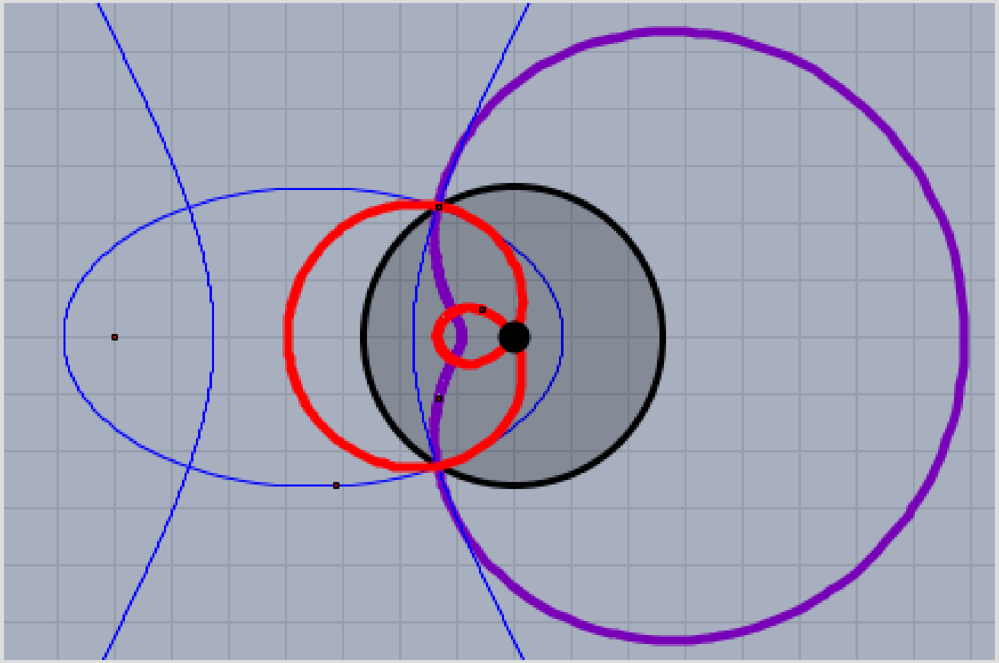
- Man kann auch an einem nullteiligen Kreis invertieren
- Konstruktiv: Inversion am reellen Vertreterkreis und Spiegelung an O (grün)
- Keine reellen **Fixpunkte**
- **Fixkreise**: Diametralkreise (orange), Durchmesser
- Inversion einer Geraden (blau)

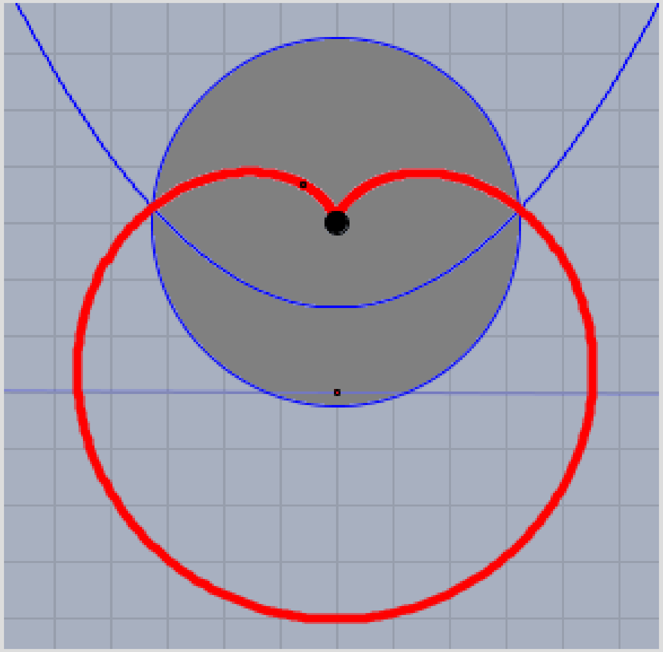
$$w = \frac{-1}{z'}$$



Inversion von Kegelschnitten

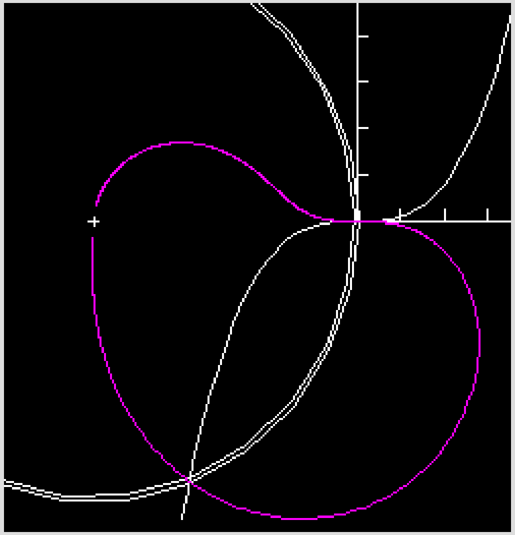
Besondere Ergebnisse erhält man bei Inversion an einem Kreis um den Brennpunkt: verschiedene Formen der **Pascalschnecken**.

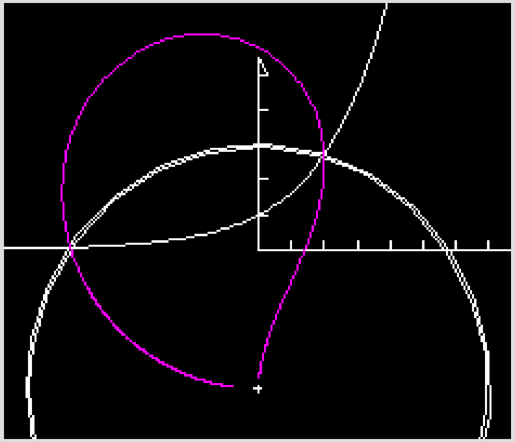


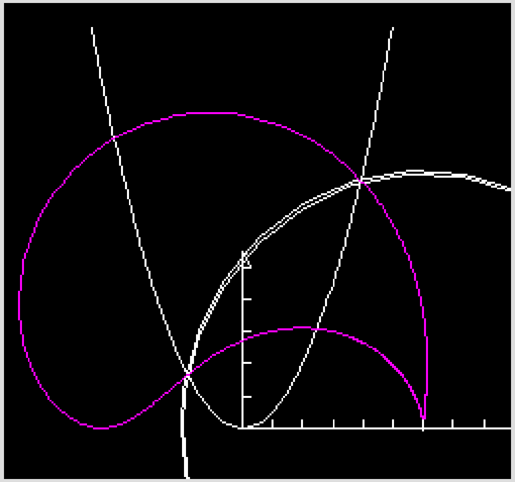


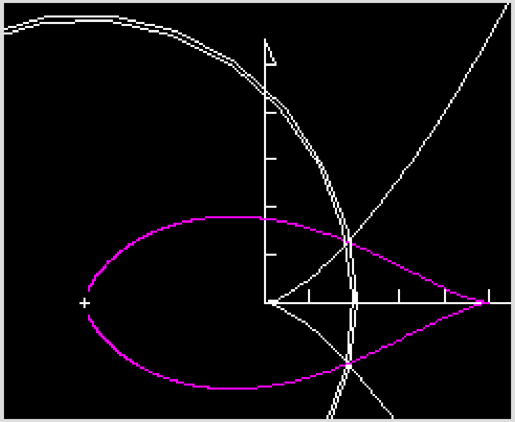
Inversion von Kurven

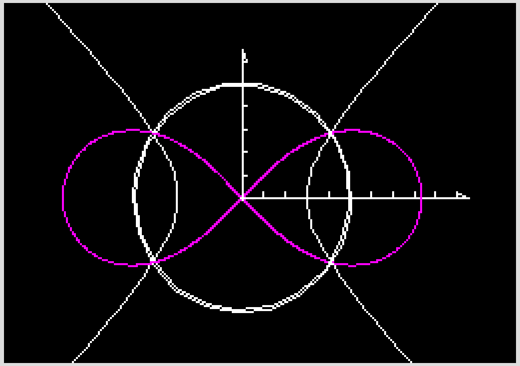
Beispiele
Hyperbel um
konzentrischen Kreis,
Expo-Fktion, Parabel um
beliebigen Kreis, kubische
und Neil'sche Parabel







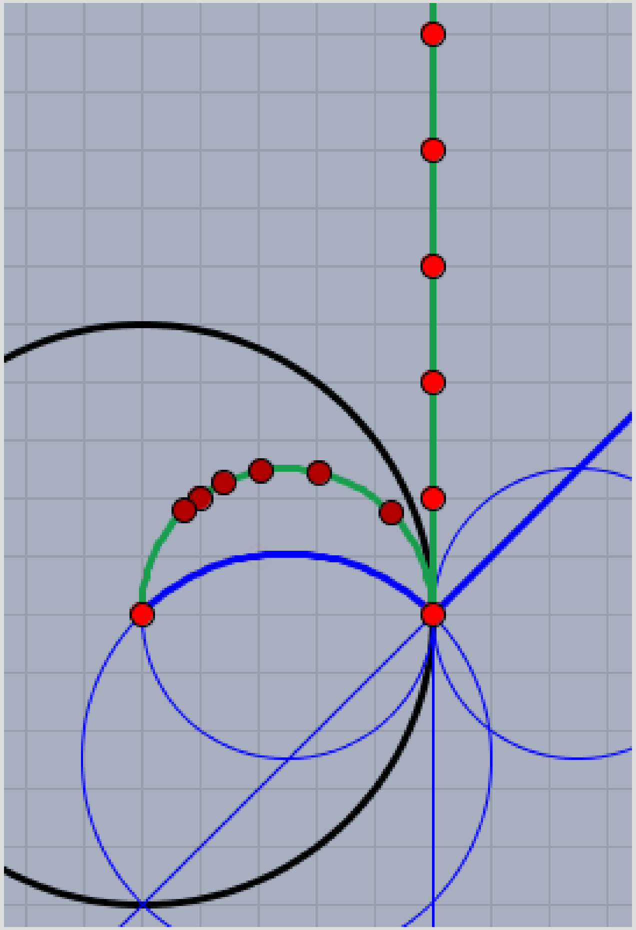




Die Hohlwelttheorie

Veraltete (?) wissenschaftliche (?) Theorie, der zufolge die Erde nicht ein massiver Kugelkörper, sondern eine Hohlkugel ist, der Erdkern und (größtenteils) der Erdmantel also nicht existieren.

Licht breitet sich in diesem Weltbild nicht geradlinig sondern auf Kreisbahnen aus, die Lichtgeschwindigkeit ist nicht konstant, sondern nimmt zum "Kern" hin quadratisch zu. (Anm.: stimmt so nicht, der Maßstab ändert sich!!)



In Wissenschaft und Literatur

Einige Vertreter aus der Wissenschaft

- Begründer der ersten Theorie auf wissenschaftlicher Grundlage: Edmond Halley 1692
- Leonhard Euler diskutierte in einem Gedankenexperiment in seinen Lettres à une princesse d’Allemagne, ob die Erde (wie auch die anderen Planeten) hohl und von einer inneren „Sonne“ erleuchtet sei

Einige Vertreter aus der Literatur:

- Ludvig Holbergs Roman „Niels Klims unterirdische Reise (1741)“
- Edgar Allan Poes Werk „Arthur Gordon Pym“
- bekannt durch Jules Vernes Roman „Die Reise zum Mittelpunkt der Erde“
- Tarzan-Autor Edgar Rice Burroughs siedelte seinen fiktiven Kontinent „Pellucidar“ ebenfalls in der Innenfläche einer Hohlerde an.

Grundsätze

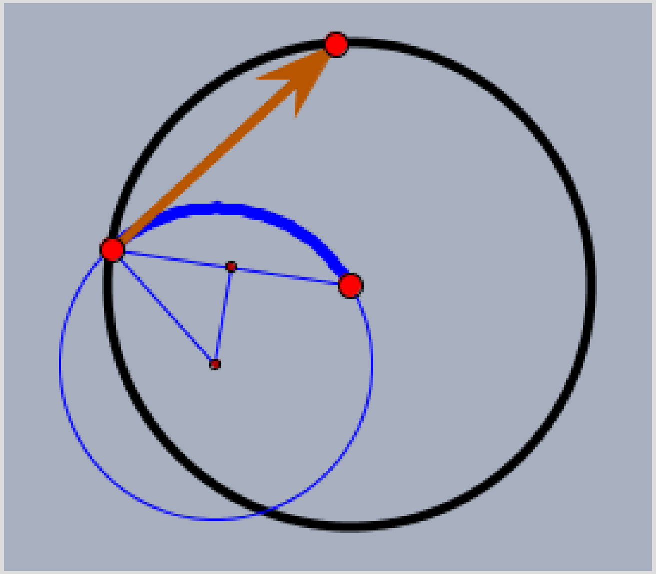
1: Je näher ein Körper dem Mittelpunkt, desto mehr verkürzen sich die Längen. im Mittelpunkt selbst schrumpft jede Länge auf 0.

2: Die Lichtgeschwindigkeit wird desto kleiner, je näher das Licht dem Mittelpunkt kommt, dort ist c = 0.

3: Licht bewegt sich auf einer Kreisbahn, die durch den Mittelpunkt der Hohlwelt führt.

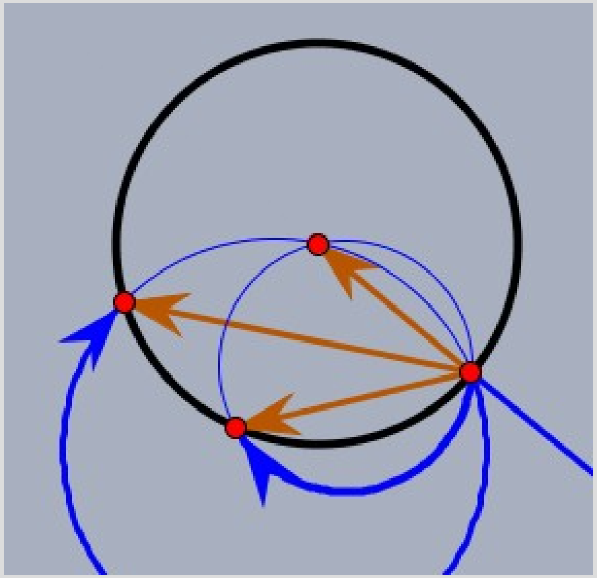
http://ks-lang.de/werner/Annahmen.html

Auch in der Innenwelt sieht man nicht von einem Punkt zu einem anderen (nicht braun sondern blau!!).

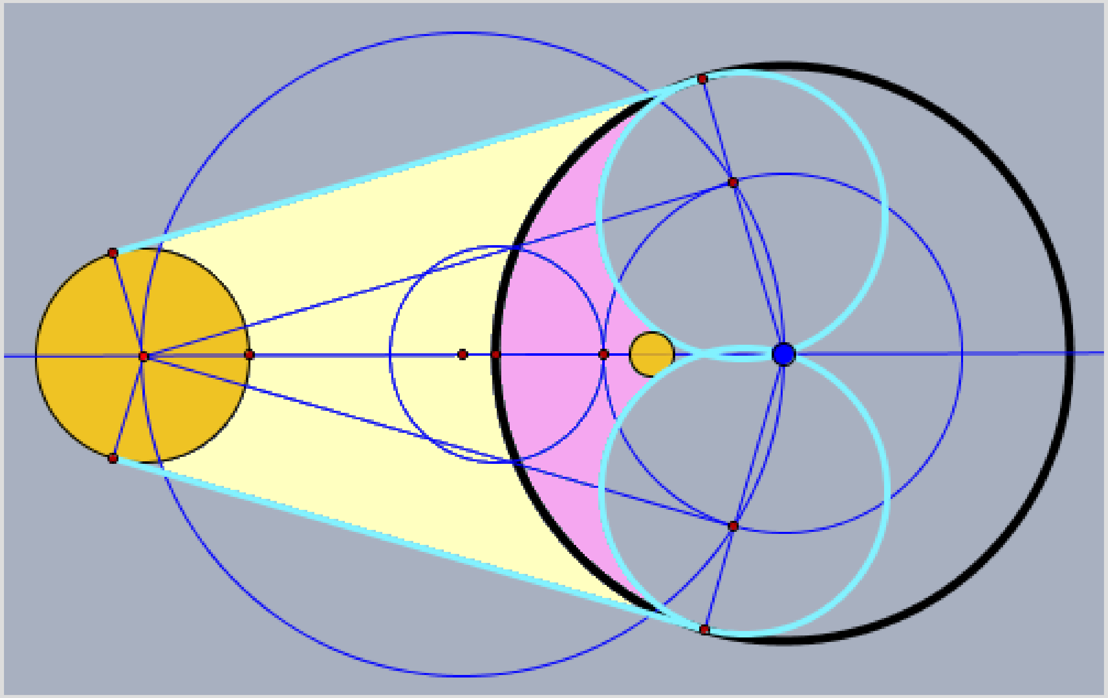


Einige Beispiele

Es werden drei
Löcher gebohrt.
Vollerde: braun,
Hohlwelt: blau

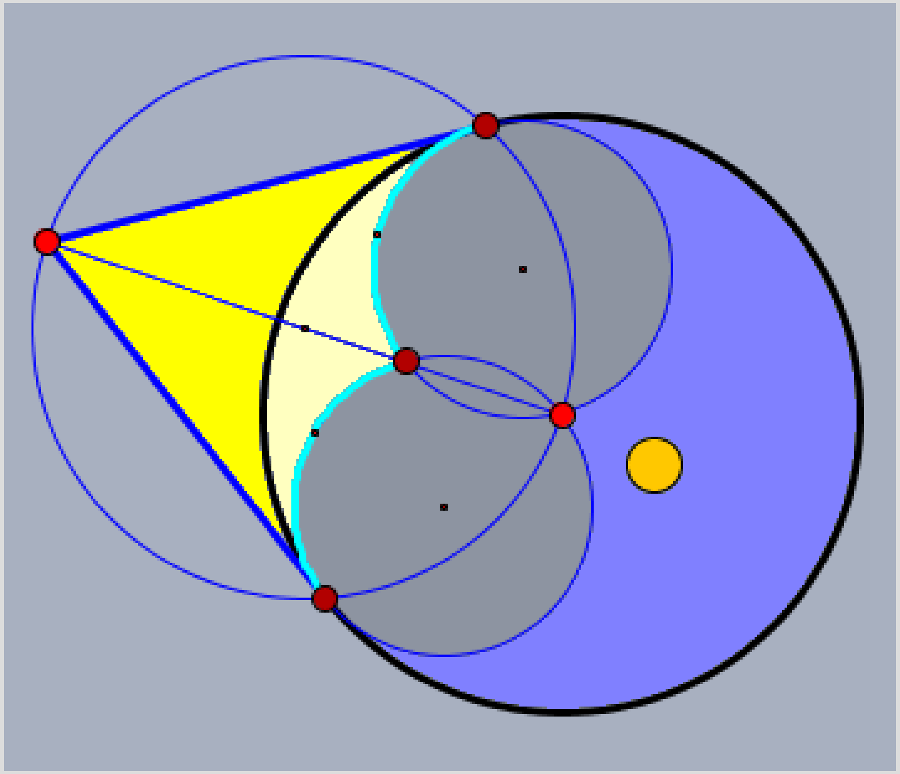


Der von der Sonne
beleuchtete Teil der
Erdoberfläche in
beiden Modellen



Warum sieht man nicht die Antipoden?

Vom Punkt T links sieht man den Teil der Erdoberfläche zwischen den Berührpunkten der Tangenten (gelb)
Invertiert man die Anordnung, so sind jetzt die Sehstrahlen Kreise durch T und O, und die äußersten gehen noch durch die Berührpunkte der Tangenten (hellgelb)
Ganz rechts: der Mond oder die Sonne. Bahnkurve: Kreis um O
Blau: der sichtbare Teil des Himmels



(Nicht-) euklidische Geometrie

Euklidische Geometrie:
NUR sie hat ein ebenes isometrisches Modell.

Elliptische Geometrie:
zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb keine Parallele.
Isometrisches Modell:
Geometrie auf der Kugel.

Hyperbolische Geometrie:
zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb mindestens zwei Parallele.
Isometrisches Modell:
Geometrie auf der Pseudosphäre (im Minkowski-Raum)

Kugel- & Hyperboloid Modell

Obere Hälfte eines zweischaligen Drehhyperboloides $x^2+y^2-z^2=-1$ (**Kugel, r=i**).
Eingebettet in den Minkowski-Raum mit dem Skalarprodukt:
$(x,y,z).(u,v,w) = xu+yv\mathbf{-}zw$ und der Norm $|X|=x^2+y^2-z^2$

Punkte = Punkte der Fläche
Geraden = Schnitte mit Durchmesserebenen (Hyperbeln)

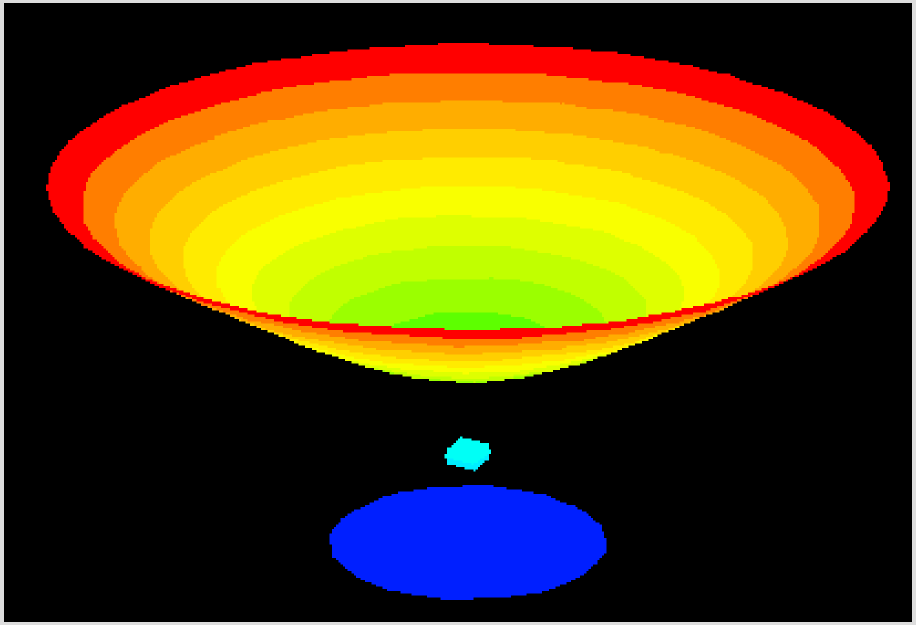
Entfernung zweier Punkte:
Cosh d=(P.Q)
gemessen als Minkowski Länge des Großhyperbelbogens PQ

Oberen Hälfte einer **Kugel r=1**.
Eingebettet in den Euklidischen Raum mit dem Skalarprodukt:
$(x,y,z).(u,v,w) = xu+yv\mathbf{+}zw$ und der Norm $|X|=x^2+y^2+z^2$
Punkte = Kugelpunkte
Geraden = Schnitte mit Durchmesserebenen (Kreise)

Skalarprodukt:
$(x,y,z).(u,v,w) = xu+yv\mathbf{+}zw$
Entfernung zweier Punkte:
Cos d=(P.Q)
gemessen als euklidische Länge des Großkreisbogens PQ

Hyperboloid Modell ⇔ Beltrami-Klein Modell

Man geht aus von der oberen Schale eines zweischaligen Drehhyperboloides.
Punkte = Punkte der Fläche
Gerade = Schnitte mit Durchmesserebenen (Hyperbeln).



Projiziert man die Fläche aus dem Mittelpunkt auf die Ebene z=-1 (d.h. mit einer Art **gnomonischer Projektion**), so erhält man das **Beltrami-Klein** Modell.
Horizontkreis=Bild des Fernkreises des Hyperboloides.

Daher sind die „Geraden“ im Modell **Sehnen** des Kreises

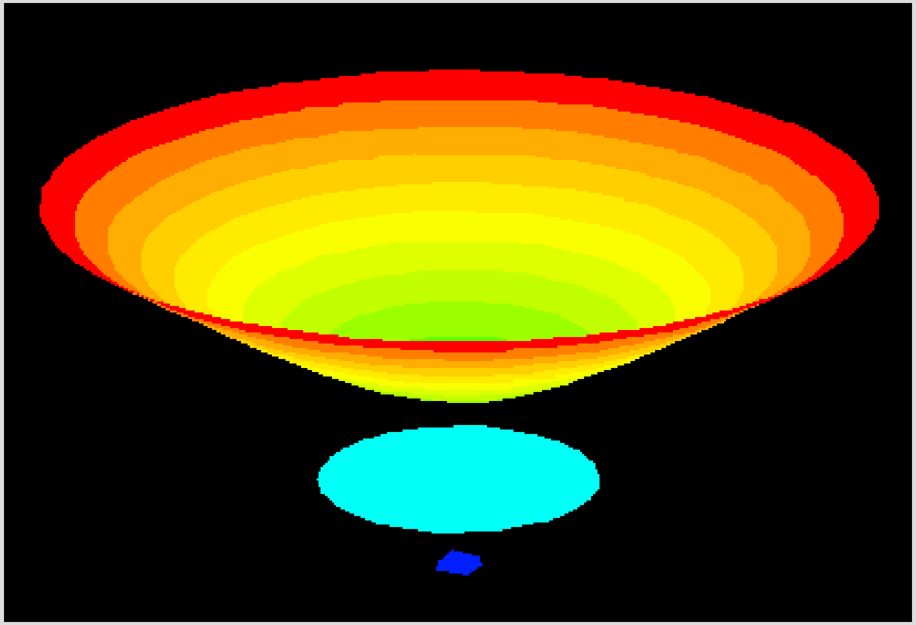
Hyperboloid Modell ⇔ Poincaré Modell

Man geht aus von der oberen Schale eines zweischaligen Drehhyperboloides.

Punkte = Punkte der Fläche
Gerade = Schnitte mit Durchmesserebenen (Hyperbeln).

Projiziert man aus dem Punkt Z(0,0,-1) auf die Ebene z=0 (entspricht der **Stereographischen Projektion**), so erhält man das **Poincaré Modell**
Horizontkreis=Bild des Fernkreises des Hyperboloides.

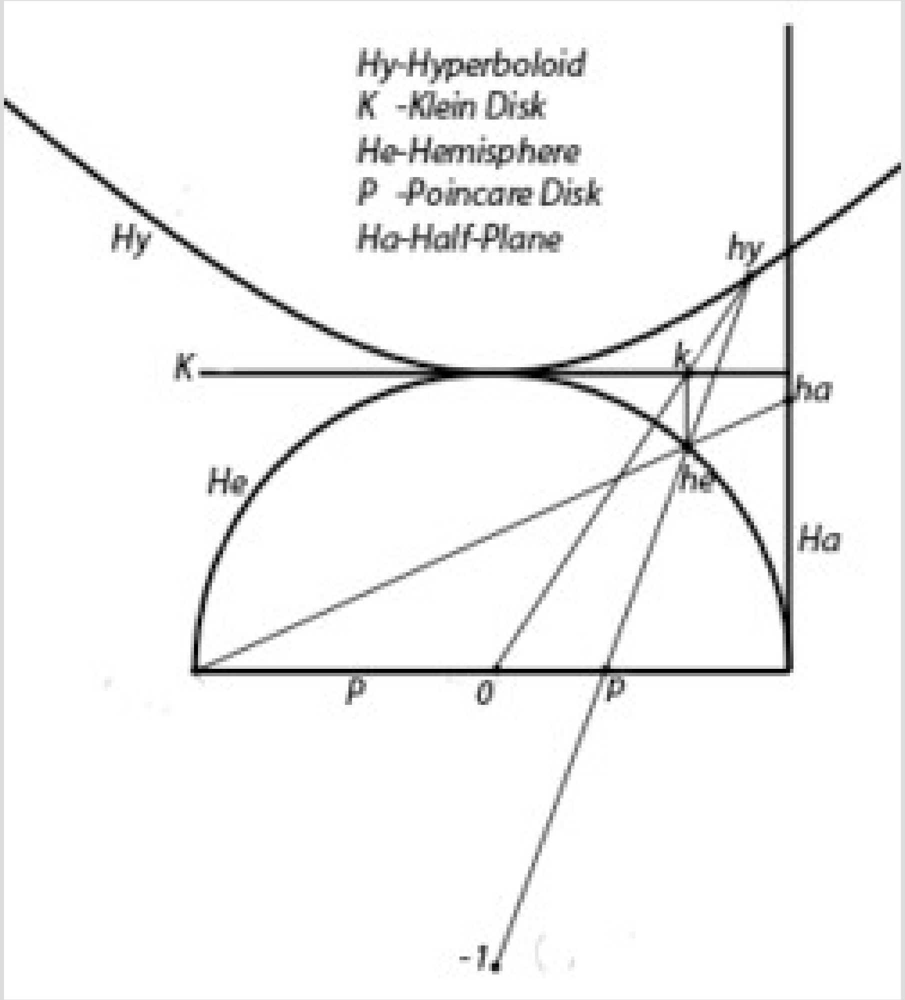
Daher sind die „Geraden" des Modelles **Orthogonalkreise**.



Zusammenhang zwischen allen Modellen

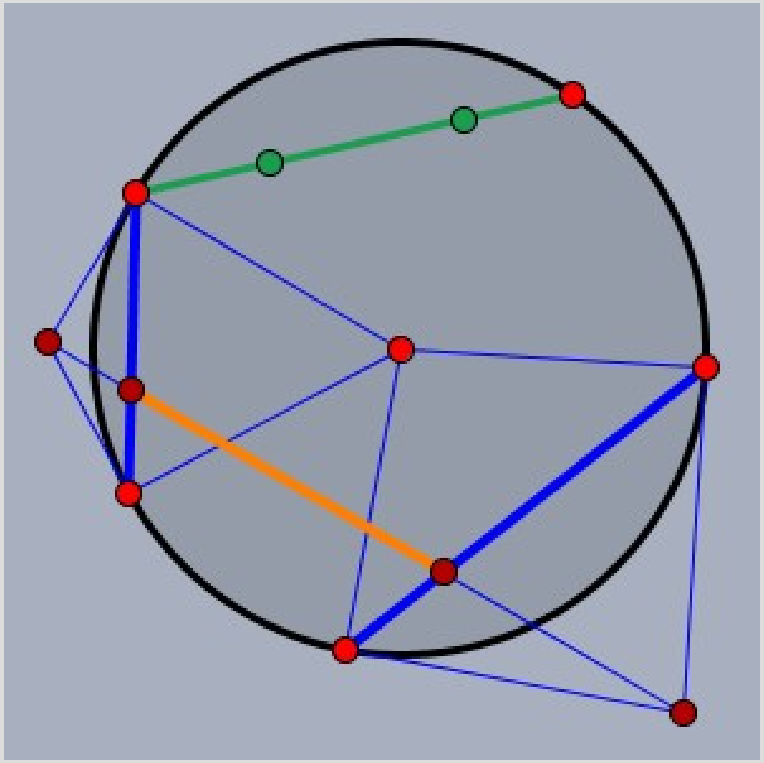
Hyperboloid Modell ⇔ stereographisch aus (0,0,-1) auf z=0 ⇔ Poincare Kreismodell

Hyperboloid Modell ⇔ aus O auf z=1 gnomonisch ⇔ Beltrami-Klein Modell ⇔ orthogonal auf z=1 ⇔ Kugelmodell ⇔ stereographisch aus (-1,0,0) auf x=1 ⇔ Poincare Halbebene



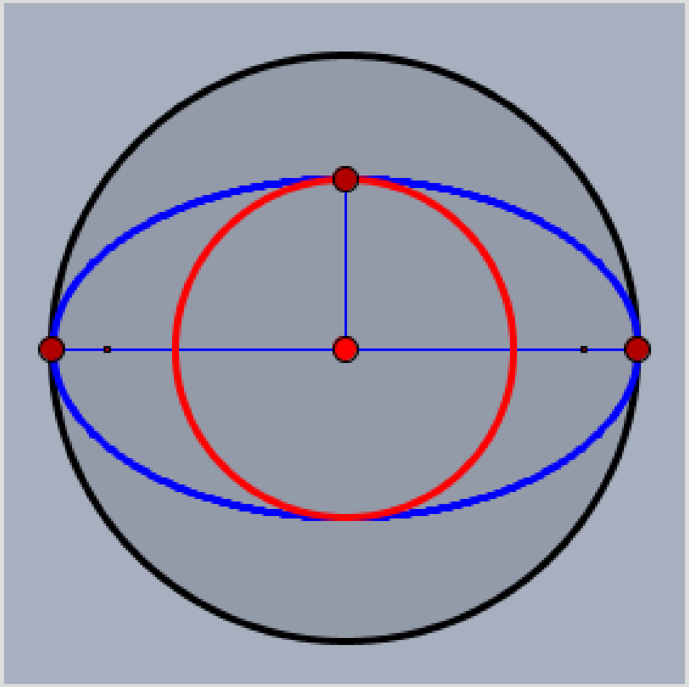
Das Beltrami-Klein Modell (BK)

- **Punkte**: Punkte im Inneren der Kreisscheibe u
- **Gerade**: Sehnen von u
- Gerade ohne Schnittpunkt im Inneren: überparallel (haben Gemeinlot),
- Gerade mit gemeinsamem Randpunkt: grenzparallel
- Normale Gerade: konjugiert zu u
- Metrik (U,V: Randpunkte vin AB) |AB|=0.5*LN(DV(A,B,U,V))



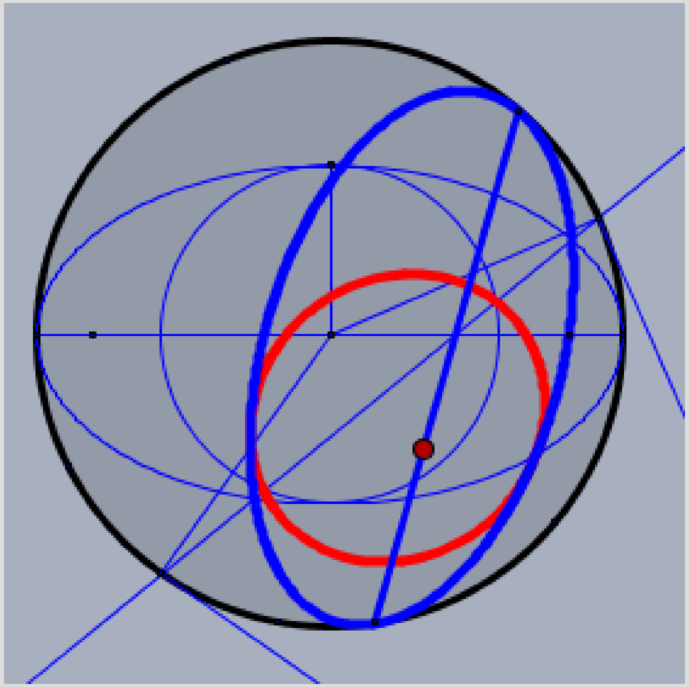
Abstände im BK-Modell

- Abstand zweier Punkte A,B (Randpunkte U,V): d=0.5*LN(DV(A,B,U,V))
- Einfachste Lage:
- Mittelpunkts-Kreise (von M): konzentrisch zu u, sonst:Ellipsen, die u in zwei k.k. Punkten berühren
- Abstandskreise (von m): w.o. mit reeller Berührung



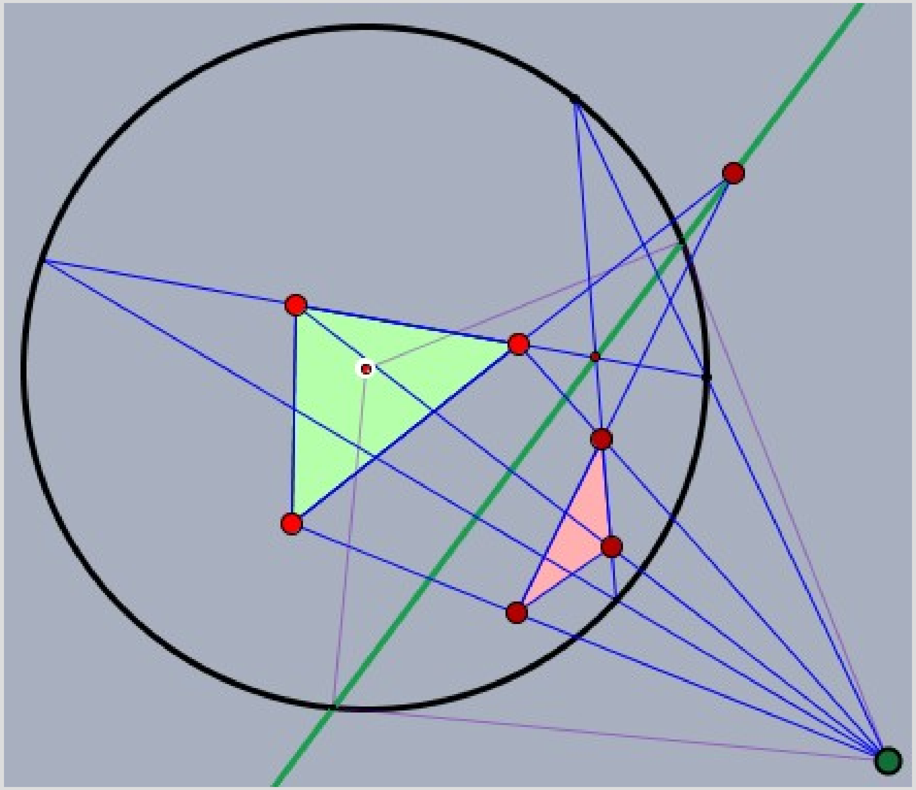
Kreise im BK-Modell

- Können mit **Abständen** (von Punkt oder Gerade) oder als **Orthogonal-Trajektorie** definiert werden (Scheitel innerhalb, außerhalb, auf u):
- Mittelpunktskreis mit Mittelpunkt (rot)
- Abstandskreis mit Achse (blau)
- Grenzkreis: aus einem Parallelenbüschels (r=∞)



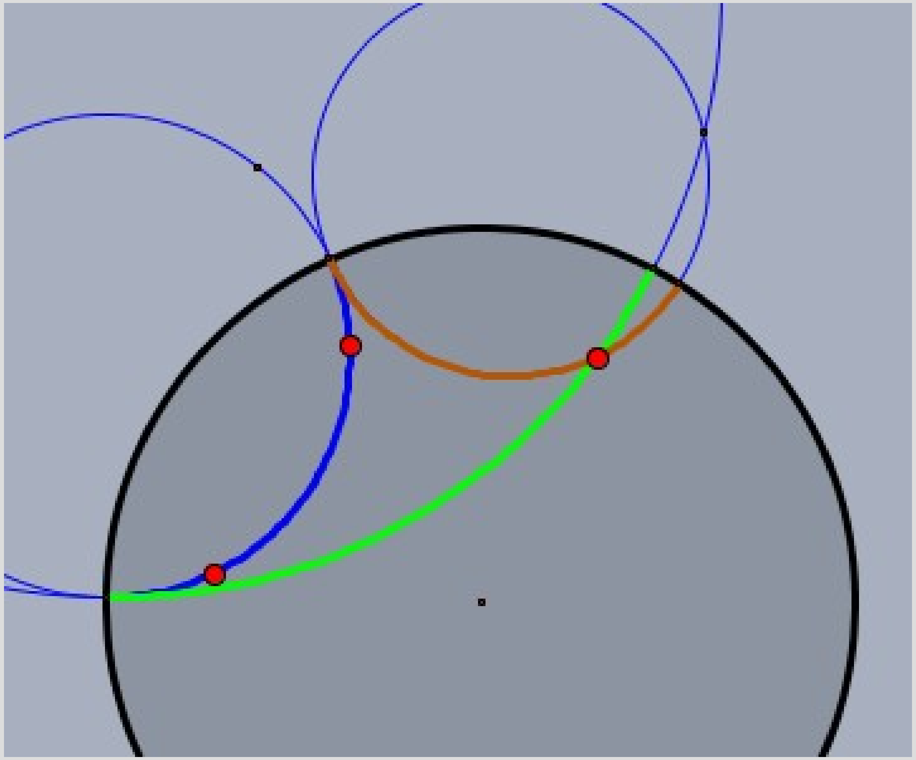
Kongruenzabbildung im BK-Modell

- automorphe Kollineationen von u
- Einfachster Fall: Zentralkollineation (Achse und Zentrum konjugiert zu u, Verhältnis =-1)
- Wegen der Doppelverhältnis-Treue bleiben Streckenlängen und Winkel unverändert



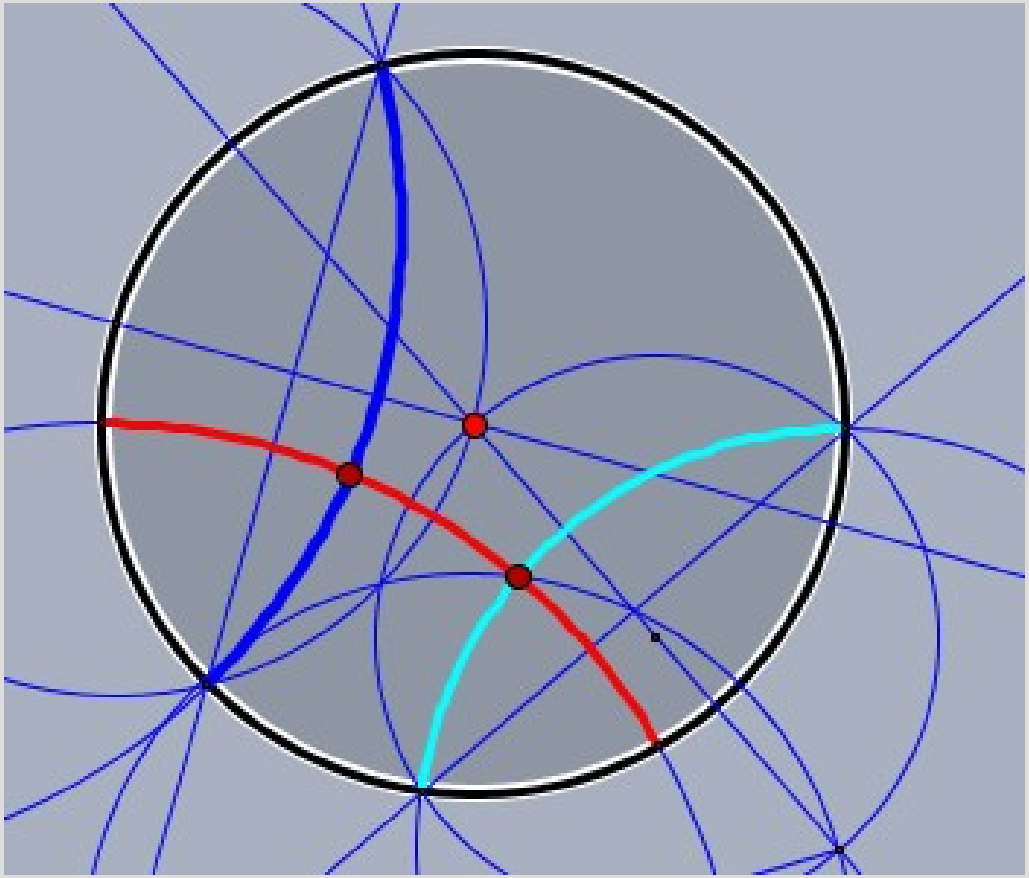
Poincaré'sches Kreis-Modell PKr

- u sei ein reeller Kreis
- **Punkte**: Punkte im Inneren der Kreisscheibe u
- **Gerade**: Orthogonalkreise von u (gehen bei Inversion an u in sich über)
- **Parallele Gerade:** grenzparallel/ überparallel (Schnittpunkt auf/ außerhalb von u)
- Verbindungsgerade: Punkte an u invertieren, Umkreis
- Abstand zweier Punkte A,B (Randpunkte U,V): d=LN(DV(A,B,U,V))



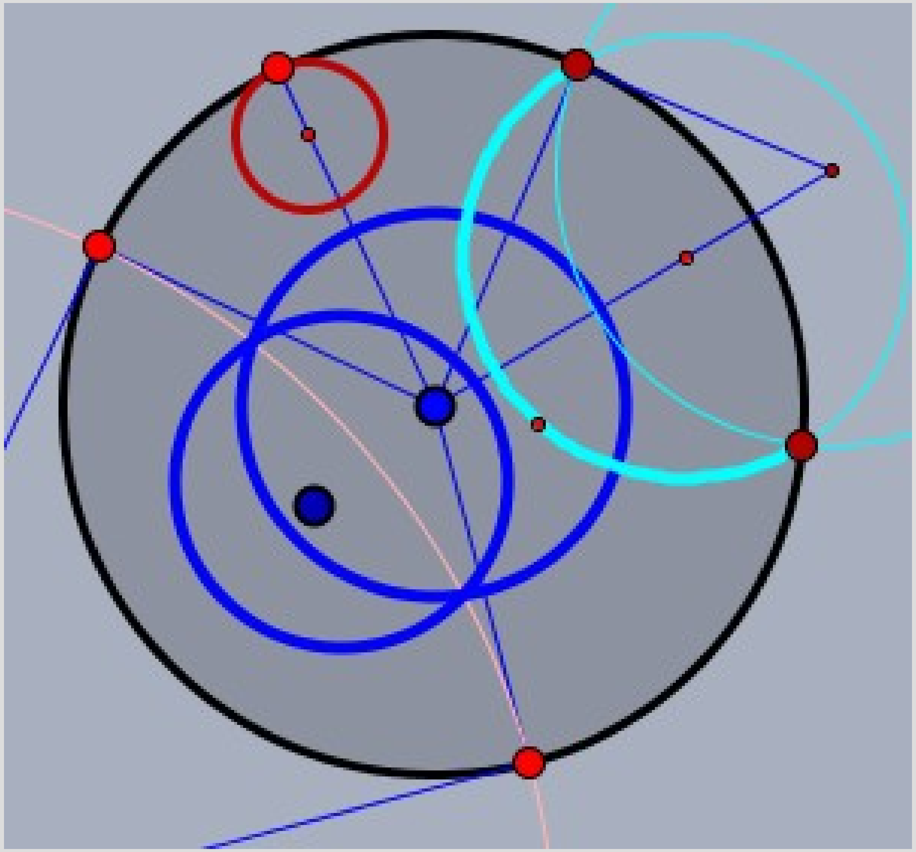
Gemeinlot im PKr

Zur Konstruktion des Gemeinlotes zweier divergierenden Geraden muss der gemeinsame Orthogonalkreis dieser mit u konstruiert werden (Chordale)
Reell nur für divergierende Geraden.



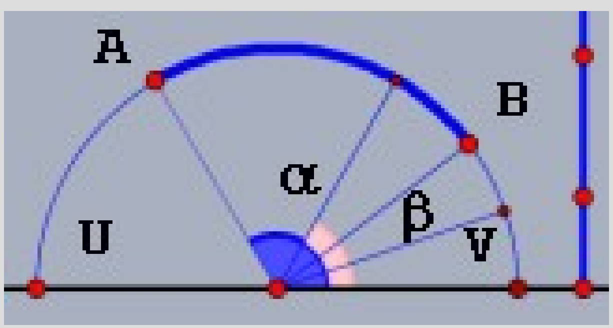
Kreise im PKr

- Abstand =
  0.5 * LN(DV(A,B,U,V))
- **Mittelpunktskreise** (blau), die durch Spiegelung (=Inversion) an einer Achse (=Orthogonalkreis von u) entstehen
- **Abstandskreis** (türkis) mit Basislinie)
- **Grenzkreis** (rot)

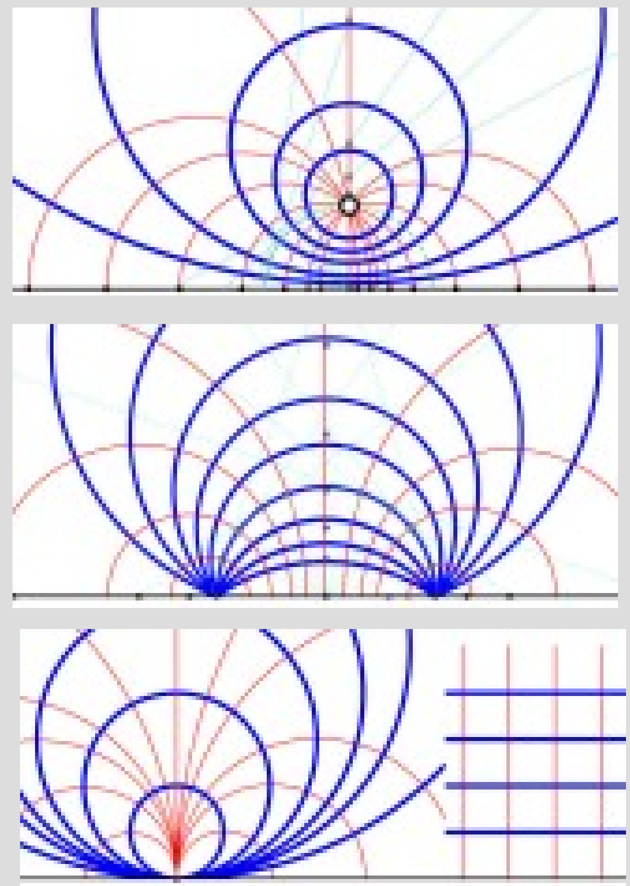


Das Poincaré'sche Halbebenenmodell

Punkte: einer oberen Halbebene begrenzt durch den Horizont.
Fernpunkte: Punkte des Horizontes.
Gerade
Orthogonalkreise des Horizontes, inkl. die Normalen zum Horizont
Streckenlängen:
= 0.5*Ln DV(A,B,U,V),
= Ln Tan(α/2) - Ln Tan(β/2), a,b die Winkel von A,B zum Horizont
= Ln TV(A,B,U)



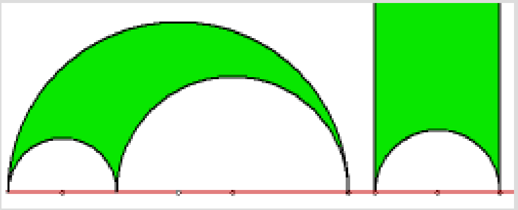
Drei Arten von Geradenbüscheln (rot) und orthogonales Kreisbüschel (blau)

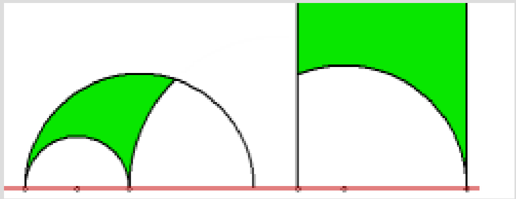


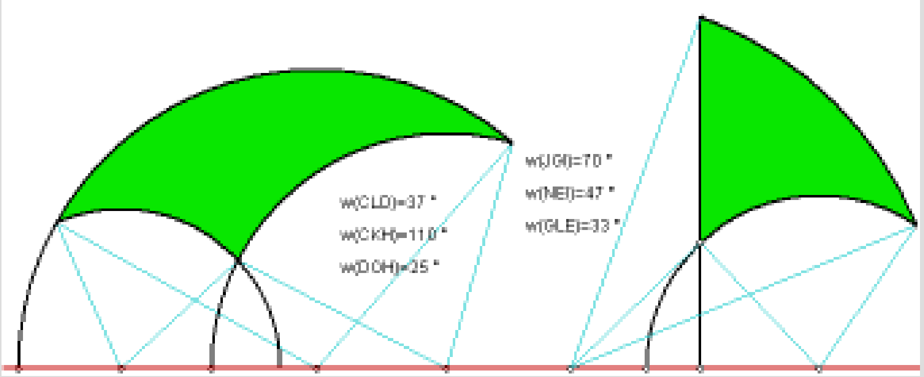
Eigenschaften

- Das Modell ist konform
- Winkelsumme im Dreieck <180°
- Die Differenz auf π, der Defekt, = Flächeninhalt (analog zum Exzess auf der Kugel)
- Isometrien:
  Streckung von Horizontpunkt
  Spiegelung an Senkrechter
  Inversion an Geraden
- Die Orthogonaltrajektorien der Strahlbüschel sin Mittelpunktskreise Abstandskreise (von einer Geraden) oder Grenzkreise

Dreiecke können 0,1,2,3 unendlich ferne Ecken haben (asymptotische Dreiecke)

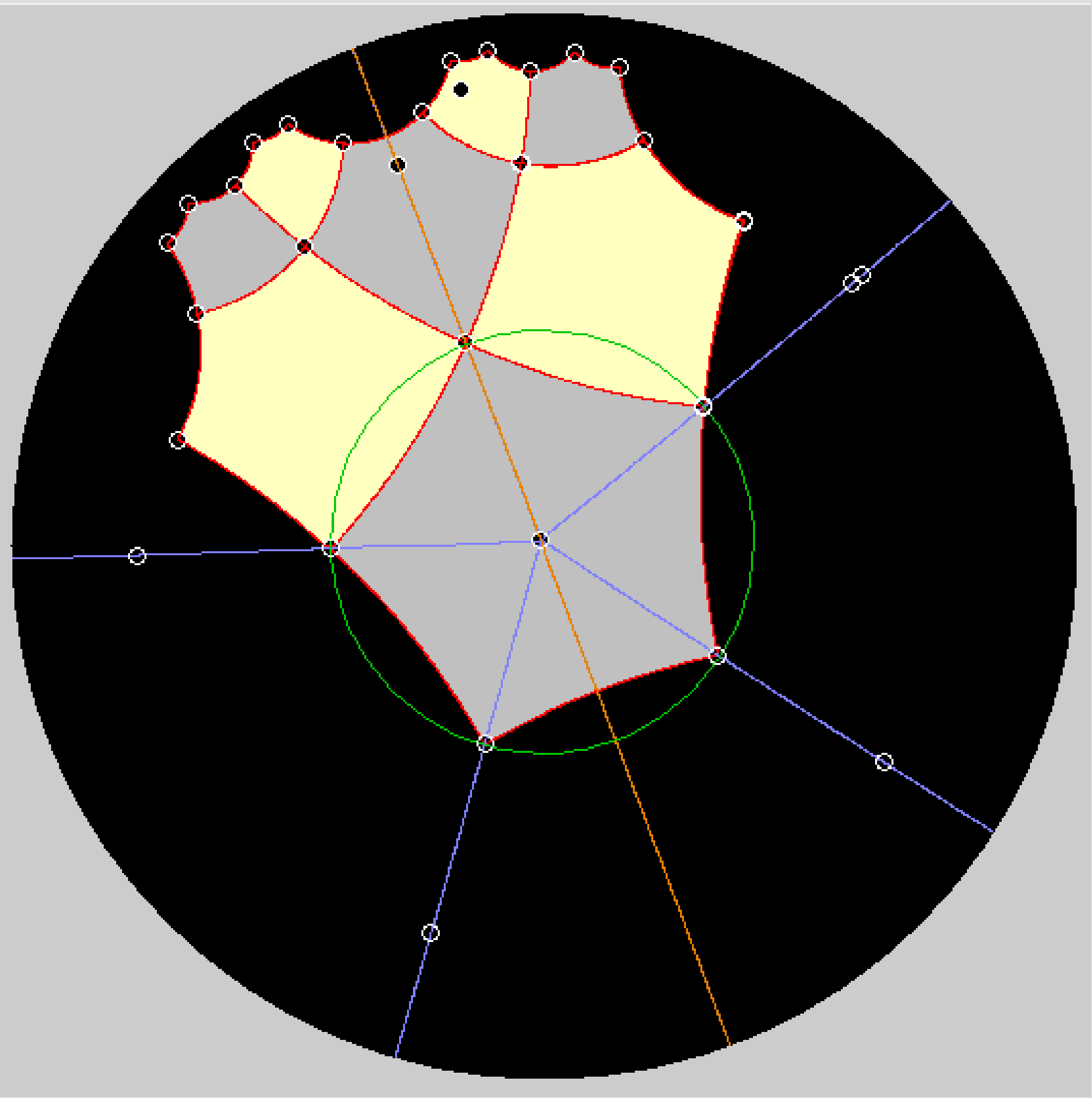






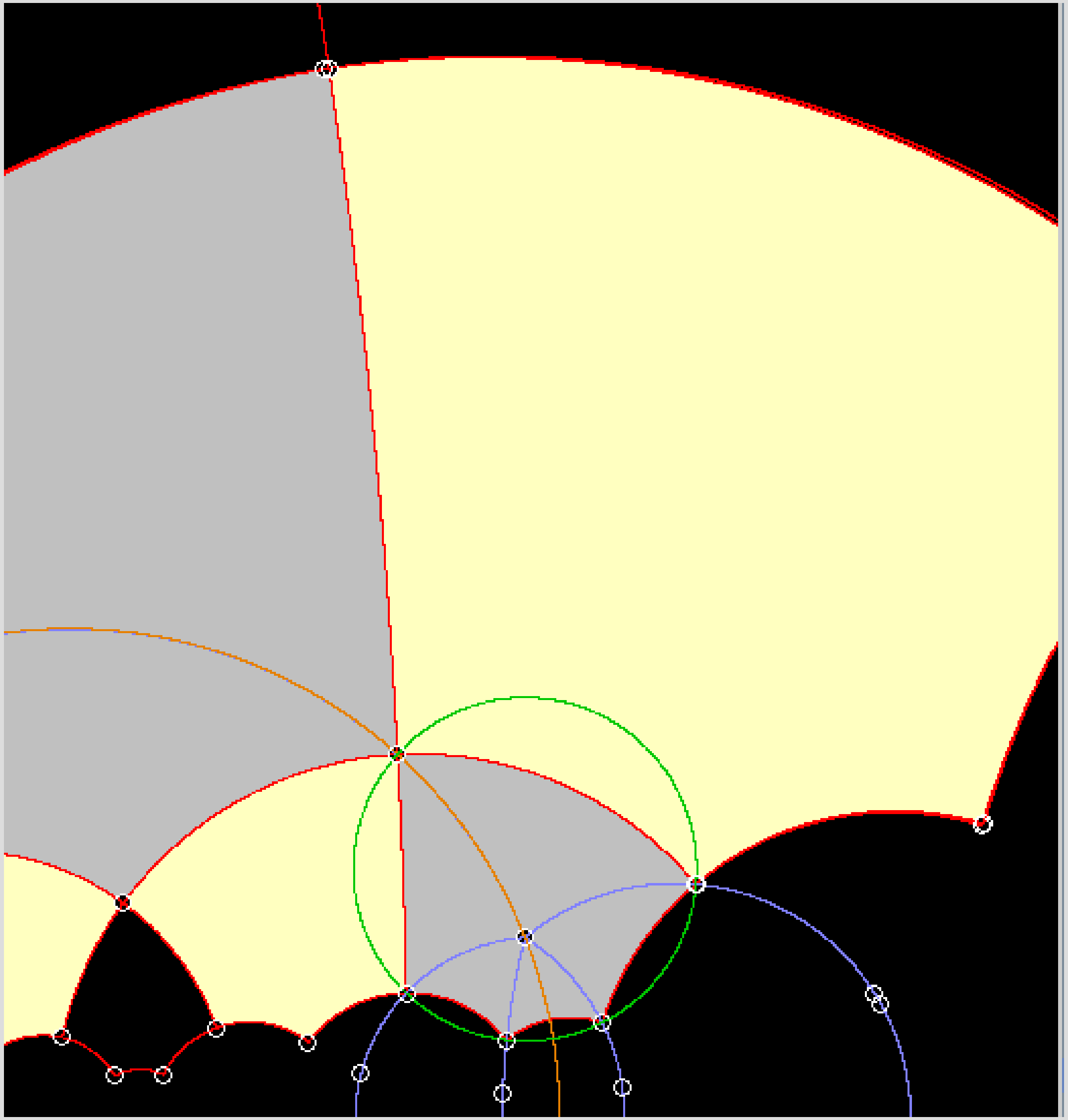
Hyperbolische Pflasterungen 1

Bei den Pflasterungen der hyperbolischen Ebene ist man wesentlich flexibler als in der euklidischen: 0°≤Winkelsumme im Dreieck<180° ⇨ Winkel eines regelm. Vieleckes beliebig einstellbar. Hier: regelm. Fünfeck mit Winkel 90°. Man kann damit die Ebene lückenlos pflastern



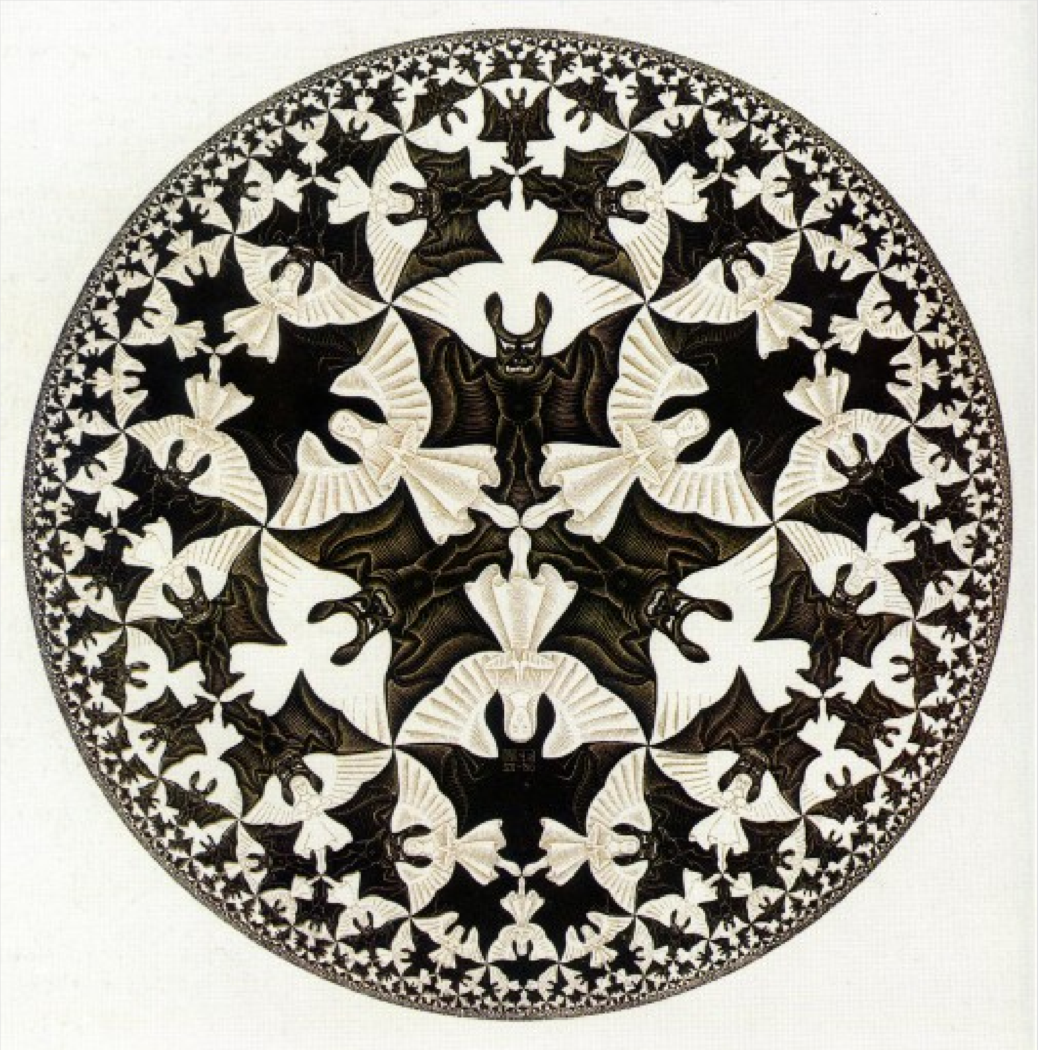
Hyperbolische Pflasterungen 2

Hier dasselbe Beispiel in der Poincaré'schen Halbebene.
Für Konstruktionen dieser Art verwendet man am besten http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html



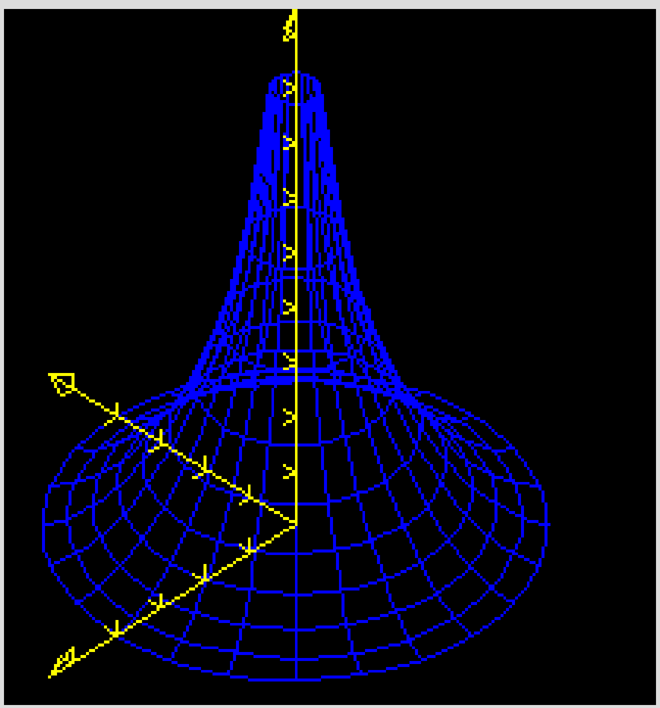
Hyperbolische Pflasterungen 3

Bei Escher findet man eine Unzahl von Grafiken, denen Pflasterungen nicht nur der euklidischen sondern auch der hyperbolischen Ebene zugrunde liegen



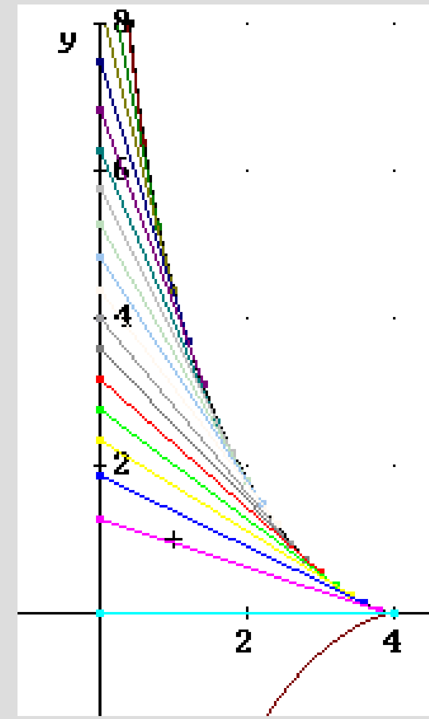
Die Pseudosphäre (ψευδω =ich lüge, σφαιρα =Kugel)

Ein euklidisches Modell der hyperbolischen Geometrie besteht aus der Pseudosphäre bzw. den Punkten und Geodätischen darauf.
Es entsteht durch Rotation einer Traktrix um ihre Asymptote,



Diese hat wie die Kugel eine konstante Gauss-Krümmung, allerdings -1.

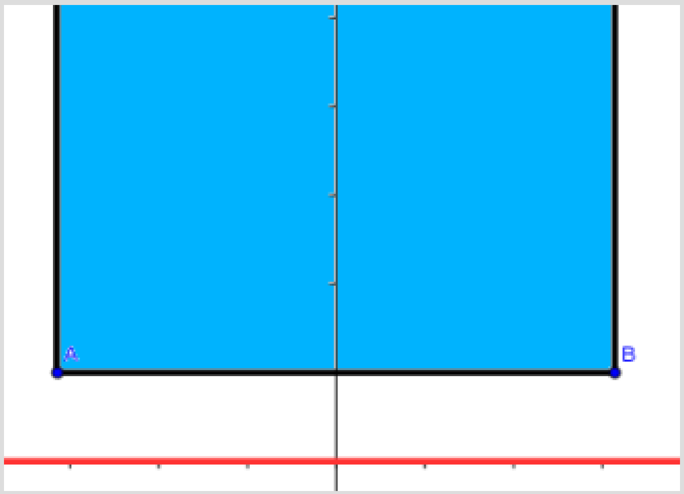
Traktrix (Hundekurve)
Herrl geht gerade weiter und zieht widerstrebenden Hund hinter sich her



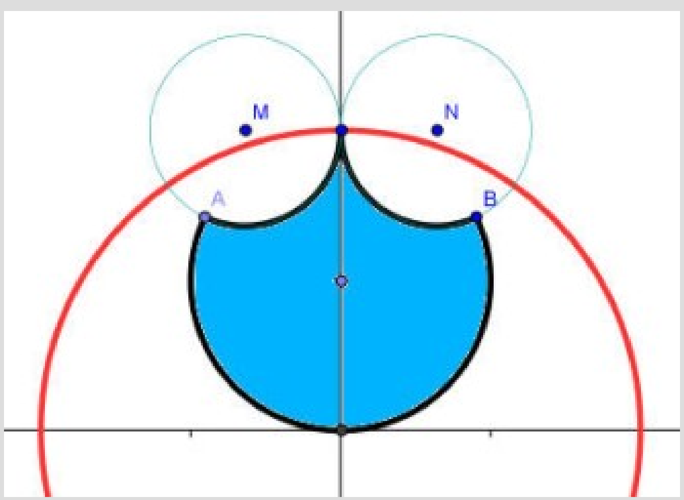
$$\begin{pmatrix} r * Cos(t) \\ Ln\,Tan\left(\pi/4 + t/2\right) - r * Sin(t) \end{pmatrix}$$

Übergang Pseudosphäre ⇔ Poincaré Modelle

Halbebenenmodell



Kreisscheibenmodell



- Die Pseudosphäre kann isometrisch auf einen Teil der Modellbereiche abgebildet werden:
- Die Meridiane gehen in ein Büschel grenzparalleler Geraden über
- die Parallelkreise in die dazu orthogonalen Grenzkreise
- Das Bild der „ganzen“ Pseudosphäre wird berandet durch einen Horozykel und zwei seiner Durchmesser
- das „Rechteck“ der Halbebene wird auf die Fläche (in w-r-Koordinaten) übertragen durch

$$\binom{u}{v} = \binom{-\pi < u \leq \pi}{1 \leq v}$$

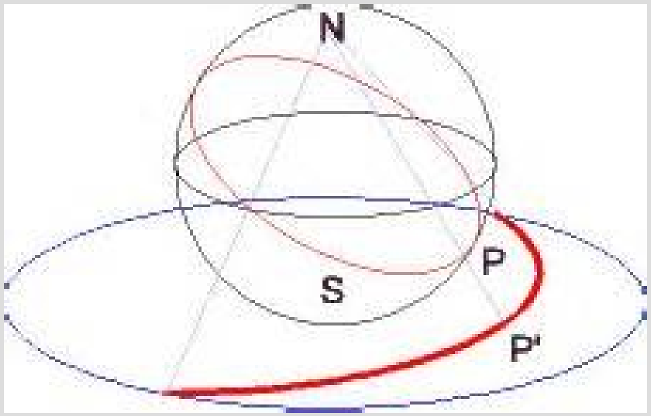
$$\binom{w}{r} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{1}{v} \end{pmatrix}$$

Elliptische Geometrie: die Kugel

Ein isometrisches Modell der elliptischen Geometrie in der Ebene ist nicht möglich.
Es ist auf der (Halb-) Kugeloberfläche realisiert:

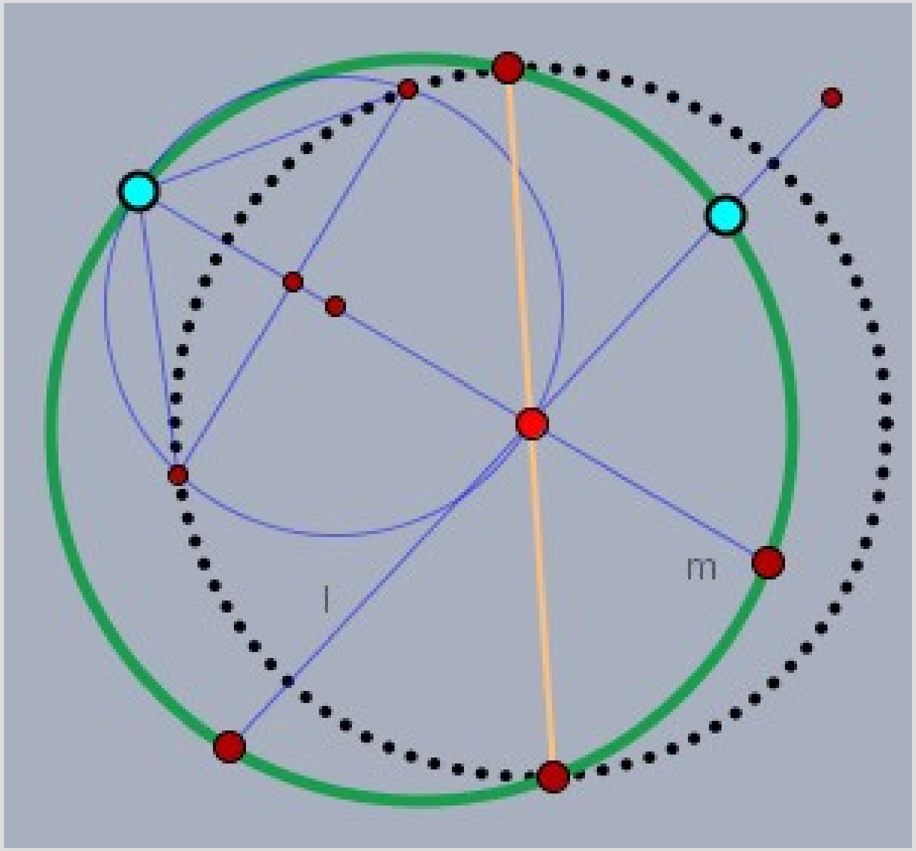
- Punkte ⬄ Kugelpunkte
- Gerade ⬄ Großkreise
- Winkel, Strecken euklidisch zu messen
- Keine Parallelen
- Winkelsumme >180°

- Saccheri-Viereck: die beiden oberen Winkel sind stumpf (Stumpfeck)
- Projiziert man die obere Halbkugel aus dem S-Pol (oder die untere aus N) auf die Äquatorebene, erhält man das **ebene konforme Modell**.
- Dieses ist nicht mehr längentreu.



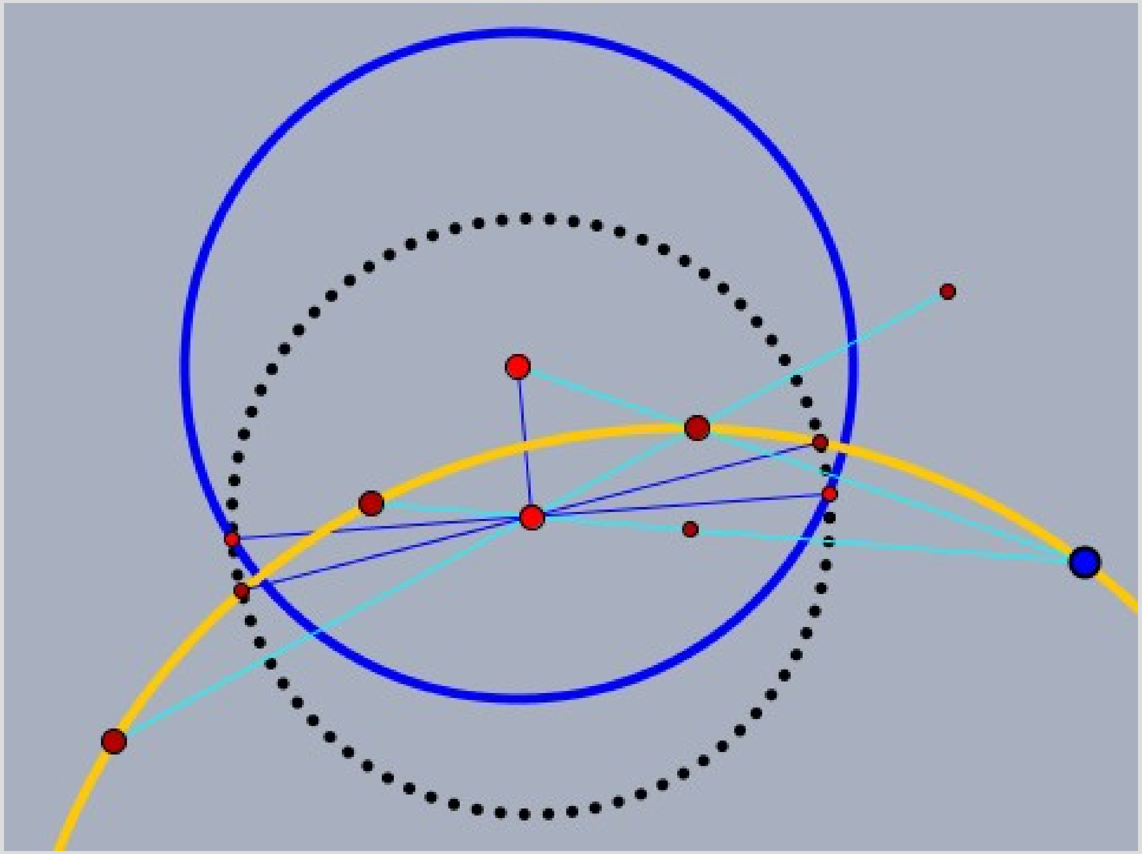
Die konforme elliptische Ebene

- u sei ein nullteiliger Kreis
- **Punkte**: Punkte (beliebig)
- **Gerade**: Orthogonalkreise von u = Diametrakreise des reellen Vertreterkreises (gehen bei Anti-Inversion an u in sich über)
- Keine Parallelen
- Verbindungsgerade: Punkte an u anti-invertieren, Umkreis



Normale Punkt - Gerade

Invertiert man die Normale an der gegebenen Geraden, so geht sie in sich über (Schnittpunkte und Schnittwinkel bleiben fest), auch der Punkt
Nun invertiert man Punkt und Spiegelbild am nullteiligen Kreis und erhält vier Punkte der Normalen

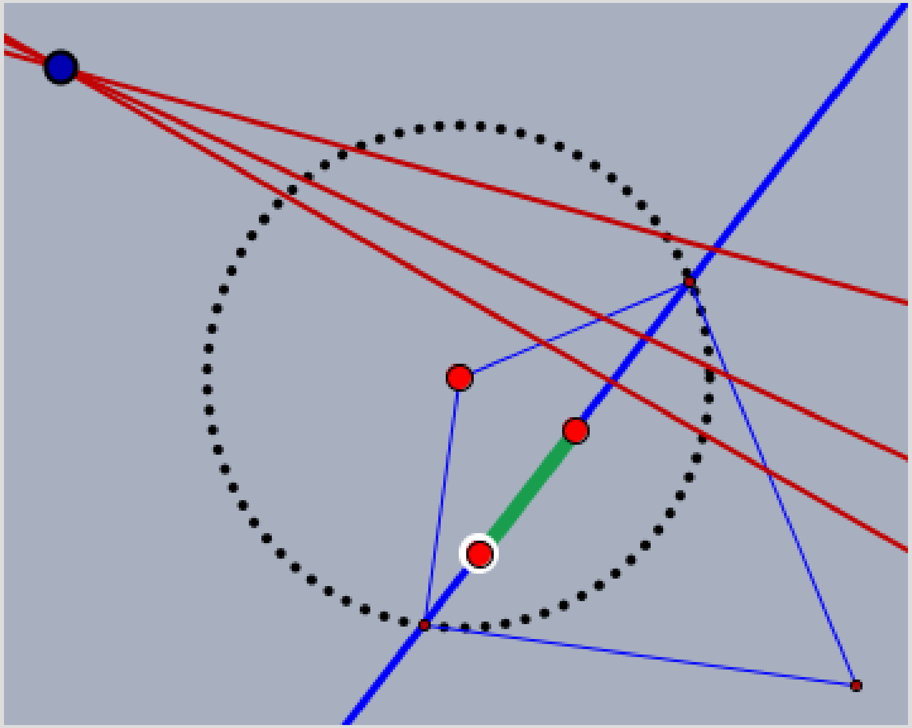


Gnomonische Projektion

der (oberen) Kugel(hälfte)
aus dem Südpol
auf die Äquatorebene

Eigenschaften
- Äquator bleibt fix
- Südhalbkugel ⇨ Innengebiet
- Nordhalbkugel ⇨ Außengebiet
- Großkreise ⇨ Gerade
- Normale Großkreise ⇨ Gerade, die konjugiert sind zum Bild des Absoluten Kegelschnittes (antikonjugiert zum Äquator)

Metrik:
|AB|=i/2*LN(DV(A,B,U,V))
dabei ist |DV|=1 und der LN rein imaginär.
Für A=O, B(0.5/0) ist
|AB|=i/2*LN((-3+4i)/5))=
i/2*(π+atan(-4/3)) ≈ 2.21



Pseudoeuklidische Geometrie

Pseudoeuklidische Geometrie
Wie jede Geometrie ist auch sie die Invariantentheorie einer bestimmten Abbildungsgruppe.
<u>Erklärung 1: (Projektive Geometrie)</u>
Die Abbildungen sind nun die automorphen Kollineationen eines reellen Fernkreises c
<u>Erklärung 2: (Lineare Algebra)</u>
Linearer Raum mit Minkowski Metrik, also Skalarprodukt mit Index 1.
Die Abbildungen werden durch Multiplikation mit einer Lorentz Matrix bewirkt

Isometrien
affine Transformationen, die die Längen erhalten sind im euklidischen Raum die **Bewegungen,** im Minkowski Raum heißen sie **Lorentz Transformationen**, im Umkreis der Zyklographie heißen sie **Laguerre Transformation**. Sie bilden (ebenso wie die euklidischen Bewegungen) eine Gruppe, die Lorentzgruppe oder Laguerre Gruppe).

$$X.Y = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n, \qquad und \quad \|X\| = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2$$

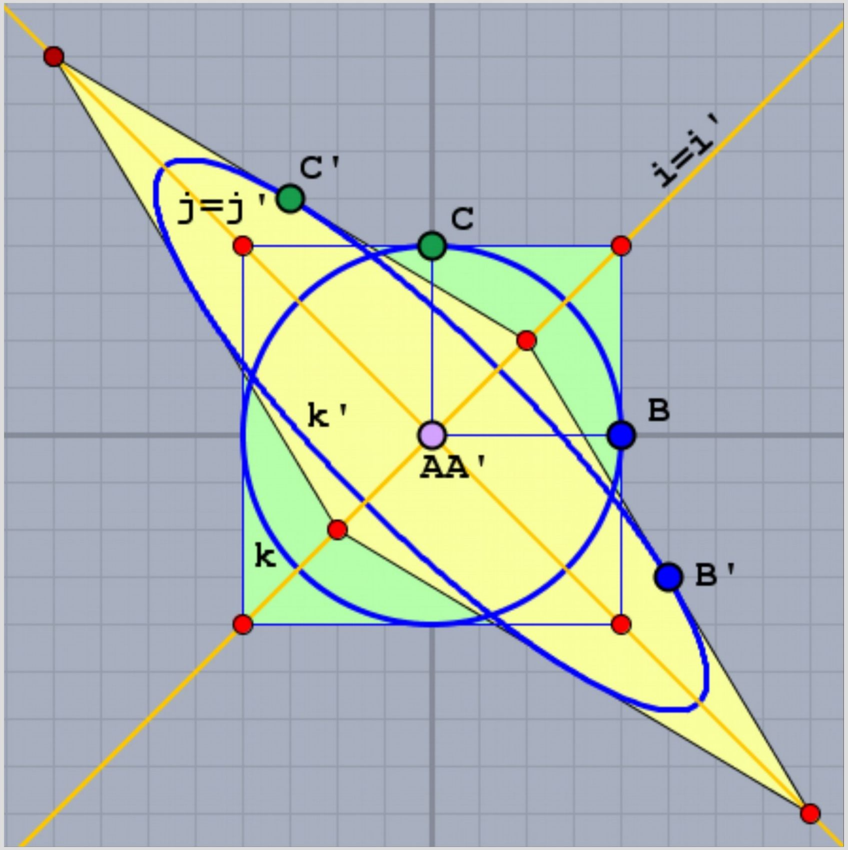
Beispiel für eine Lorentz Transformation

x´= 1.25*x – 0.75*t
t´= -0.75*x – 1.25*t
x = 1.25*x´+ 0.75*t´
t = 0.75*x´+ 1.25*t´
Matrix
Determinante 1, Spalten C-orthogonal, Zeilen detto.

$$L = \begin{pmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{pmatrix}, L^{-1} = \begin{pmatrix} 1.25 & +0.75 \\ +0.75 & 1.25 \end{pmatrix}$$

A(0,0) = A´
B(4/0), B´(5,-3), C(0,4), C´(-3,5)
Eigenwerte
EW1=2, EW2=1/2
EV1=(-1,1), EV2=(1,1), also die isotropen Geraden (Fixgerade)

Einschränkung auf EV1/EV2:
Ähnlichkeit mit Faktor 2 bzw. 1/2
Fixpunkt ist (0,0), bei Annäherung auf EW1 ist er repulsiv, auf EV2 attraktiv



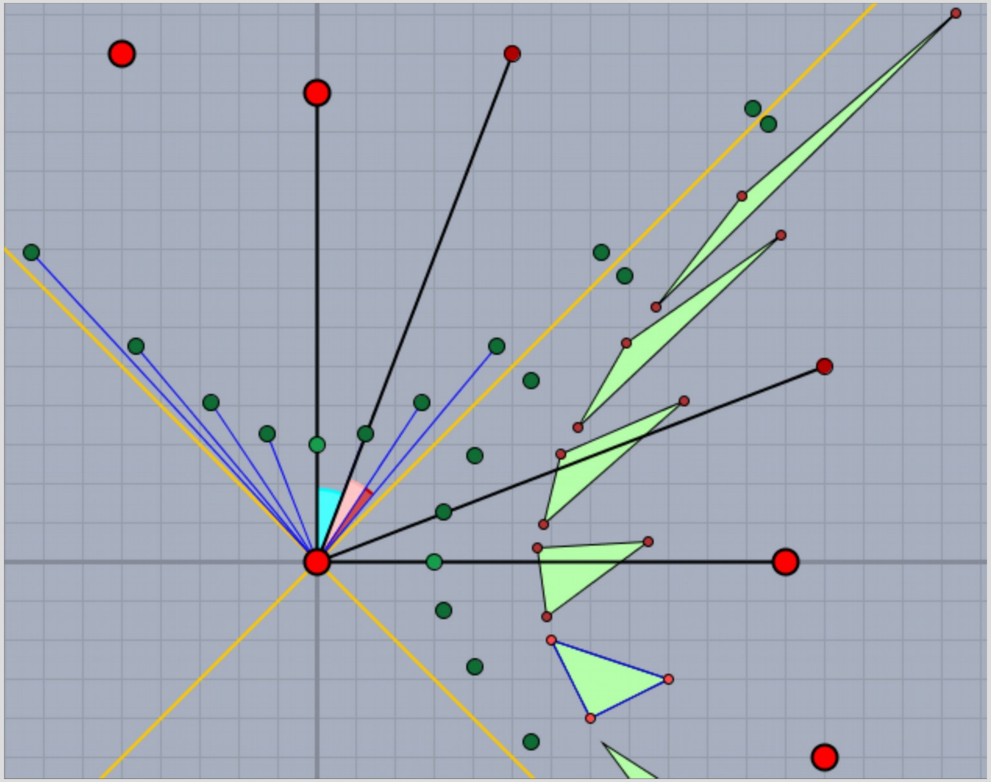
Weiteres Beispiel, w-Kurven

x´= 13*x/12 – 5*t/12
t´= –13*x/12 – 5*t/12

A(0,0) = A´
B(12/0), B´(13,-5)
C(0,12), C´(-5,13)

Ergebnis bei mehrfacher Anwendung

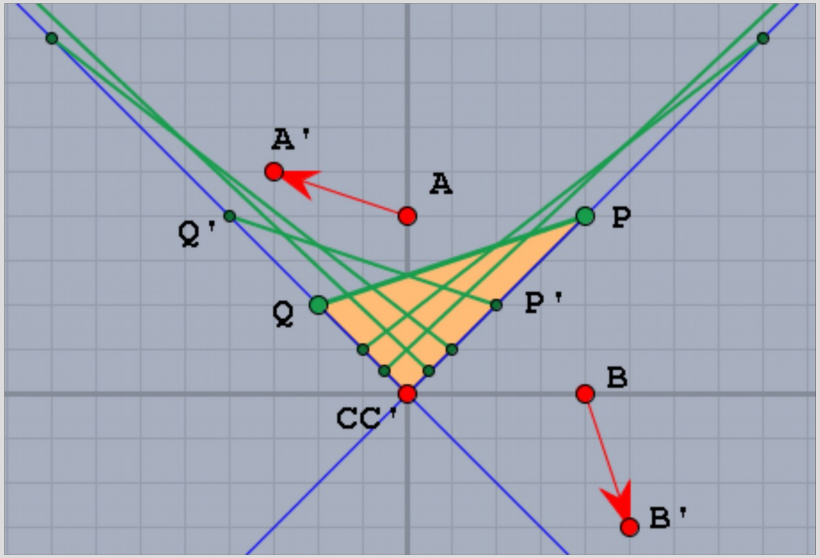
- auf (0,3) bzw.
- auf (3,0) bzw.
- auf ein Dreieck.
- Die einzelnen Lagen bilden eine sog. W-Kurve



EW=2/3 bzw. 3/2 (reziprok)

Iteration, w-Kurven

- Eingeschränkt auf die EV (Fixgerade): Ähnlichkeiten mit reziproken Faktoren k und 1/k
- Das Dreieck PQC behält bei Transformation seine Fläche bei, da eine Seite mit k, die andere mit 1/k multipliziert wird
- bekannte Hyperbeleigenschaft: PQ umhüllt eine Hyperbel, der Mittelpunkt ist Berührpunkt
- Die w-Kurven sind Hyperbeln (im allgemeinen Fall Potenzkurven)

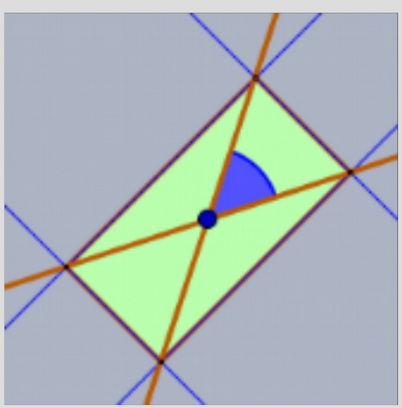


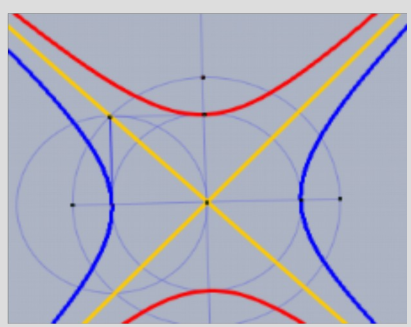
2d-Minkowski-Geometrie (C-Geometrie)

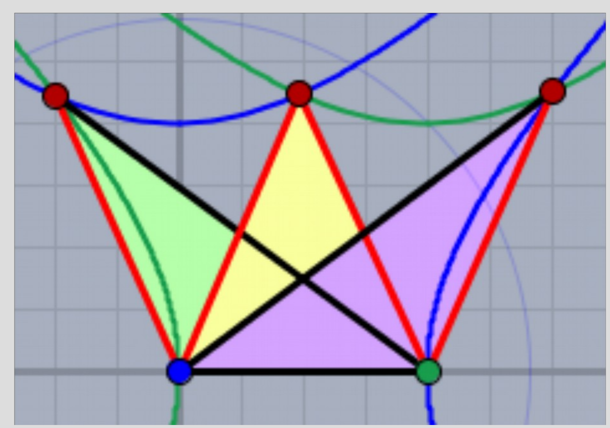
Lichtgerade
Gerade mit Norm =0, also 45° oder 135° steil.
Lichteck
Parallelogrammm, dessen Seiten Lichtgerade sind.

Normalstehen von Vektoren
[u,v] und t*[v,u].
Zwei Gerade sind dann normal, wenn sie Diagonalen eines Lichteckes sind.

Eichkurven zur Längenmessung
Abstand **1** zum Nullpunkt:
Hyperbel $x^2 - t^2 = 1$,
gleichseitige Hyperbel, Achse x
Abstand **i** zum Nullpunkt
Hyperbel $x^2 - t^2 = -1$,
gleichseitige Hyperbel, Achse t
Gleichseitiges Dreieck
Es gibt keine ("richtigen") gleichseitigen Dreiecke gibt sondern nur solche mit den Seiten 1,1,i und i,i,1 (i…rot, 1…schwarz)

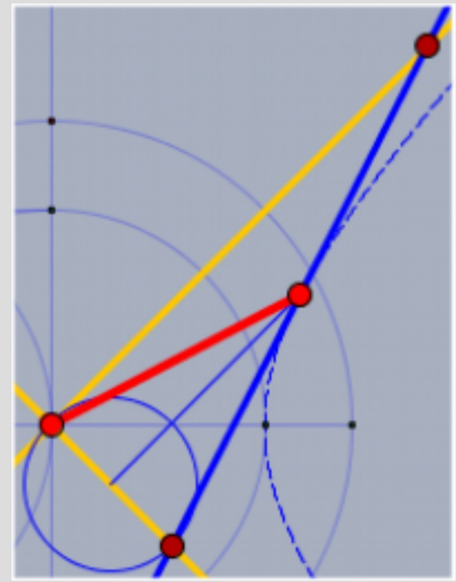


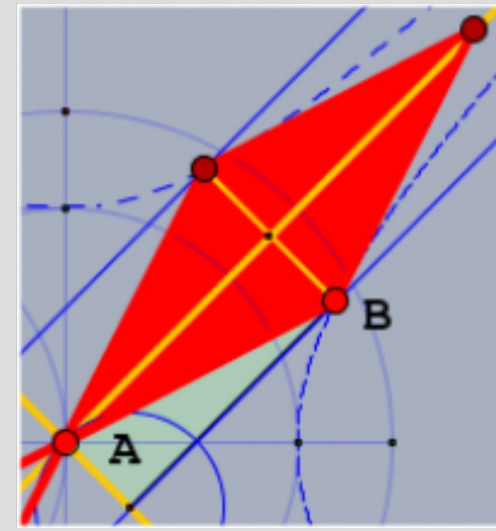




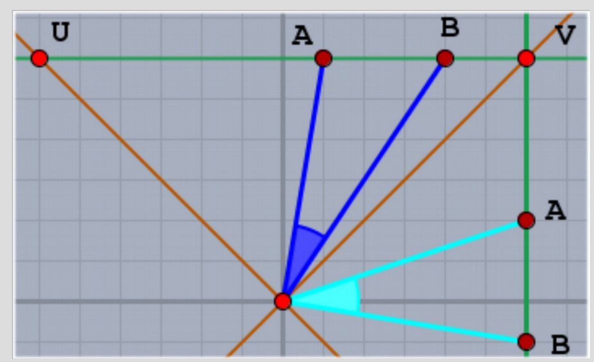
Einige Konstruktionen

Normalabstand Punkt-Gerade
Wie im euklidischen Fall Normale auf die Gerade, zum Lotfußpunkt, der Abstand ist der größtmögliche, alle anderen sind kleiner(!!!)





Quadrat
über der Strecke AB: ein Lichteck herum legen (grünlich), dessen andere Diagonale Winkel und Länge angibt (das i–fache).



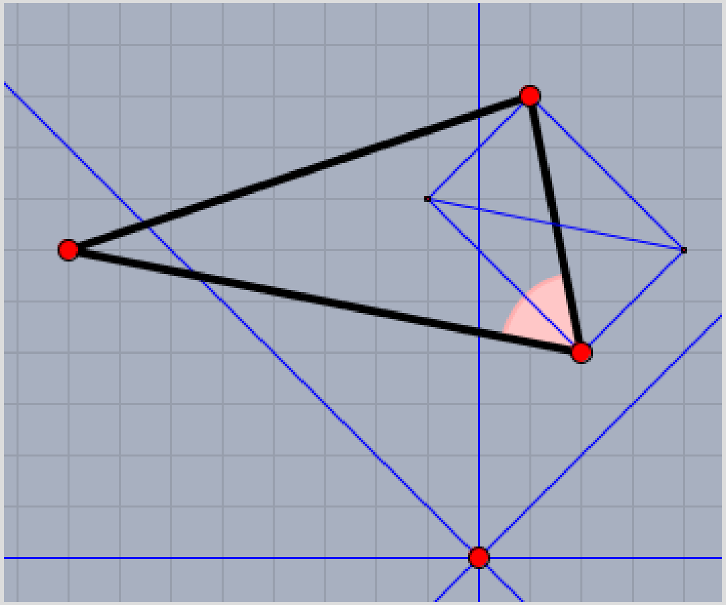
Winkelmessung
Doppelverhältnis der beiden Winkelschenkel mit den durch den Scheitel gelegten Lichtgeraden Der Winkel zweier lichtartiger oder raumartiger Geraden ist reell, einer licht- und einer raumartigen imaginär.

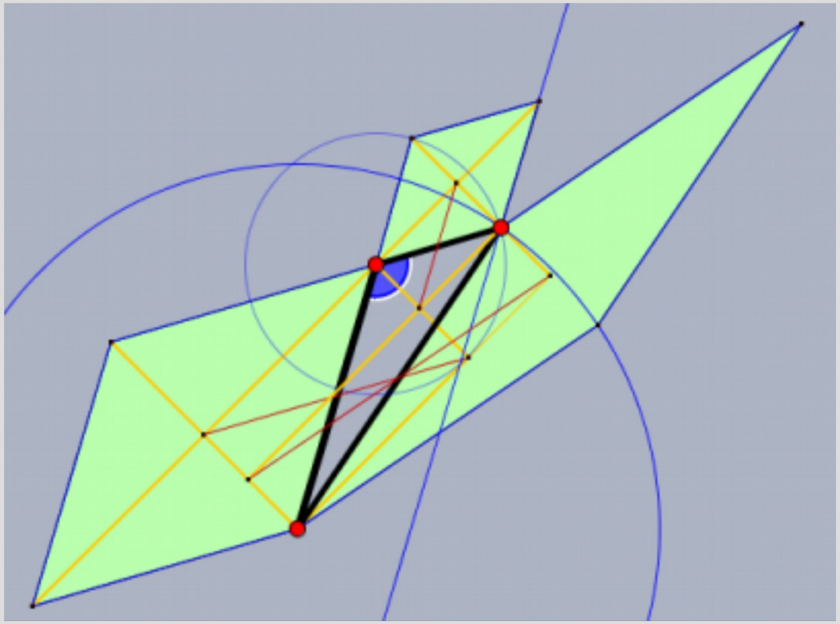
$$\alpha = \frac{1}{2}\ln\ DV(U,V,A,B) = \frac{1}{2} ln\left(\frac{AU}{AV} : \frac{BU}{BV}\right)$$

Rechtwinkelige Dreiecke, Pythagoras

Dreieck: A(2,4), B(1,9), C(-8,6)
es ist:
a=|B-C|=|(9,3)|
$=\sqrt{72}$, α=90°
$b=\sqrt{96}$, $c=i*\sqrt{24}$
$a^2=b^2+c^2$, 72=96-24

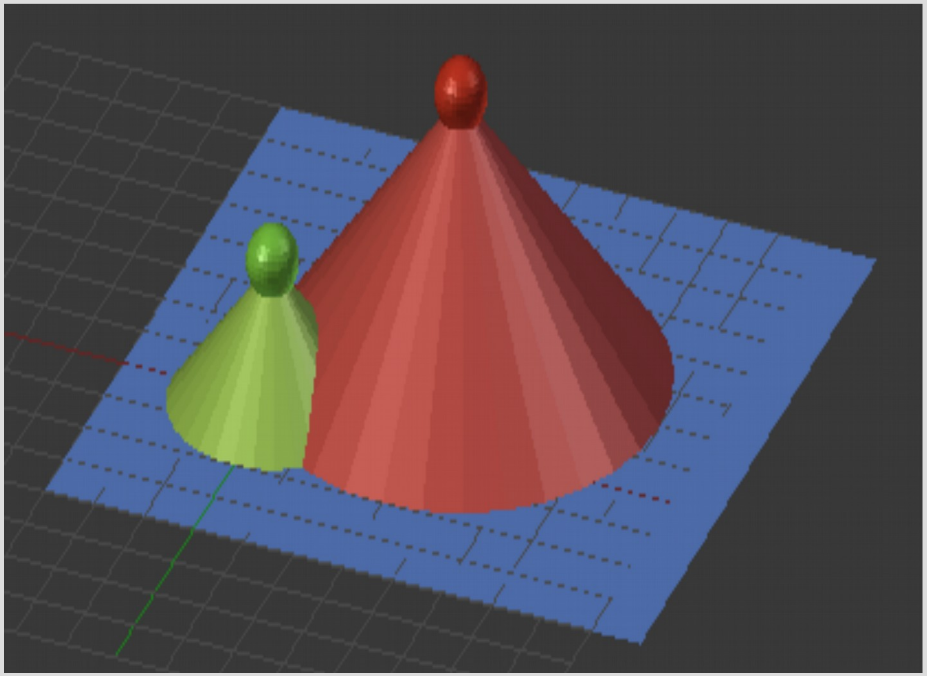
Pythagoras
zum Beweis: Katheten auf der x- bzw. der t-Achse:
A=O, B(u,0), C(0,v)
c=i*v (zeitartig), b=u (raumartig),
$a=\sqrt{u^2-v^2}$
$a^2=b^2+c^2$





Zyklographische Abbildung

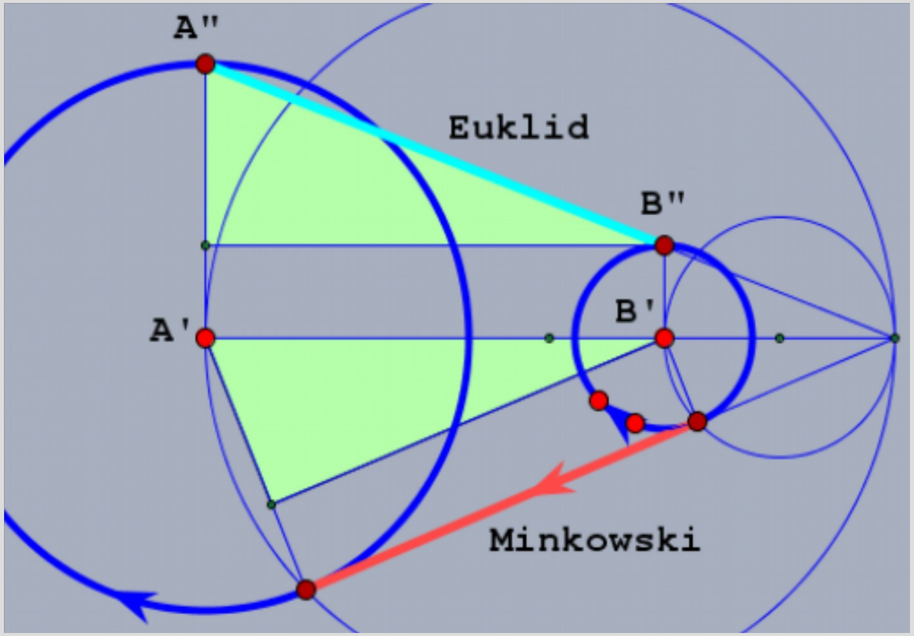
- Abbildung des (x,y,z)-R^3 auf die (x,y)-Ebene:
- jedem Punkt wird ein orientierter Kreis (Zykel) zugeordnet
- Geraden: alle Zykel mit zwei gemeinsamen Tangenten
- Reell/ imaginär: Gerade flacher/ steiler als 45° (raumartig/ zeitartig)
- Zusammenfallend: 45° steil (C-Gerade)

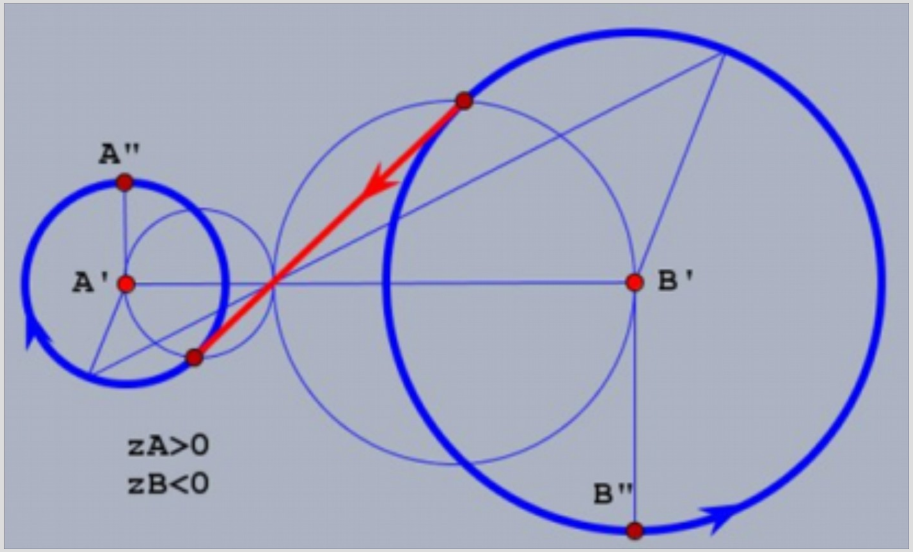


Ebene C-Geometrie: Abstand

Norm: $|..|^2 = x^2 + y^2 - z^2$
Abstand PQ $= |P-Q|$

- Reell für raumartige
- Imaginär für zeitartige
- =0 für lichtartige Geraden

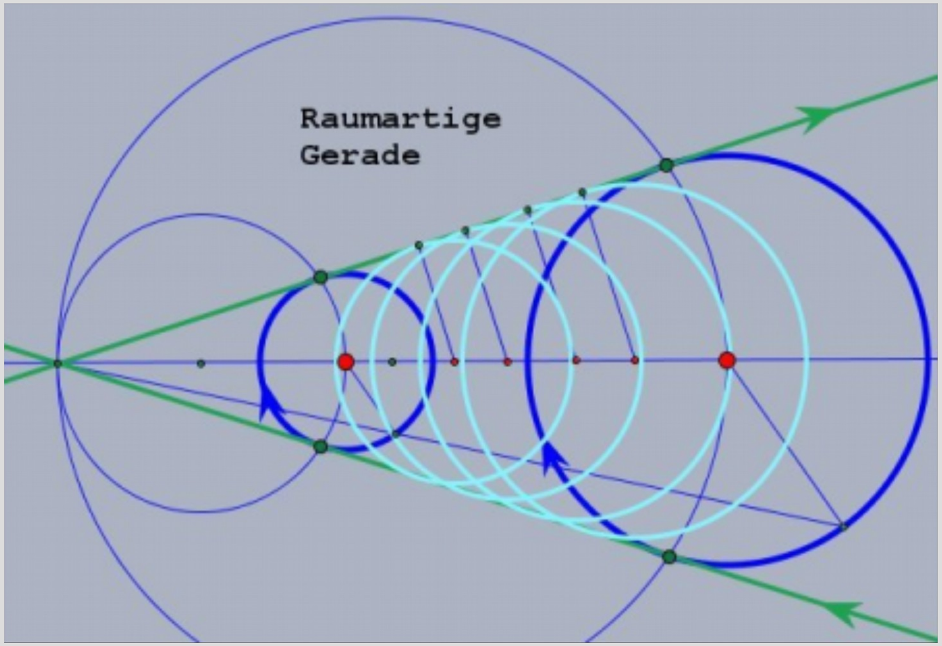




Ebene C-Geometrie: Zykelreihe

Lineare Zykelreihen

- Sind das zyklographische Bild einer Geraden
- raumartige Gerade: zwei gemeinsame Tangenten,
- Lichtgerade: eine gemeinsame Tangenten
- zeitartige Gerade: gemeinsame Tangenten sind imaginär



C-Kugel

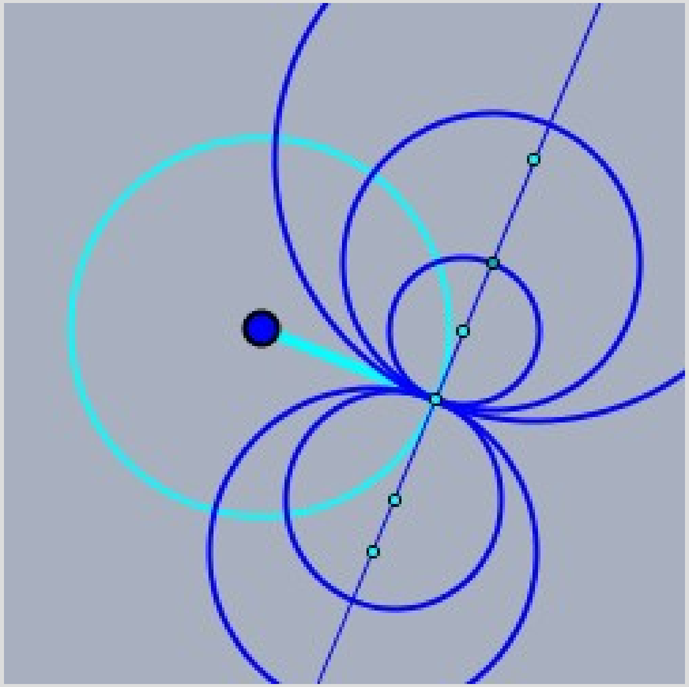
Punkte mit gleichem C-Abstand von M=O:
$x^2+y^2-z^2 = r^2$

r=0: C-Kegel (Lichtkegel)
Bild: alle Zykel durch O

r^2>0: einschaliges Drehhyperboloid
Bild: alle Zykel mit reellem Tangentialabstand r zu O

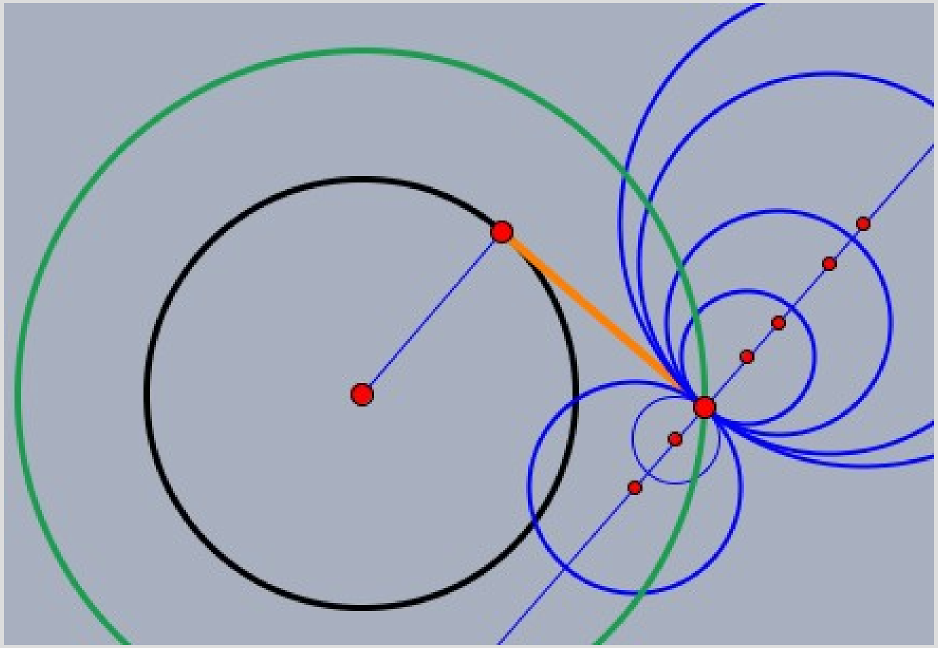
r^2<0:zweischaliges Drehhyperboloid
Bild: alle Zykel mit imaginärem Tangentialabstand r zu O

Einige Zykel; alle weiteren durch Drehung um O



C-Kugel

Alle Punkte P gleicher Entfernung von M≠O liegen wieder auf einem Lichtkegel bzw. ein- oder zweischaligen Drehhyperboloid
Bild: Zykel die den Bildzykel von M berühren oder den Tangentialabstand r haben
Sie schneiden einen Kreis unter festem Winkel.
Dieser kann reell oder imaginär sein



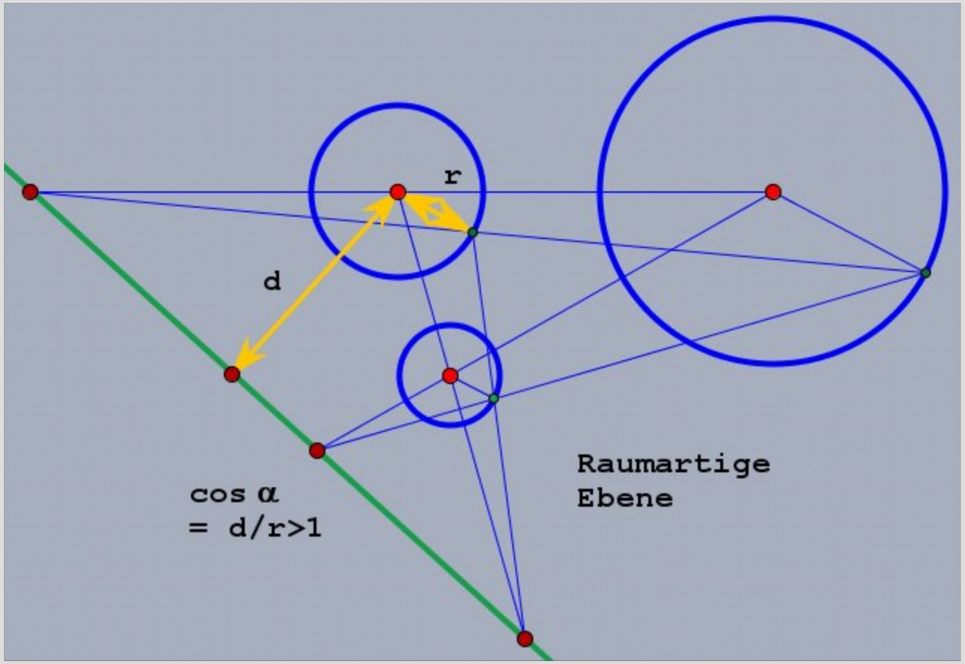
Ebene

Alle Zykel, die einen Speer unter festem Winkel schneiden, sind Bilder der Punkte einer Ebene.

Cosinus <1: raumartige Ebene
Cosinus >1: zeitartige Ebene
Cosinus =1: (Berührung): C-Ebene

Die Spur der Ebene ist die Ähnlichkeitsachse von drei beliebigen Zykeln

Drei Kreise samt ihrer Ähnlichkeitsachse =
Bildzykel von drei Punkten und Spur der Verbindungsebene

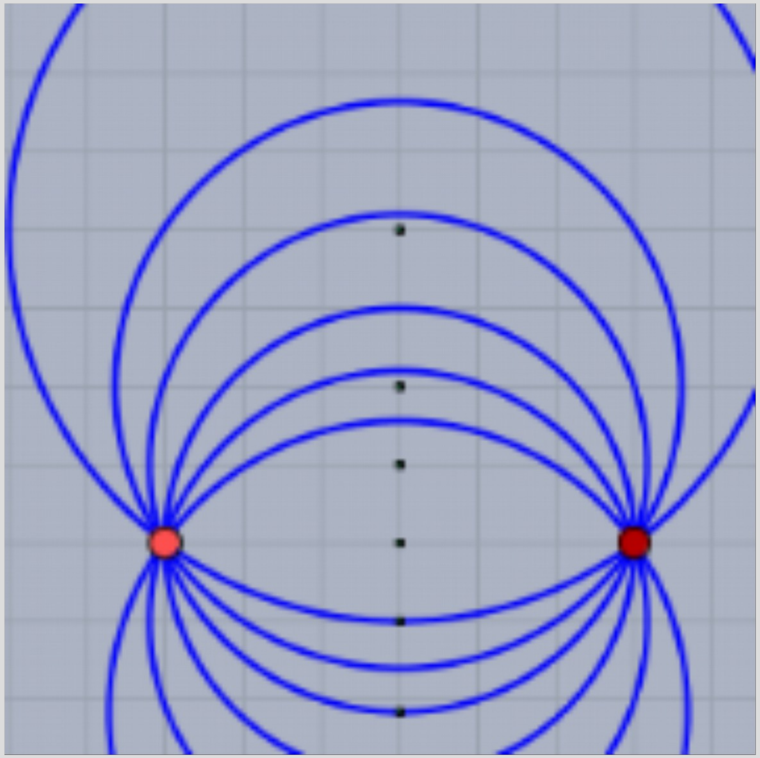


C-Kreise

Schnitt C-Kugel – Ebene,
Für die Art wesentlich ist nur die Ebene:

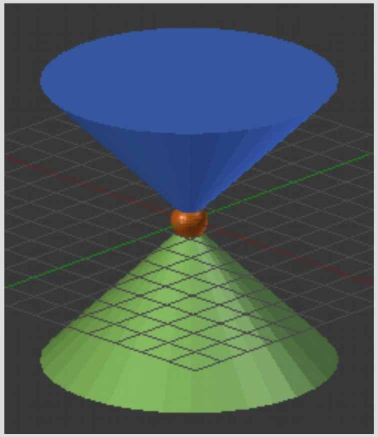
- raumartig: Ellipsen, auch nullteilige möglich (r imaginär), im Sonderfall waagrecht: euklidische Kreise
- zeitartig: Hyperbeln, auch Geradenpaare möglich (r reell),
- lichtartig: Parabeln (Geradenpaar möglich (r=0)

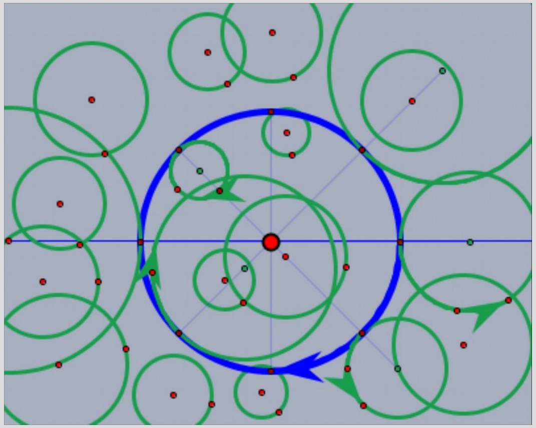
Beispiel: r=1,
Ebene //z
Kreisbüschel mit reellen Grundpunkten

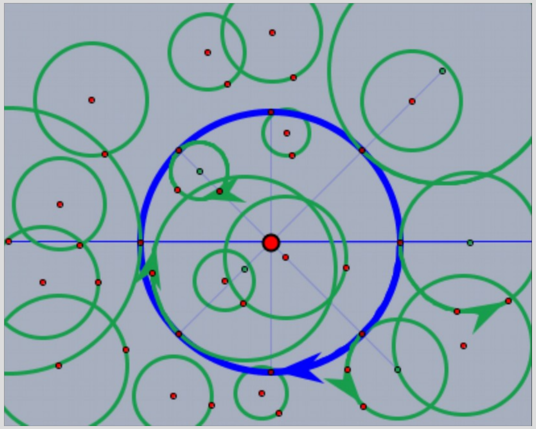


Ereignisse

Punkte: Ereignisse E(x,y,t) in der x-y-Ebene zum Zeitpunkt t
Ereignisse $P(x_1,y_1,t_1)$, $Q(x_2,y_2,t_2)$
(Abstand imaginär oder =0, also auf einer zeit- oder lichtartigen Geraden liegend).
$P \leq Q$, wenn $t_1 \leq t_2$ ist.







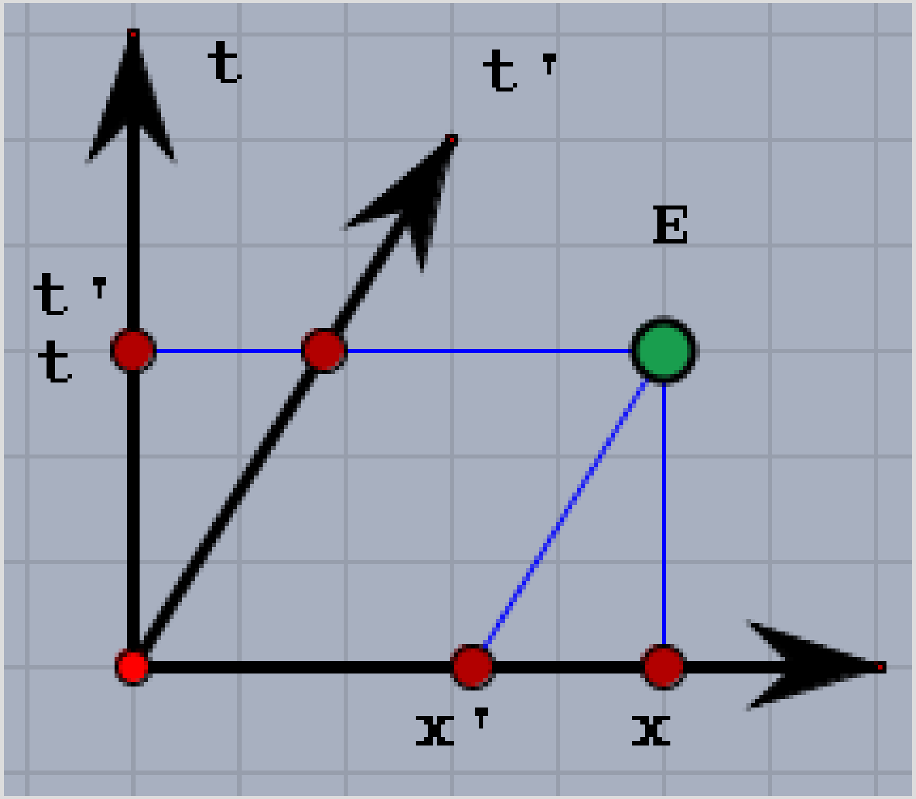
Zukunft/ Vergangenheit
Ereignis S gegeben.
V(S):={X | X≤S},
Z(S):={X | X>S},

Zyklographisches Bild
Vergangenheit/ Zukunft:
Alle Zykel, die das Ereignis NICHT umschließen/ umschließen

Galilei-Geometrie

Galilei-Transformation

S,S\` : festes bzw. in Richtung x gleichförmig bewegtes System
Zusammenhang der Koordinaten eines Ereignisses E im (x,t)-System S bzw. im (x´,t´)-System S´



x´= x-v*t
t´= t

Gleichzeitigkeit: Δ t=0

Gleichortigkeit: Δ x=0

Invarianten: Spanne, Abstand

Abstand zweier Ereignisse

$d=\Delta t$

$\Delta t = 0$: Isotrope Gerade: abstandslos, waagrecht

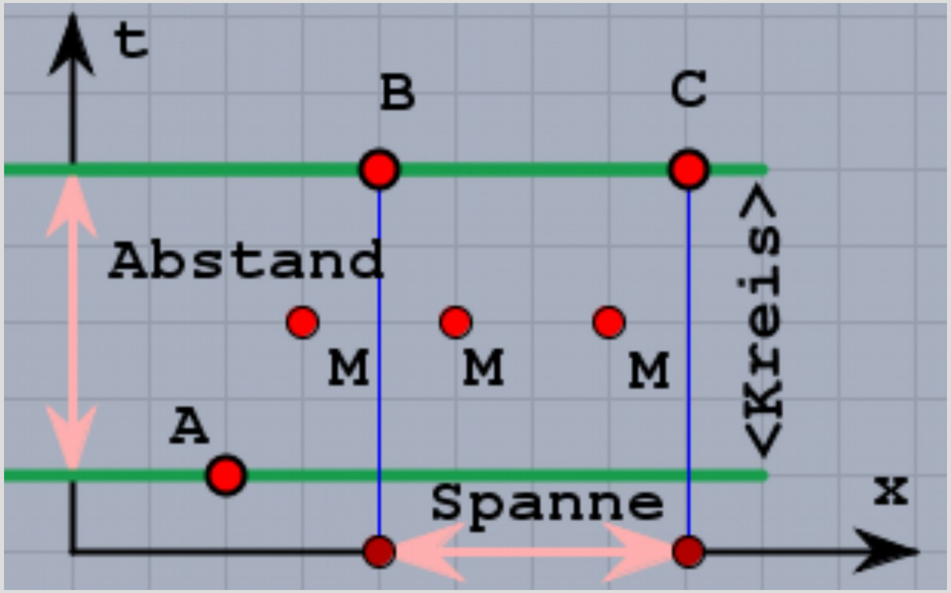
Spanne zweier gleichzeitiger Ereignisse (sind //x):

$s=\Delta x$

Abstand und Spanne sind unter der Galilei Transformation invariant.

Umfang des Dreieckes (bei fortlaufender Orientierung): $a+b+c=0$

Kreis:
Alle Punkte mit festem Abstand zu einem Punkt M: zwei isotrope Geraden (|| x). Ein Kreis hat ∞ viele weitere Mittelpunkte.



Winkel

Winkelberechnung
Pseudoeuklidischer Winkel:

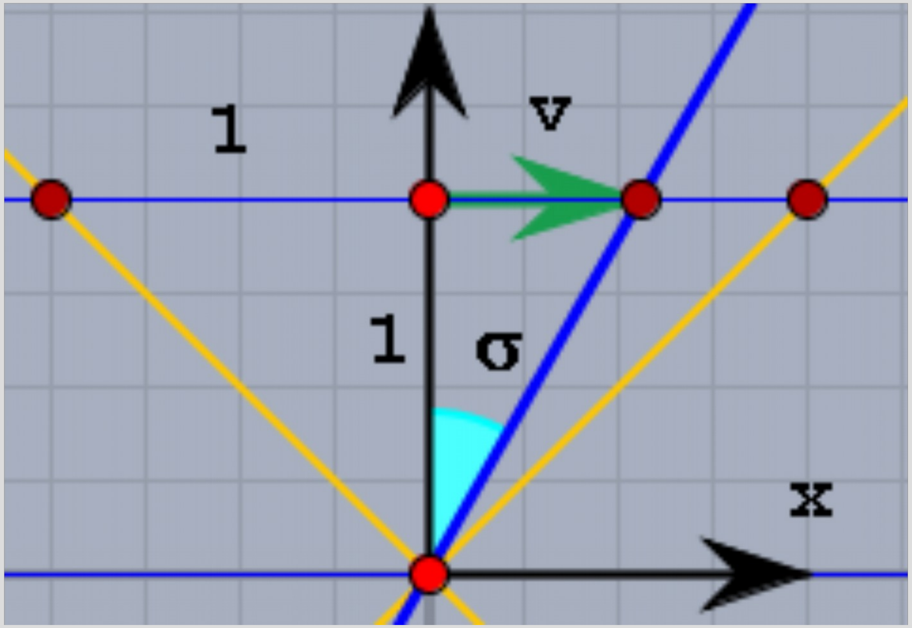
σ= 0.5*ln DV(Lichtgerade, Winkelschenkel)=
= … =(1+v)/(1-v)

Exp(2σ) = (1+v)/(1-v)
Rechnet man v heraus, ergibt sich (v = Geschwindigkeit)

v = tanh(σ) bzw.

σ = atanh(v)

Galilei-Winkel =v (eingezeichnet)



Winkel (-summe)

Winkel
Strecke auf einer isotropen Geraden im Abstand 1 zum Winkelscheitel, also

$0 \leq$ Winkel $\leq \infty$

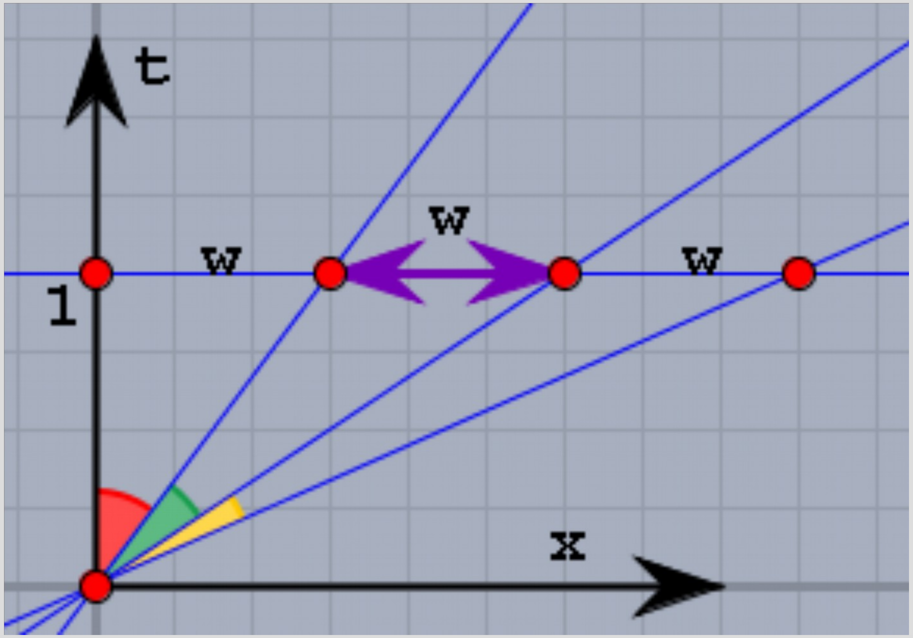
Winkel zu einer isotropen Geraden:

∞

Bunt markiert: drei gleiche Winkel
w=0.75

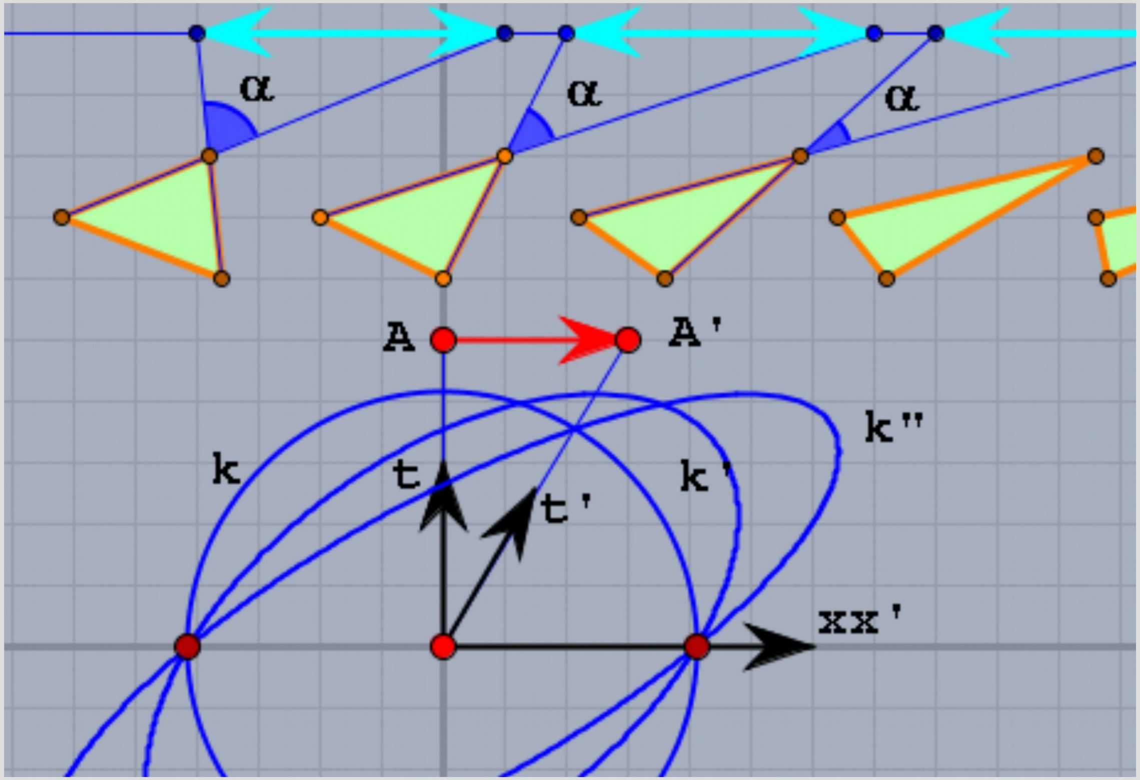
Winkelsumme im Dreieck:

$$\alpha+\beta+\gamma = 0$$



Die Galilei Transformation als affine Scherung

Gegeben eine durch das Punktepaar AA' festgelegte Galilei Transformation.
Weiters:
Das Bild eines Kreises bei ein- bzw. zweimaliger Anwendung
Das Bild eines Dreieckes bei mehrmaliger Anwendung
Schön zu sehen die Winkeltreue



Peripheriewinkelsatz

Gegeben $A(x_1,t_1)$ und $B(x_2,t_2)$.
Gesucht: alle $P(x,t)$, so daß
Winkel APB = k ist,

$k = k_A - k_B = P_1A_1 - P_1B_1$
(die Anstiege werden auf isotropen Geraden || x) gemessen,
$k=\Delta x / \Delta t$.
$k = (x - x_1)/(t - t_1) - (x - x_2)/(t - t_2)$

…(Wald- & Wiesen Analytische Geometrie)…
ergibt einen quadratischen Ausdruck der Bauart

$x = u*t^2 + v*t + w$, $u=k/\Delta t$

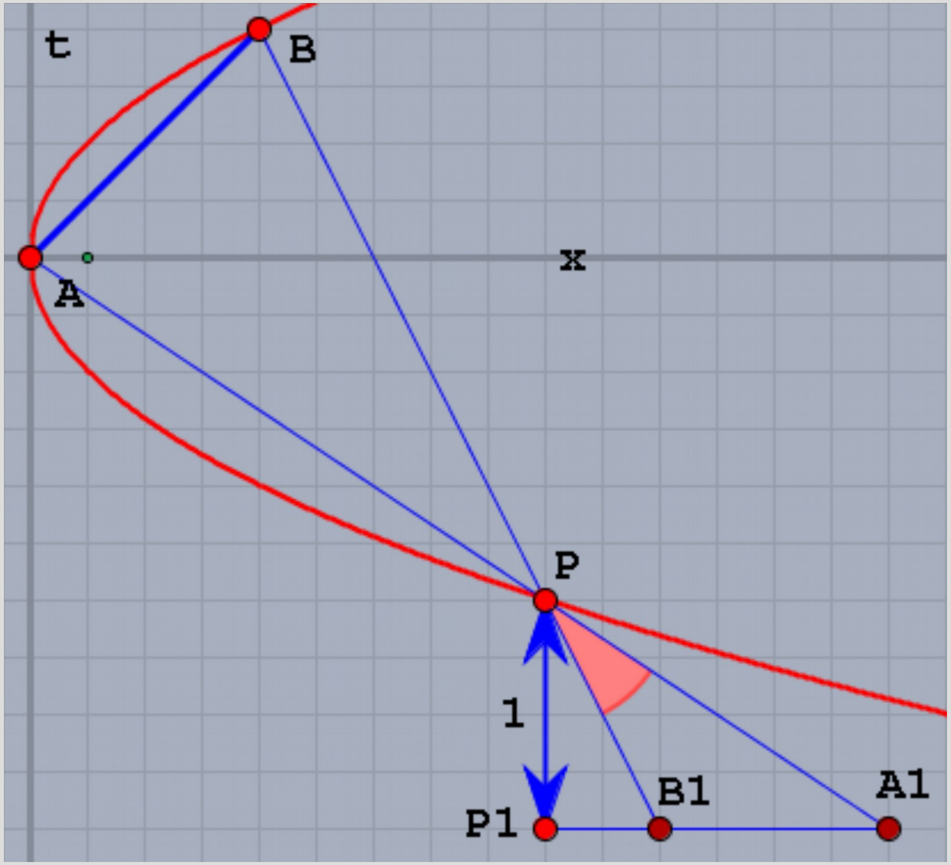
Der Peripheriewinkelkreis ist also eine Parabel mit Achse x (= isotrop); man kann ihn aber auch mit der Weltlinie einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung identifizieren, die Beschleunigung ist dann $a=2k/\Delta t$

Rechenbeispiel

Gleichförmig beschleunigte Bewegung, $a=2$, daher
$x=t^2$ (Parabel mit Achse $||x$)

Darauf drei Punkte $A(0,0)$, $B(1,1)$ fest und $P(t^2,t)$ variabel;
dann ist der Galilei-Winkel, unter dem die Strecke AB von P aus gesehen wird konstant $=1$

Man erhält nämlich (Wald- & Wiesen Analytische Geometrie)
:$A_1(t^2+t+1,t+1)$, $B_1(t2+t,t+1)$ und
$Dt=1$
(die Zeichnung ist real unmöglich, geometrisch aber natürlich korrekt)



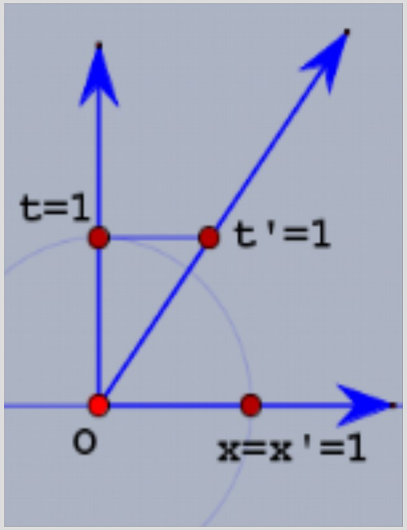
Gegenüberstellung

<table>
<tr><td>Punkt</td><td>Ereignis</td></tr>
<tr><td>Gerade (nicht ||x)</td><td>Gleichförmige Bewegung</td></tr>
<tr><td>Isotrope Gerade (||x)</td><td>Zeitpunkt</td></tr>
<tr><td>Spanne (Δx)</td><td>Örtliche Entfernung
gleichzeitiger Ereignisse</td></tr>
<tr><td>Abstand (Δt)</td><td>Zeitdifferenz</td></tr>
<tr><td>Entfernung (||x) paralleler
Geraden</td><td>Abstand zweier gleichförmig
bewegter Punkte zur selben Zeit</td></tr>
<tr><td>Kreis (zwei Gerade //x)</td><td>Ereignisse r Zeiteiheiten vor
oder nach einem Ereignis</td></tr>
<tr><td></td><td>Relativgeschwindigkeit</td></tr>
<tr><td>Winkel zweier Geraden
Peripheriewinkelkreis (Parabel
//x)</td><td>Weltlinie einer gleichförmig
beschleunigten Bewegung</td></tr>
</table>

Einheiten

Festlegung der Einheiten

System Σ und ein gegen dieses mit v bewegtes System Σ'.
x´-Achse: t´=0, =x-Achse
t´-Achse : x´=0, also in Σ durch x = v t, Gerade mit der Steigung v
Einheiten: in Σ willkürlich fest.
Wegen t´=t: gleichzeitige Ereignisse auf Parallel er zu x´=x -Achse



Gleichzeitigkeit
zweier Ereignisse A und B in **Σ** und **Σ´**

A und B müssen auf einer Parallelen zu x=x´liegen, sie sind in beiden Systemen gleichzeitig.