NEUIGKEITEN ZUM SATZ DES PYTHAGORAS UND DEN PLATONISCHEN KÖRPERN

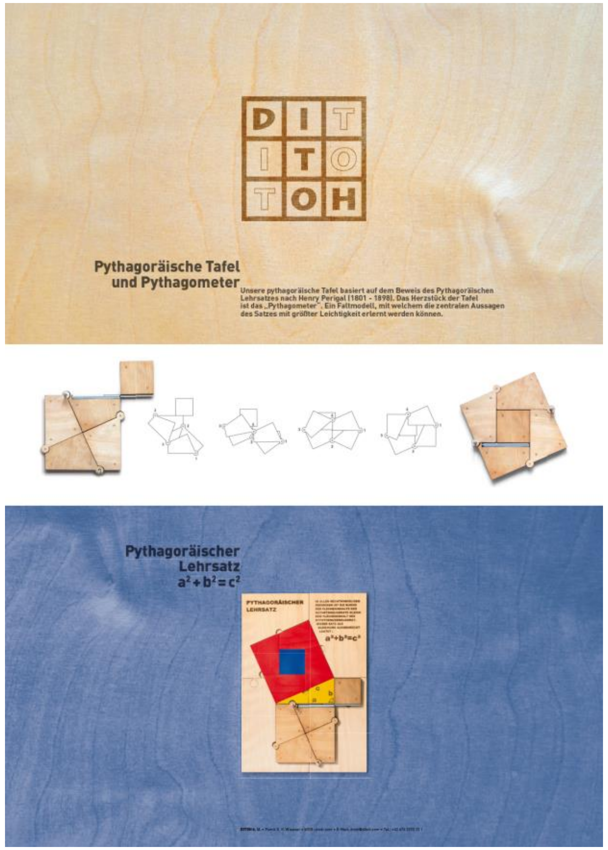
“DIE MATHEMATIK ALS FACHGEBIET IST SO ERNST, DASS MAN KEINE GELEGENHEIT VERSÄUMEN SOLLTE, SIE ETWAS UNTERHALTSAMER ZU GESTALTEN.”

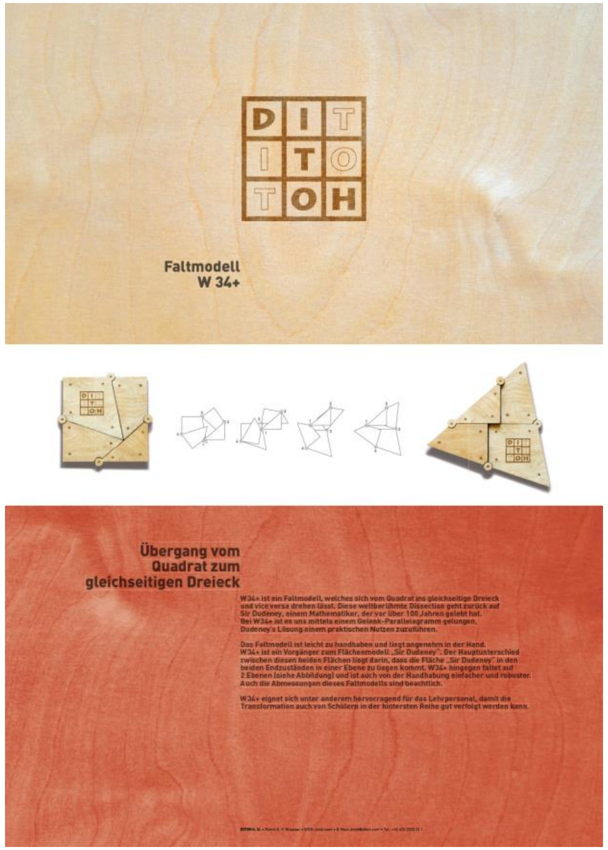
NEUIGKEITEN ZUM SATZ DES PYTHAGORAS UND DEN PLATONISCHEN KÖRPERN

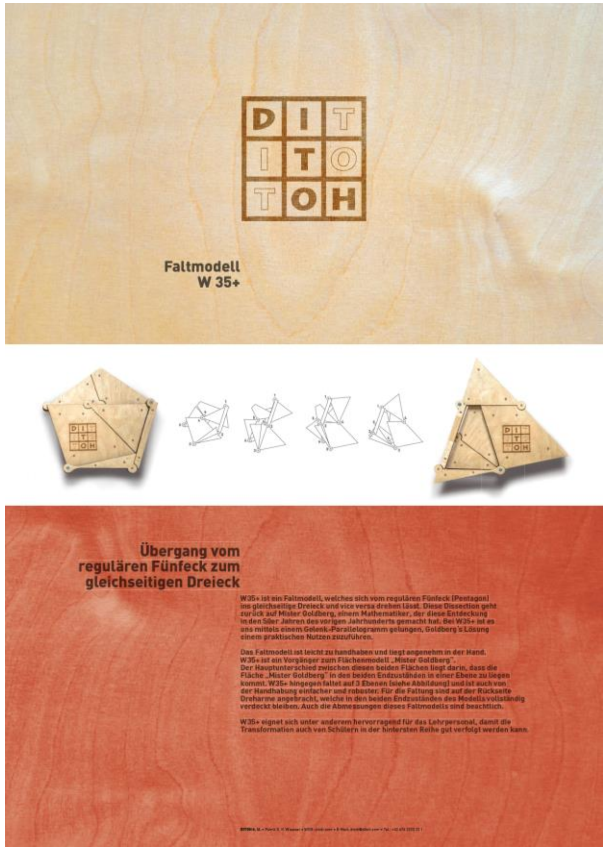
“DIE MATHEMATIK ALS FACHGEBIET IST SO ERNST, DASS MAN KEINE GELEGENHEIT VERSÄUMEN SOLLTE, SIE ETWAS UNTERHALTSAMER ZU GESTALTEN.”

BLAISE PASCAL (1623 – 1662)

NEUIGKEITEN ZUM SATZ DES PYTHAGORAS UND DEN PLATONISCHEN KÖRPERN







THEMEN DES HEUTIGEN VORTRAGES

I) Der Satz des Pythagoras

- Pythagometer®
- Die Pythagoräische Tafel

II) Die Platonischen Körper

- W34 & Sir Dudeney
- W35 & Mister Goldberg
- Die Platonischen Körper

III) Ausblick auf den Workshop

I) Der Satz des Pythagoras

Worum geht es?

Ziel unserer Überlegungen ist es, ein Gelenkmodell zu finden, mit welchem die zentralen Punkte dieses Lehrsatzes in wenigen Schritten gezeigt und erklärt werden können. Als Basis unseres Gelenkmodells dient die Zerlegung des Satzes von Pythagoras nach Perigal:

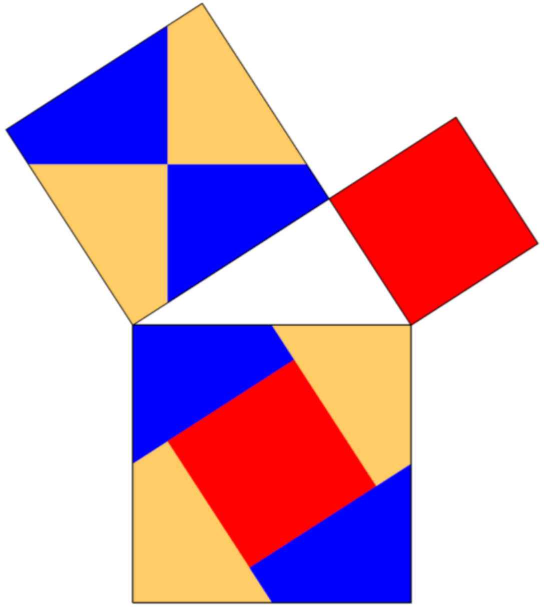
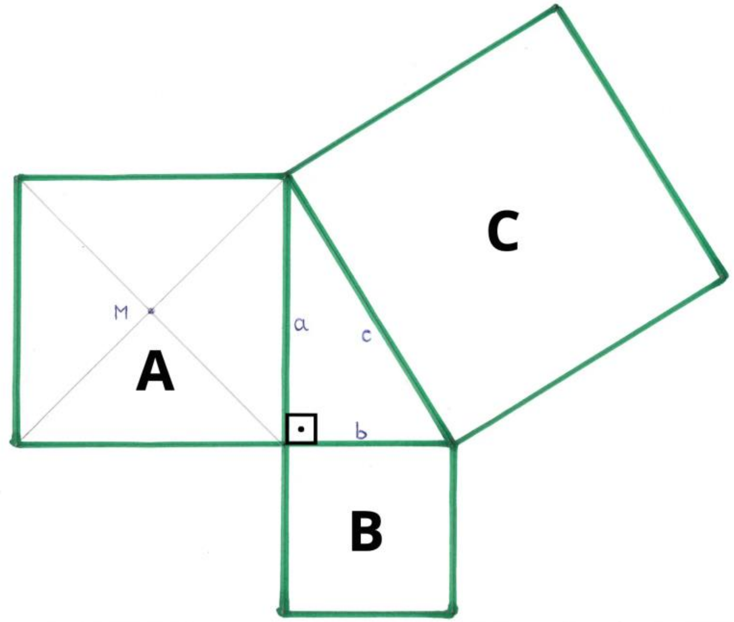


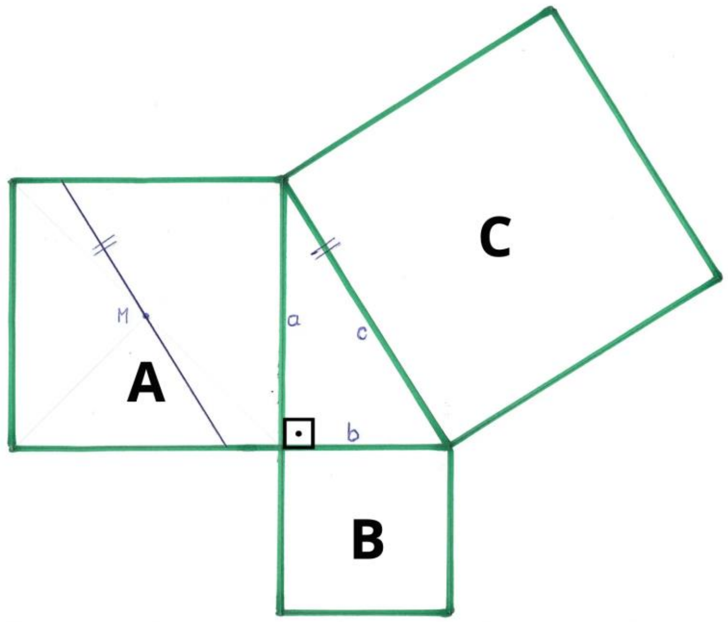
Abb. 1: Zerlegung nach Henry Perigal (1801 - 1898)

Zerlegungsbeweis des Satzes von Pythagoras nach Perigal:

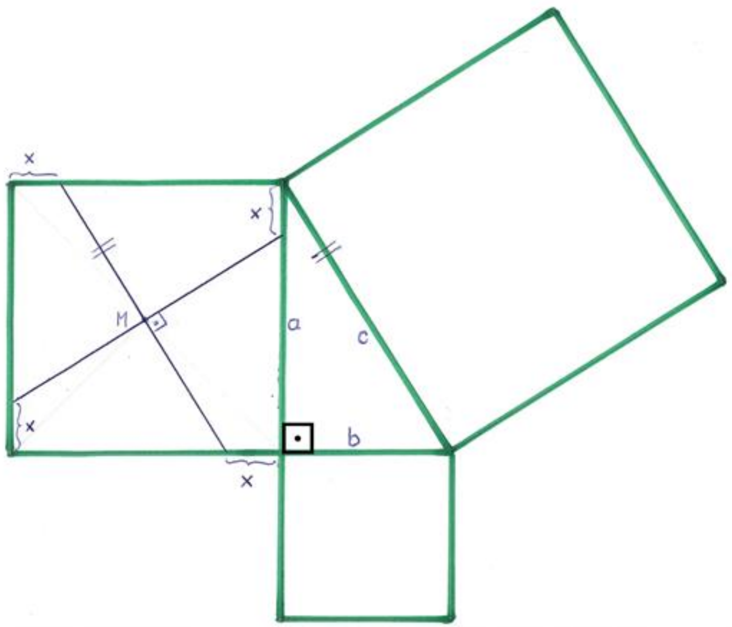
1



2

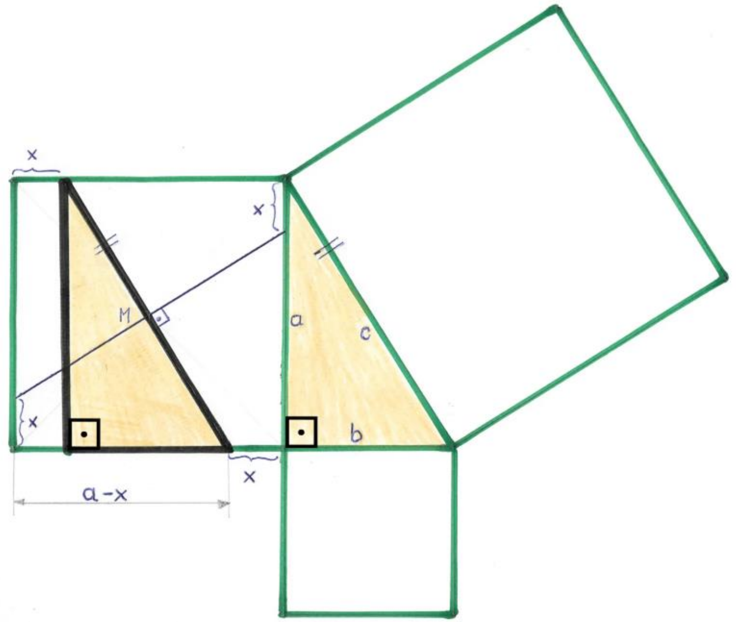


3

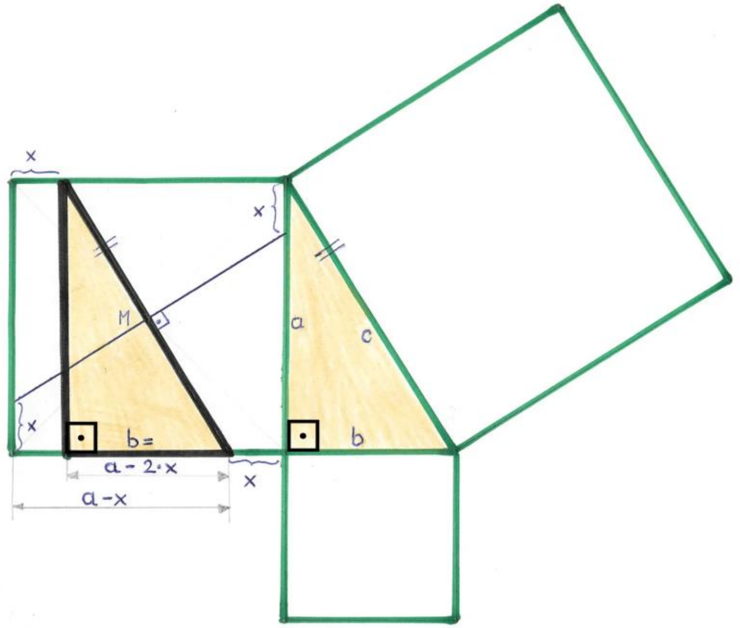


Zerlegungsbeweis des Satzes von Pythagoras nach Perigal:

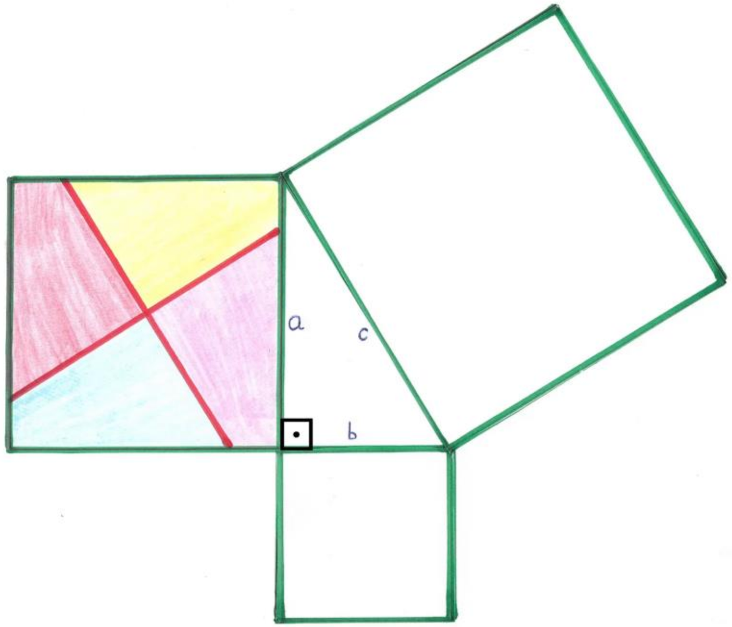
4



5

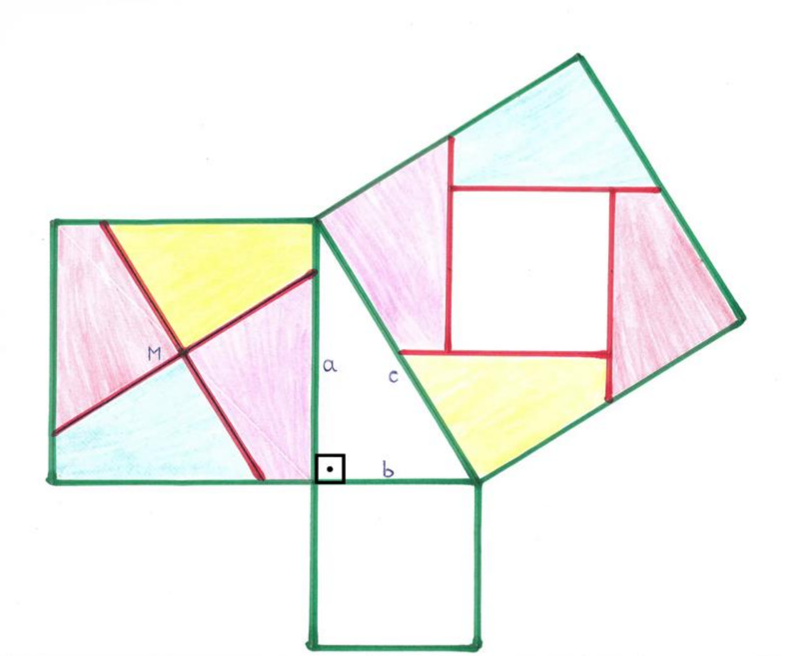


6

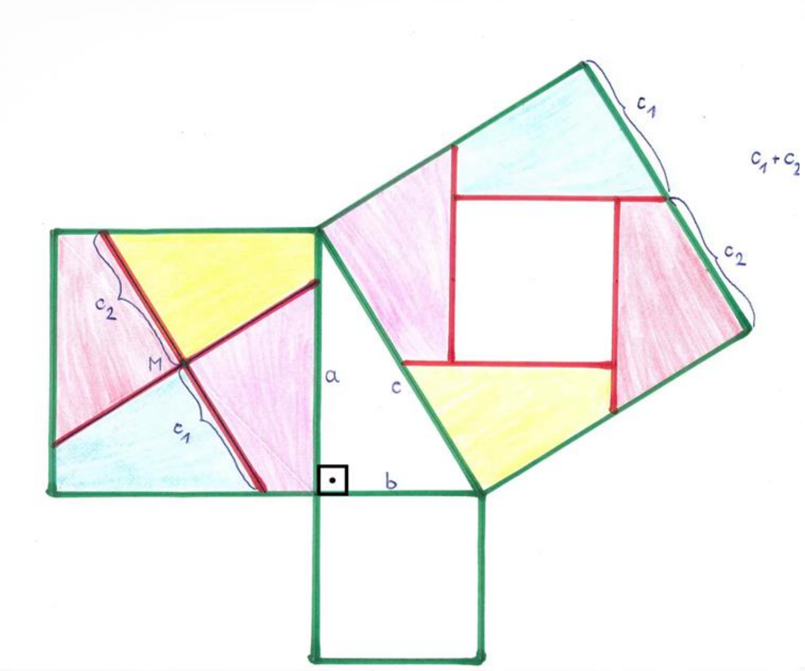


Zerlegungsbeweis des Satzes von Pythagoras nach Perigal:

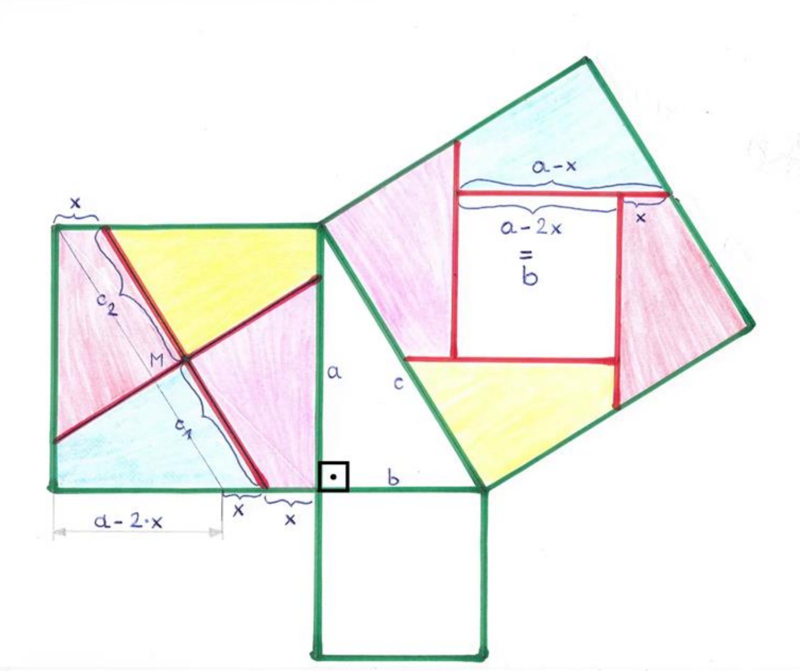
7



8



9



Zerlegungsbeweis des Satzes von Pythagoras nach Perigal:

10

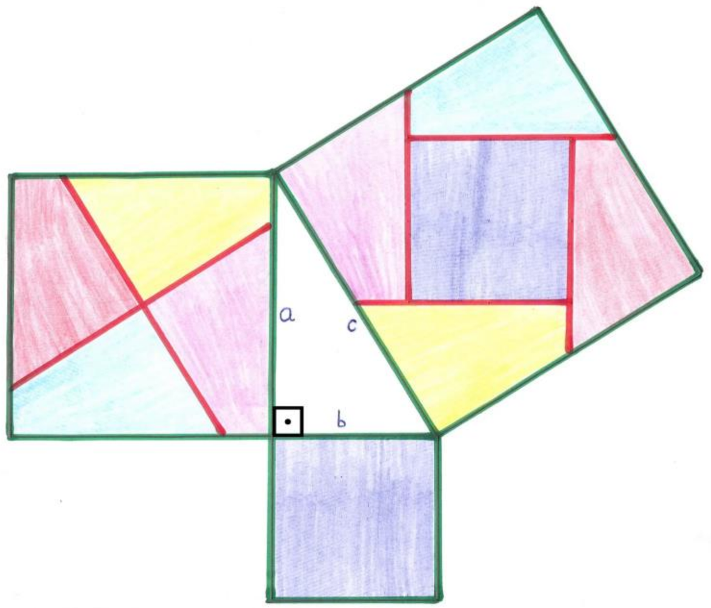


Abb. 2: Zerlegungsbeweis des Satzes von Pythagoras nach Perigal

Neuheit: Das Pythagometer®

Ein Gelenkmodell, das alle Teile verbindet

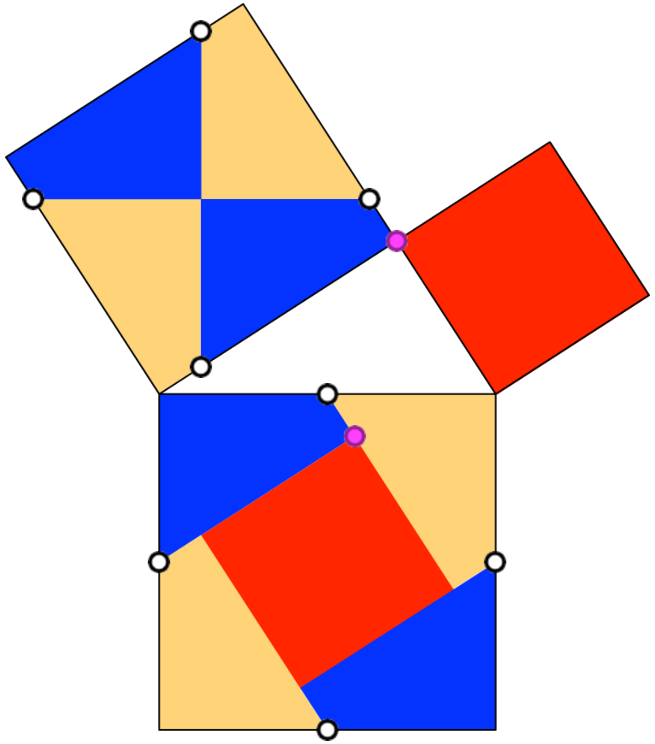


Abb. 3: Gelenkmodell - dieses Faltmodell nennt sich Pythagometer®

Kinematik des Pythagometer®

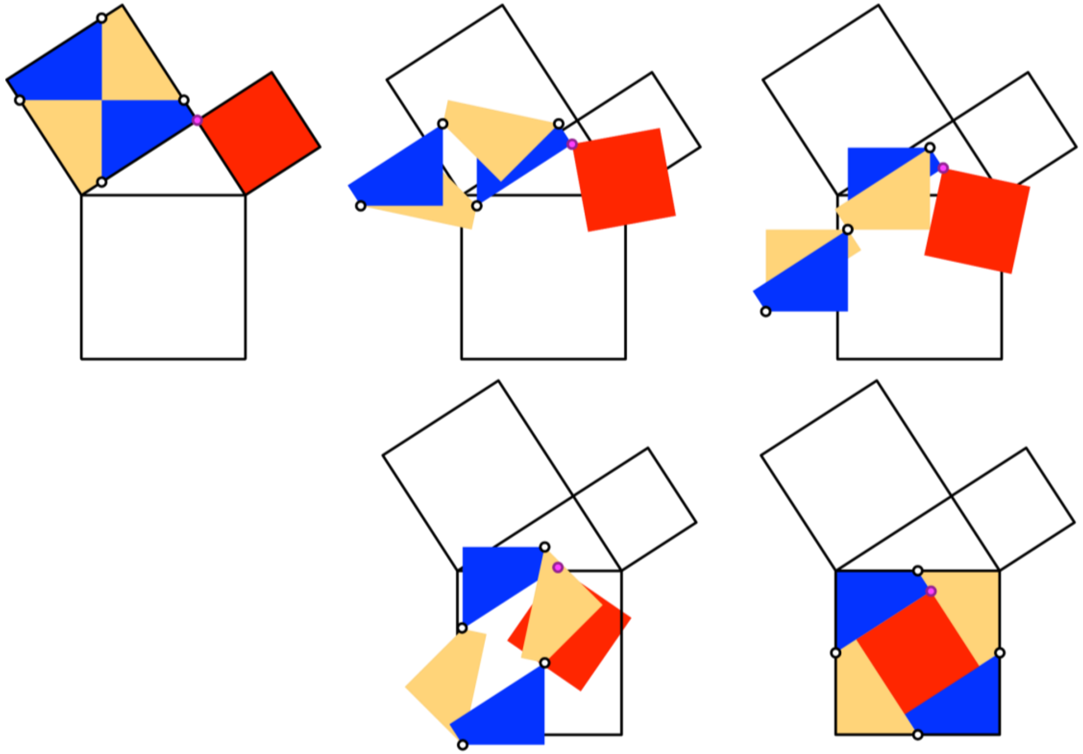


Abb. 4: Transformation der Kathetenquadrate ins Hypotenusenquadrat

Wie sieht dies in der Praxis aus?

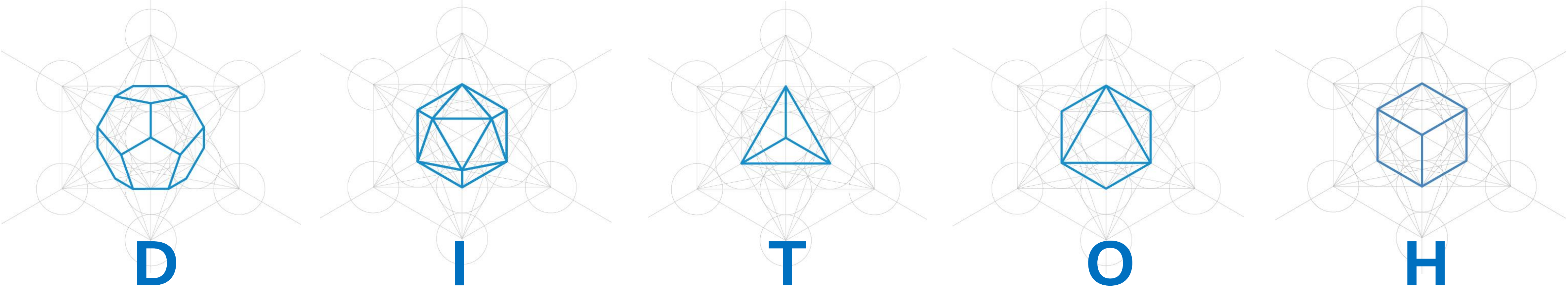
Abb. 5: Transformation der Kathetenquadrate ins Hypotenusenquadrat mit Hilfe des Pythagometer®

Vorteile des Pythagometer® und der Pythagoräischen Tafel

- Die Katheten Quadrate bilden ein geschlossenes System
- Der Mechanismus ist sehr stabil - kein Element geht verloren
- Die zentralen Eckpunkte des Satzes von Pythagoras prägen sich dank dem Pythagometer® ins Gedächtnis
- Keine Berührungsängste für die Schüler - die einzelnen Puzzle Teile bewegen sich automatisch an die richtige Stelle
- Größe der Pythagoräischen Tafel ist ideal für die Präsentation in einer Schulklasse
- Produkt aus Holz - Umweltfreundlich
- Tafel ist großzügig beschriftet
- Puzzleteile sind identisch mit den Flächenteilen des Pythagometer®

Video:

II) Die Platonischen Körper



Unser Ziel ist es, die 5 Platonischen Körper mit einer minimalen Anzahl an Flächen aufzubauen.

altes System: 38 Flächen

unser System: nur 20 Flächen !

Um unser Ziel zu erreichen, benötigen wir 2 spezielle Faltmodelle:

Vorbereitung für das erste Faltmodell

Worum geht es?

Wir interessieren uns für die Dissection von Sir Henry E. Dudeney (1857 – 1930). Dies deshalb, weil sie vom gleichseitigen Dreieck ins Quadrat transformiert, und wir genau diese Flächen auch bei den Platonischen Körpern antreffen.

Zerlegungsgleichheit

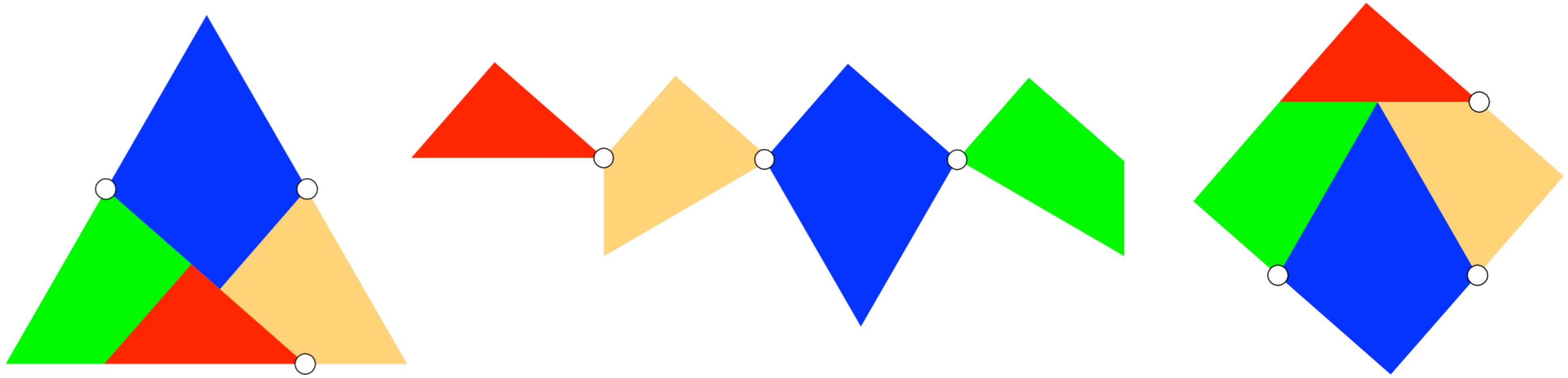
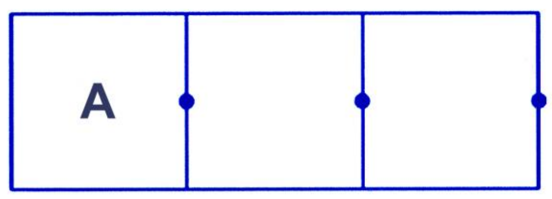
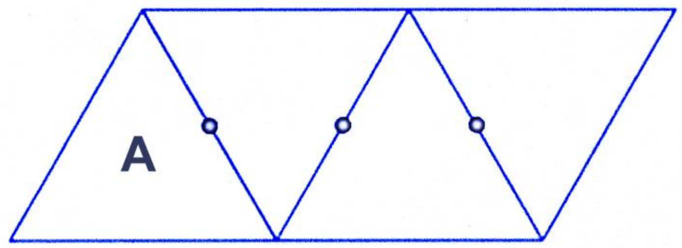


Abb. 1: Gemeinsame Zerlegung mit vier Teilen nach Dudeney

Wie kommt man auf diese Zerlegung?





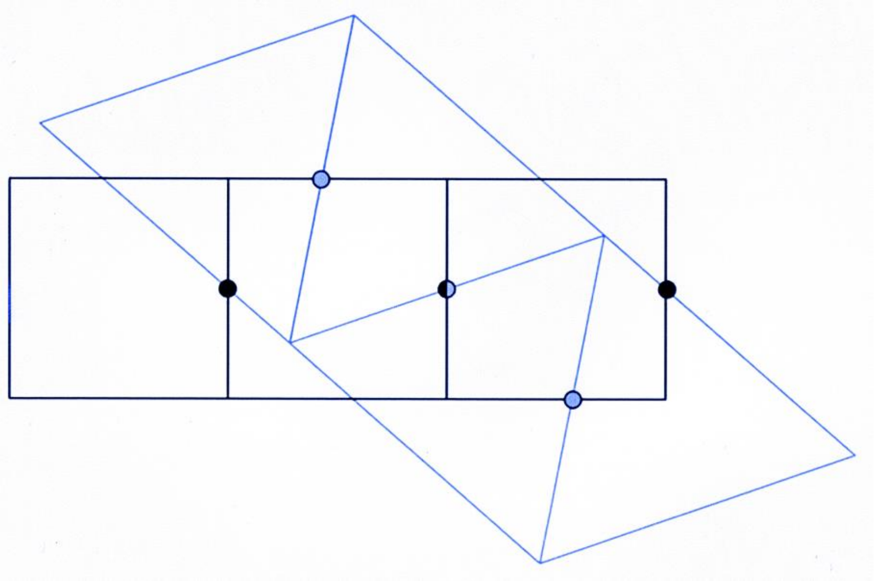


Abb. 2: T (Trapez) - Streifen - Methode

Allein mit dem Wissen, dass beide Flächen gleich groß sein müssen, können wir nun sämtliche Längen und Winkel berechnen, welche für die Konstruktion von Dudeney‘s Zerlegung notwendig sind.

Bezeichnungen und Daten

Wir setzen den gemeinsamen Flächeninhalt 1.
Das Quadrat (Abb. 3) hat also die Seitenlänge a = 1.
Für die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks ergibt sich aus dem Flächeninhalt 1:

$$s = 2/\sqrt[4]{3} \simeq 1.5196713713 \qquad (1)$$

Für s/2, die in der Abbildung 2 mehrfach erscheint, daher:

$$s/2 = 1/\sqrt[4]{3} \simeq 0.7598356856 \qquad (2)$$

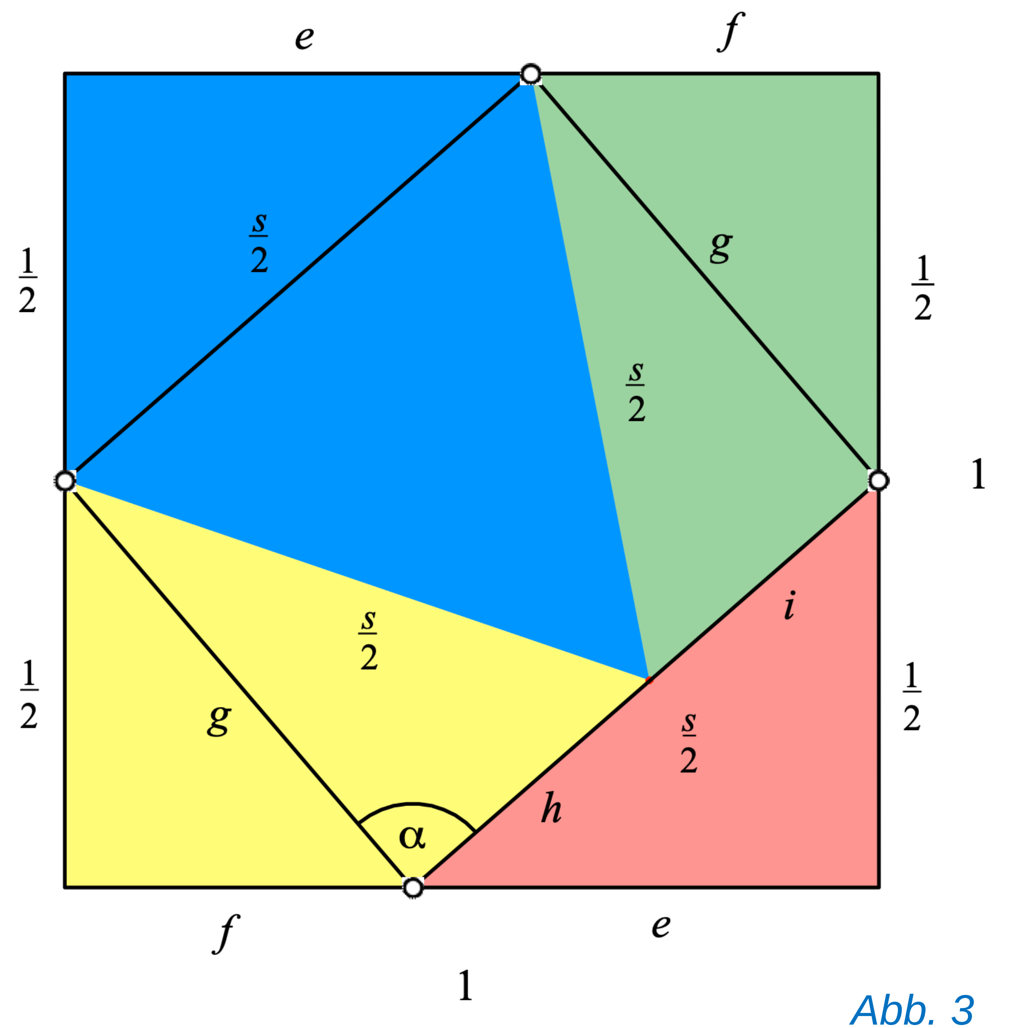


Abb. 3

Bezeichnungen und Daten

Weiter ist:

$e = \sqrt{(s/2)^2 - (1/2)^2} = \sqrt{1/\sqrt{3} - 1/4} \simeq 0.5721453217$ (3)

$f = 1 - e \simeq 0.4278546782$ (4)

$g = \sqrt{f^2 + (1/2)^2} \simeq 0.6580726599$ (5)

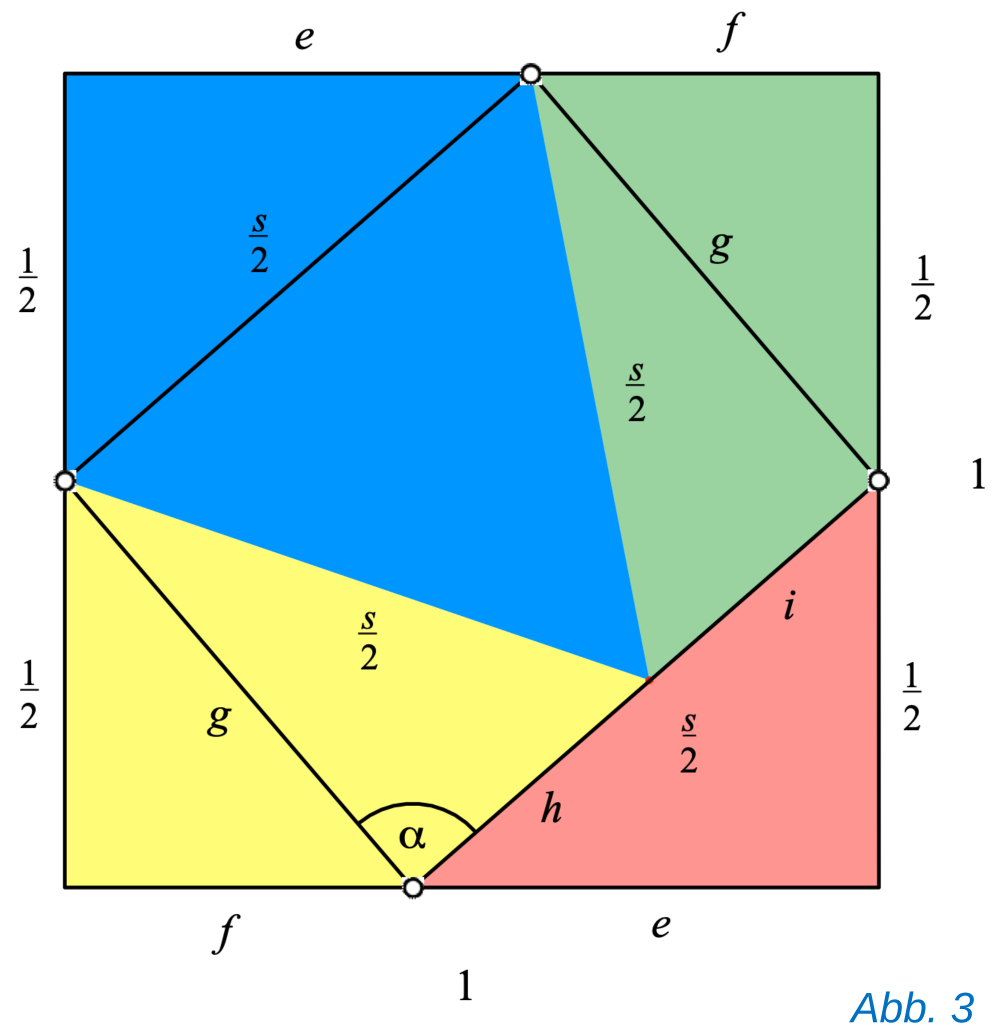


Abb. 3

Bezeichnungen und Daten

Das schwarz eingezeichnete Viereck ist ein Parallelogramm.
Sein spitzer Winkel ist:

$$\alpha = 180° - arctan[1/(2e)] - arctan[1/(2f)] \simeq$$

$$89.4035784945° \tag{6}$$

Das Parallelogramm ist also kein Rechteck!

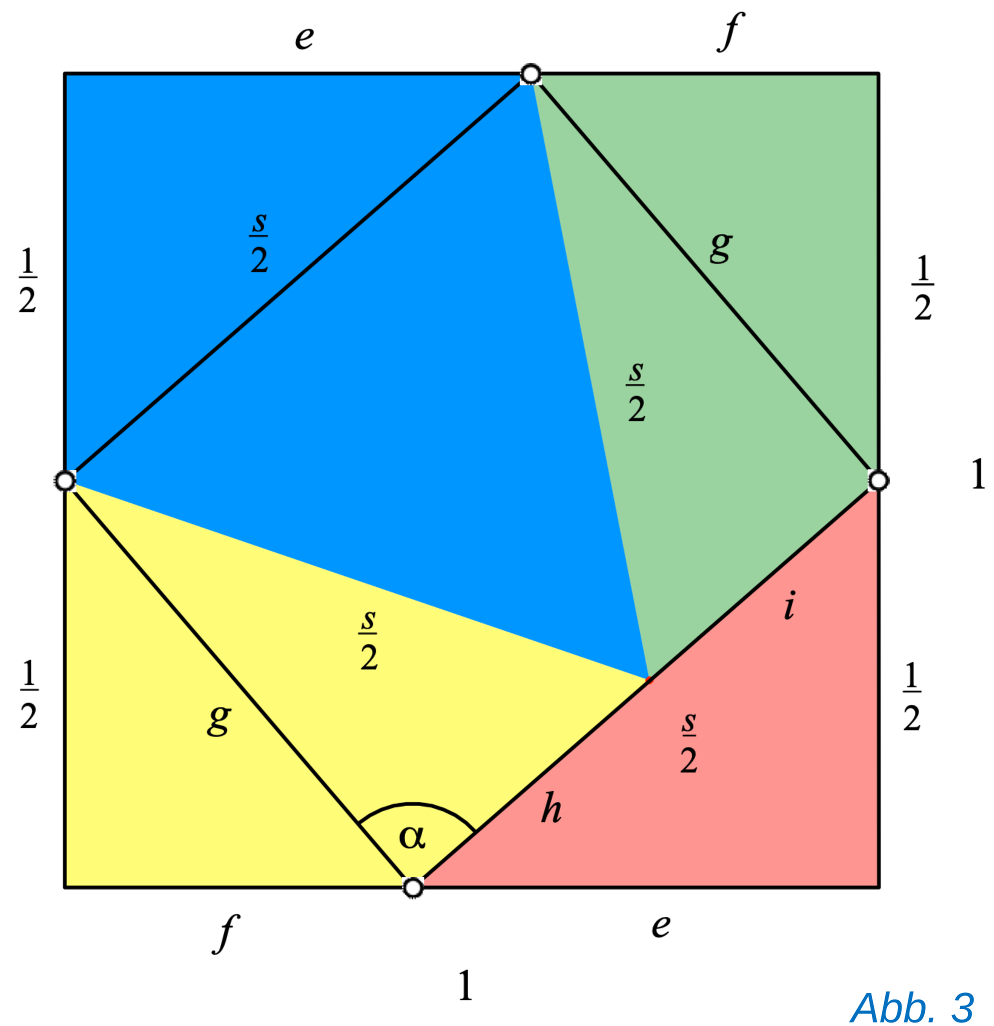


Abb. 3

Bezeichnungen und Daten

Weiter ist:

$h = s/4 + g \times cos(\alpha) \simeq 0.3867679389$ (7)

und

$i = s/4 - g \times cos(\alpha) \simeq 0.3730677466$ (8)

(7) & (8) ergeben in Summe (2).

Damit sind die vier Teile der Zerlegung konstruierbar.

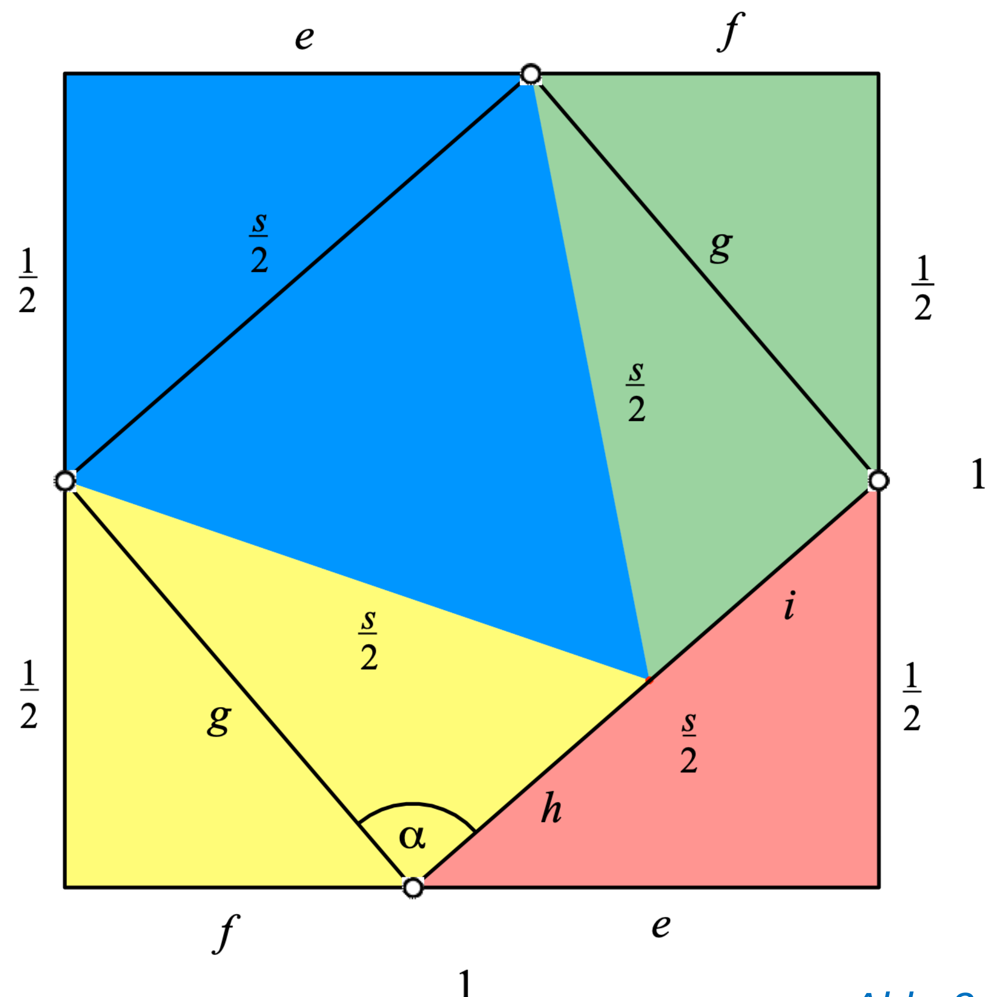


Abb. 3

Neuheit: Ein Gelenkmodell, das alle Teile verbindet !

Bisher:
Dudeney's Zerlegung beruht auf 3 Gelenken

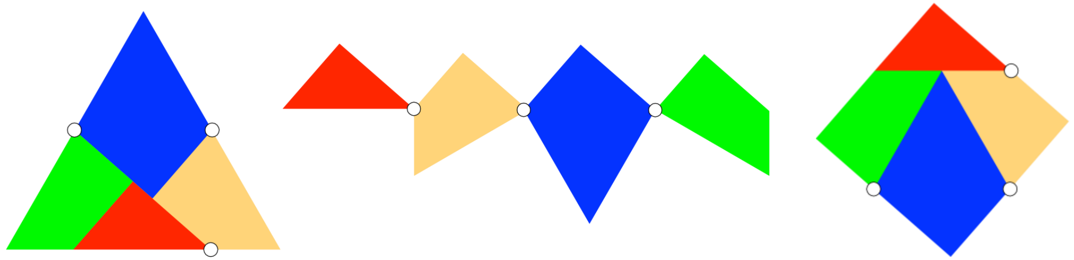


Abb. 4: Klassisches Verfahren

NEU:
Unsere Zerlegung beruht auf 4 Gelenken

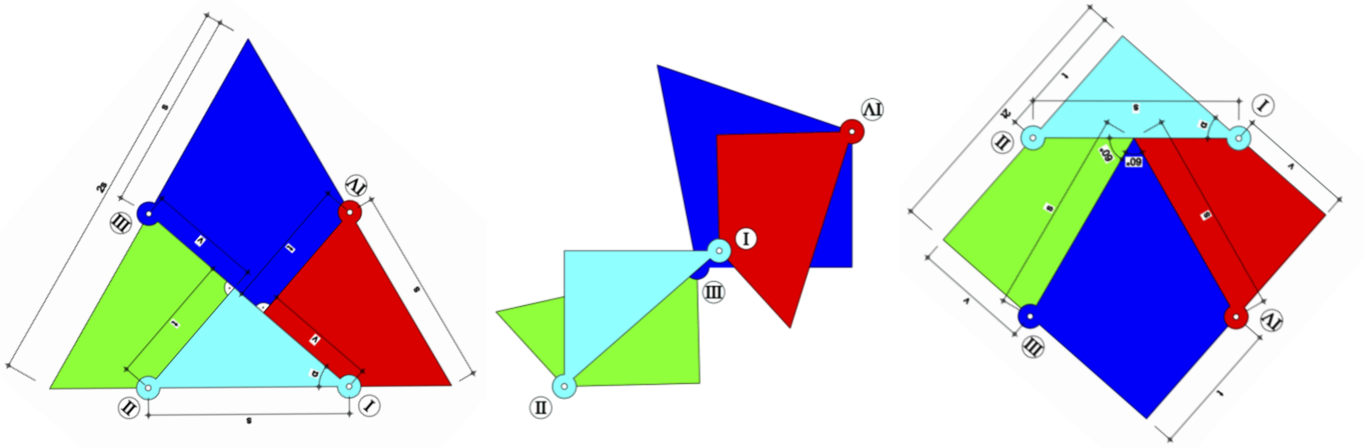


Abb.5: Parallelogramm Gelenkmodell

Anzahl der Ebenen

Faltmodelle W34, W34+ verfügen über 2 Ebenen

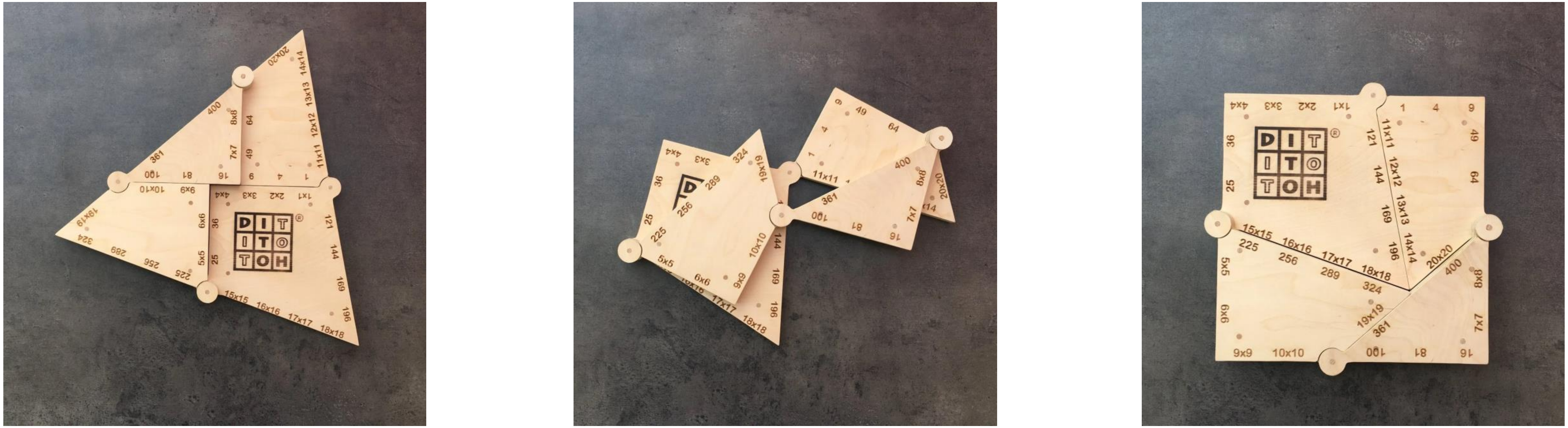
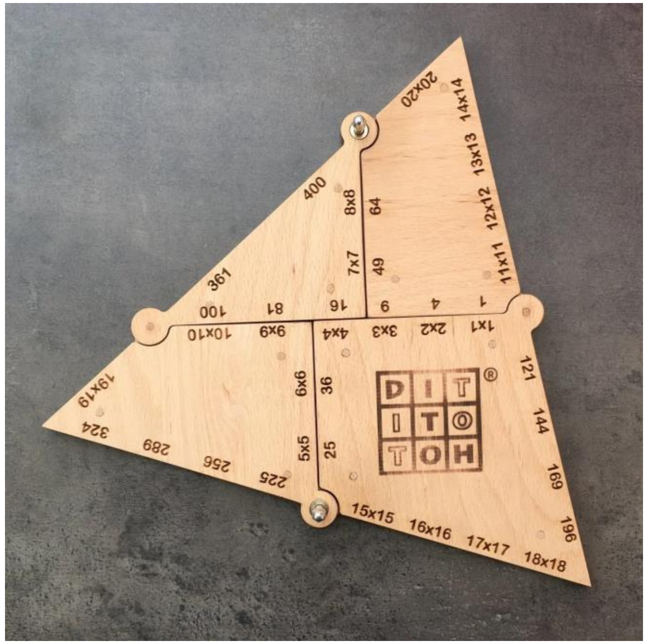
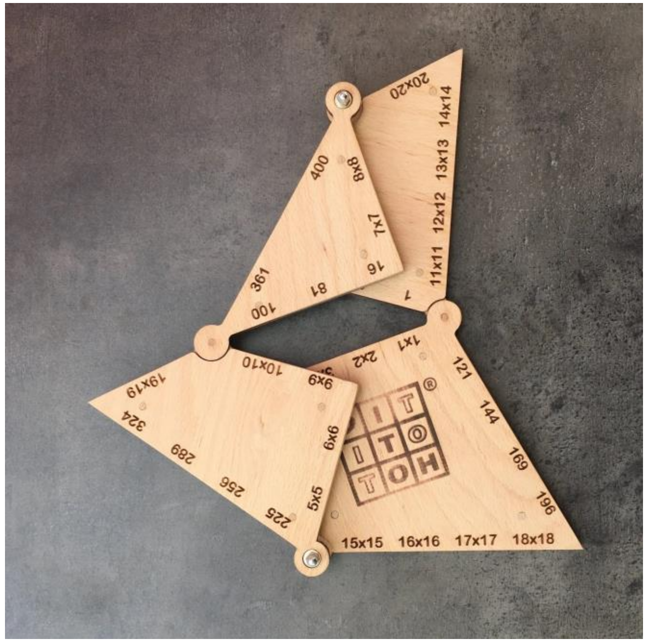


Abb. 6: Transformation gleichseitiges Dreieck - Quadrat

Anzahl der Ebenen

Faltmodell „Sir Dudeney“ verfügt über 1 Ebene – Aufbau der Platonischen Körper





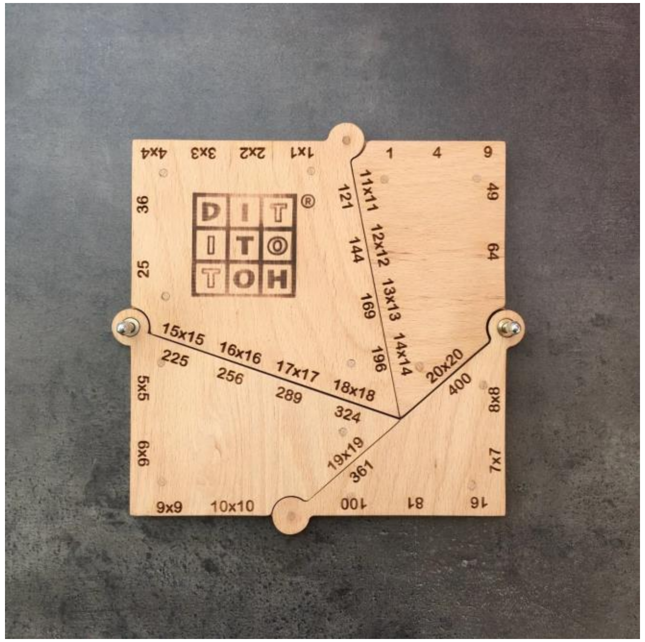
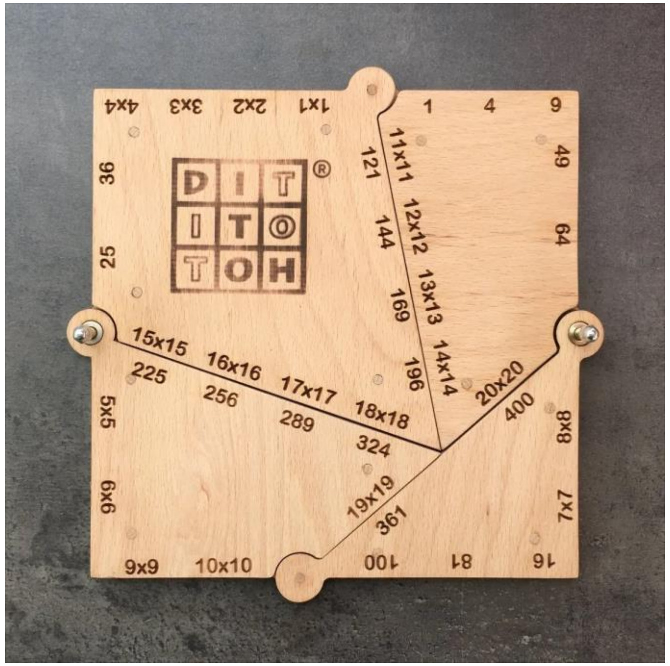


Abb. 7: Transformation gleichseitiges Dreieck - Quadrat / Aufbau der Platonischen Körper

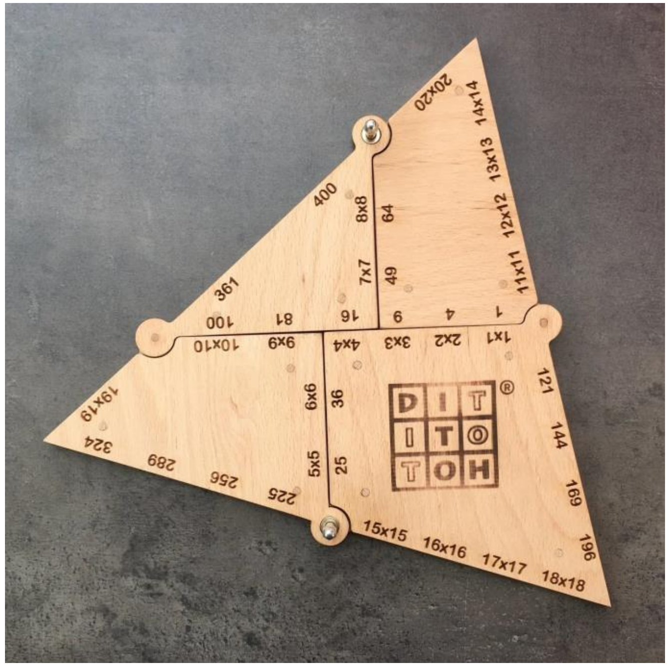
Beschriftung der Modelle W34, W34+ und Sir Dudeney

Zusätzlicher Lerneffekt! Motivation!

Vorderseite - Faltmodell „Sir Dudeney“



Kleines Einmaleins



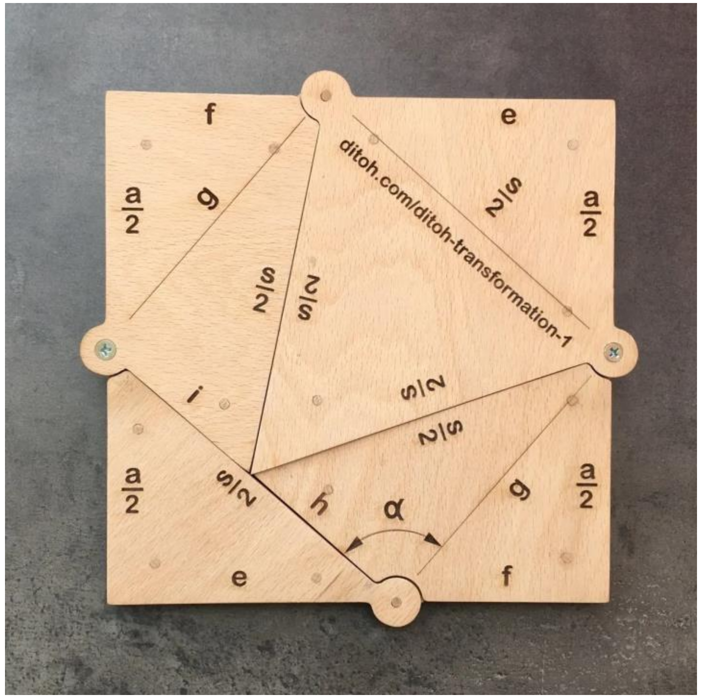
Großes Einmaleins

Abb. 8

Rückseite - Faltmodell Sir Dudeney

Zusätzlicher Lerneffekt! Motivation!

- Geometrie der Fläche



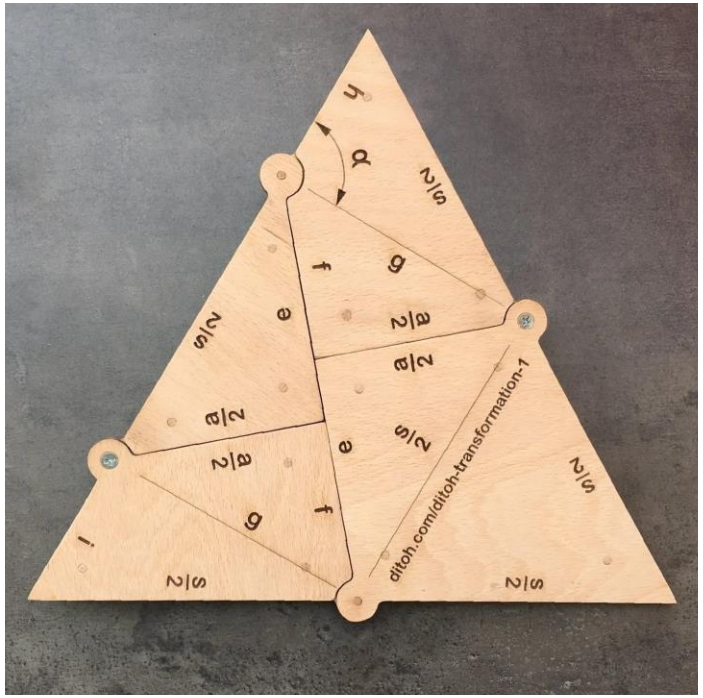


Abb. 9: Geometrie der Fläche

Vorbereitung für das zweite Faltmodell

Worum geht es?

Wir interessieren uns für die Dissection von Herrn Michael Goldberg (1902 – 1990). Dies deshalb, weil diese Transformation vom gleichseitiges Dreieck ins reguläre Fünfeck transformiert, und wir genau diese Flächen auch bei den Platonischen Körpern antreffen.

Zerlegungsgleichheit

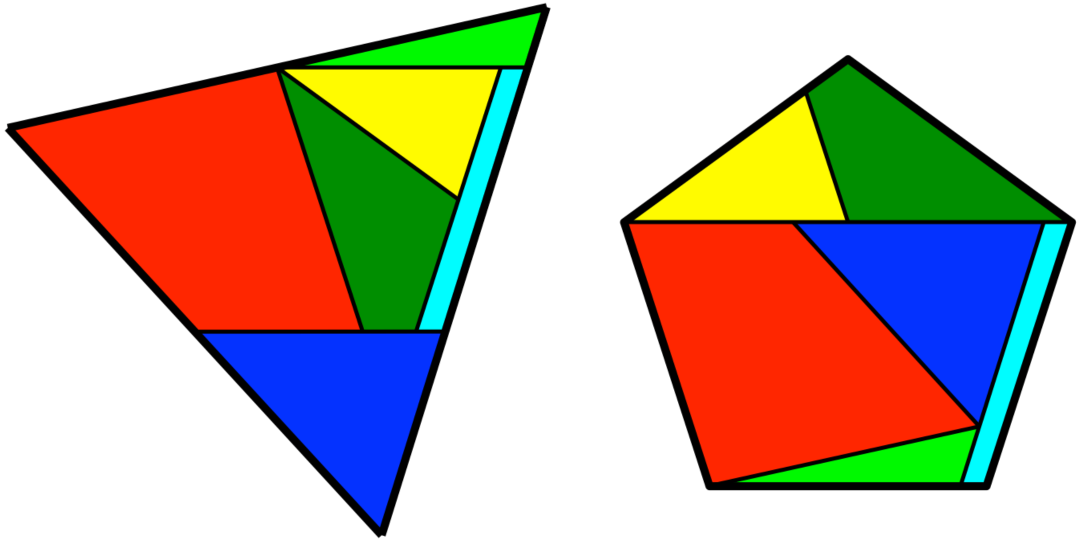


Abb. 1: Gleichseitiges Dreieck und regelmäßiges Fünfeck - 6 Teile

Wie kommt man auf diese Zerlegung?

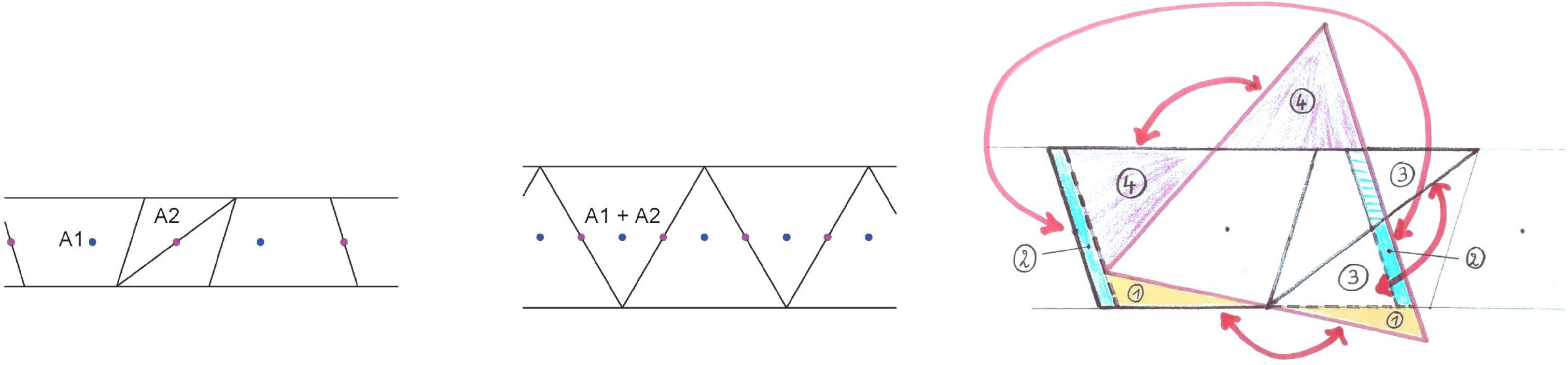


Abb. 2: T (Trapez) - Streifen - Methode

Allein mit dem Wissen, dass beide Flächen gleich groß sein müssen, können wir nun sämtliche Längen und Winkel berechnen, welche für die Konstruktion von Goldberg‘s Zerlegung notwendig sind.

Bezeichnungen und Daten

Wir normieren die Flächen der beiden Polygone auf 1.
Für die Seitenlänge s des gleichseitigen Dreiecks erhalten wir damit:

$$s = 2/\sqrt[4]{3} \simeq 1.5196713713 \tag{1}$$

Für die Seitenlänge u des Fünfecks erhalten wir:

$$u = 2\times\sqrt{[(1/5)\times tan(36°)]} \simeq 0.7623870555 \tag{2}$$

Das Seitenverhältnis ist:

$$s/u \simeq 1.993306891 \tag{3}$$

Die Seitenlänge des Dreiecks ist also fast doppelt so groß wie jene des Fünfecks.

Konstruktives Vorgehen

Φ (Phi) ist die goldene Zahl:

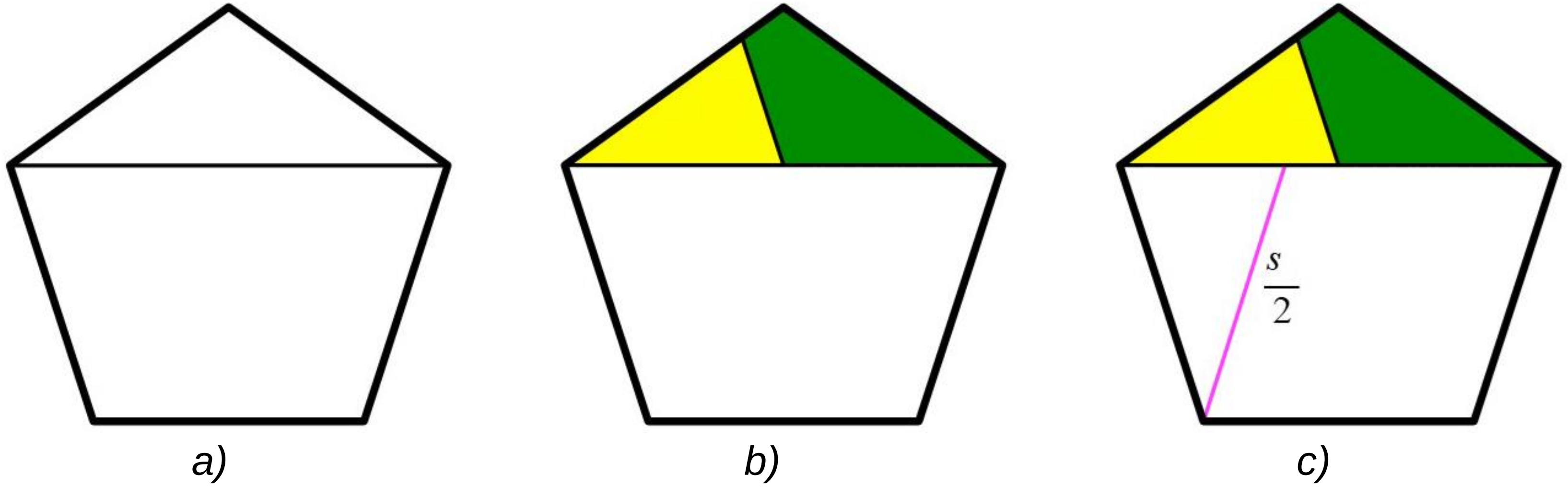


Abb. 3: Erste drei Schritte - Horizontale, Parallele zur li. Topfseite, halbe Dreieckseite

Konstruktives Vorgehen

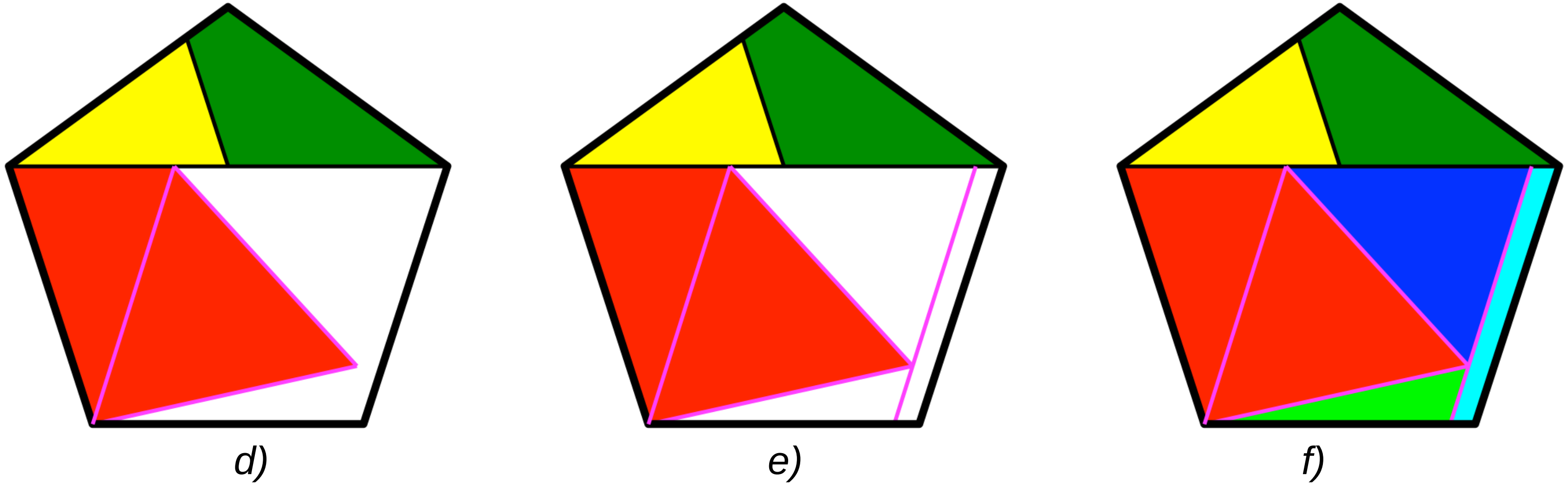


Abb. 4: Ergänzung zum gleichseitiges Dreieck, Parallele zu magenta→ 3 mal 60°, Parallelogramm, hellblaues Viereck kein Parallelogramm

Damit sind die sechs Teile der Zerlegung konstruierbar.

Neuheit: Ein Gelenkmodell, das alle Teile verbindet !

Bisher:
Goldberg‘s Zerlegung verwendet vereinzelt Gelenke

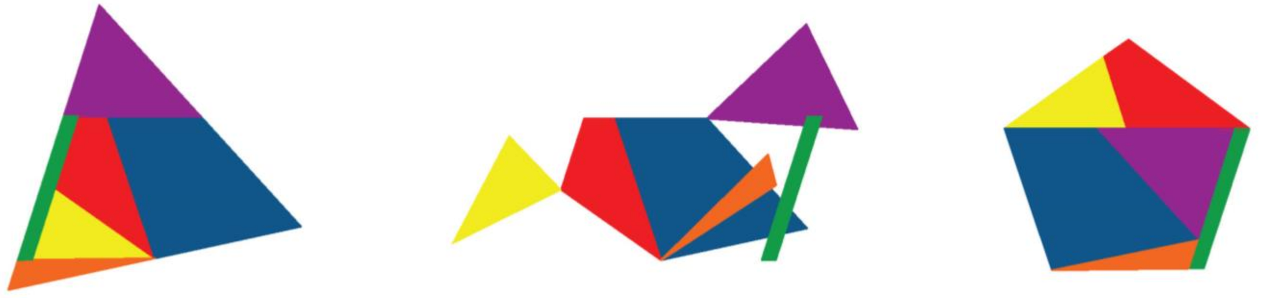


Abb. 5: Klassisches Verfahren

NEU:
Unsere Zerlegung beruht auf 4 Gelenke mit Dreharmen

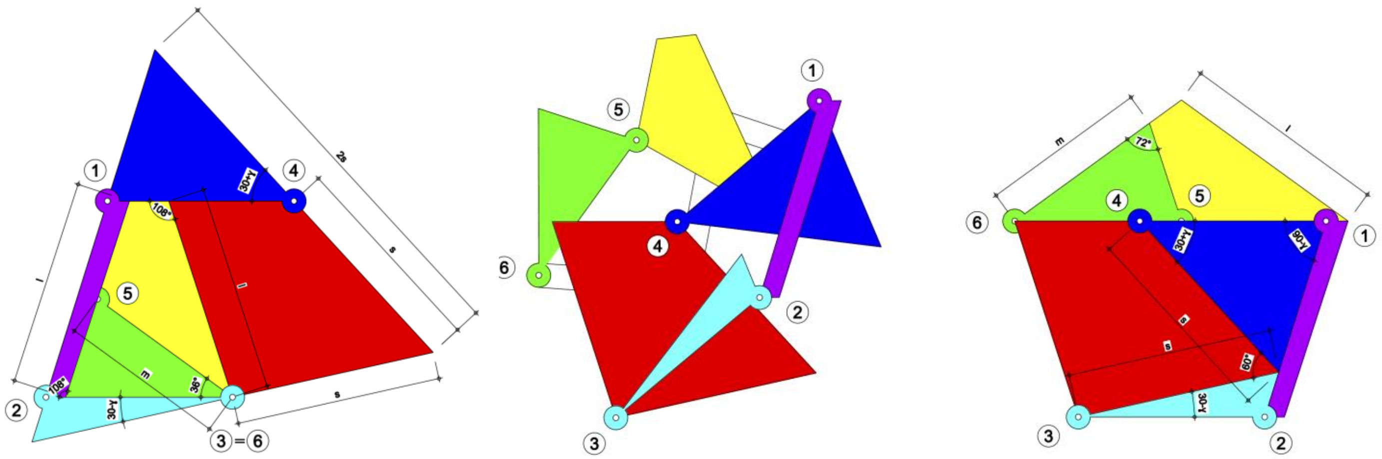


Abb.6: Kinematischer Prozess

Anzahl der Ebenen

Faltmodelle W35, W35+ / 3 Ebenen

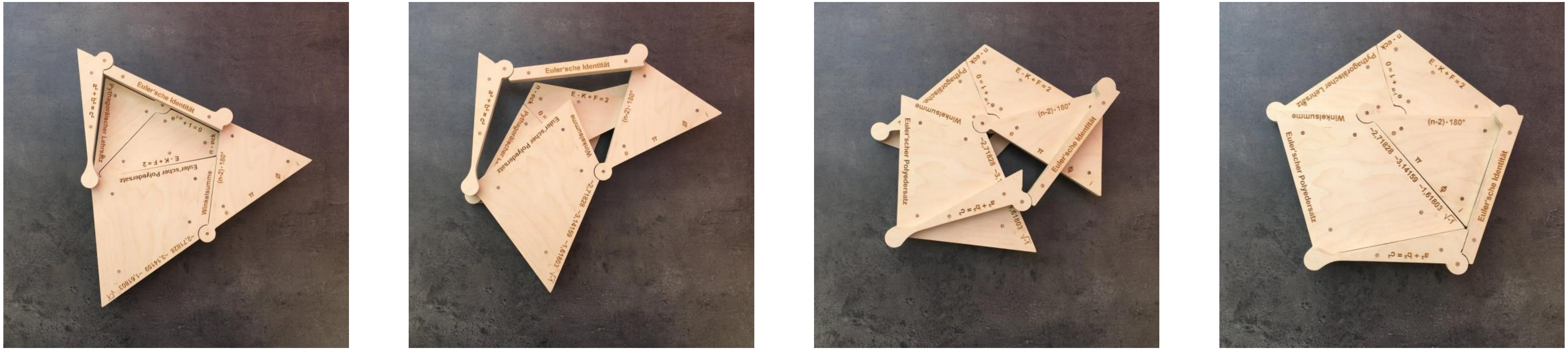


Abb. 7: Transformation gleichseitiges Dreieck - Quadrat / 3 Ebenen

Anzahl der Ebenen

Mister Goldberg / 1 Ebene

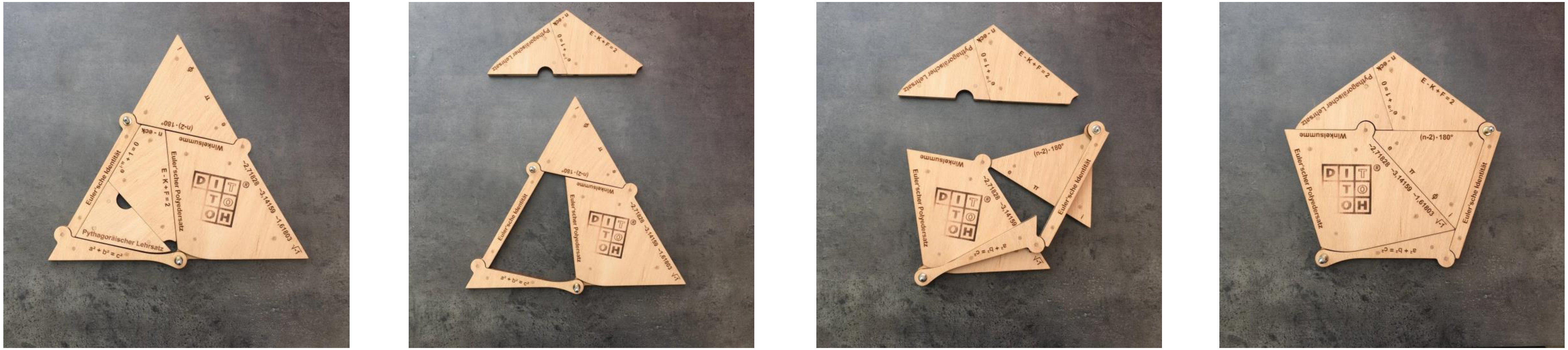


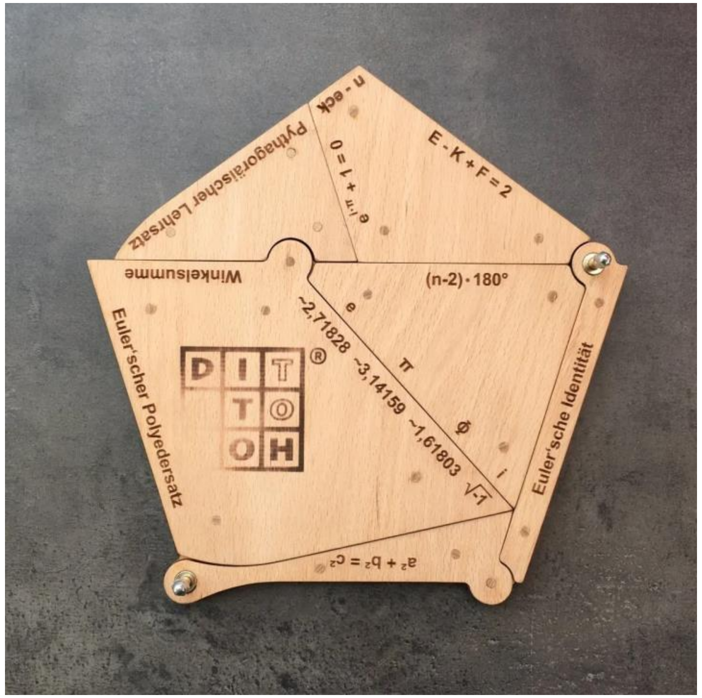
Abb. 8: Transformation gleichseitiges Dreieck - reguläres Fünfeck / 1 Ebene - Aufbau der Platonischen Körper

Beschriftung der Modelle W35, W35+ und Mister Goldberg

Zusätzlicher Lerneffekt! Motivation!

Vorderseite - Faltmodell Mister Goldberg

- Euler'sche Identität
- Euler'scher Polyedersatz
- Pythagoräische Lehrsatz
- Winkelsumme in einem n-Eck
- Konstanten



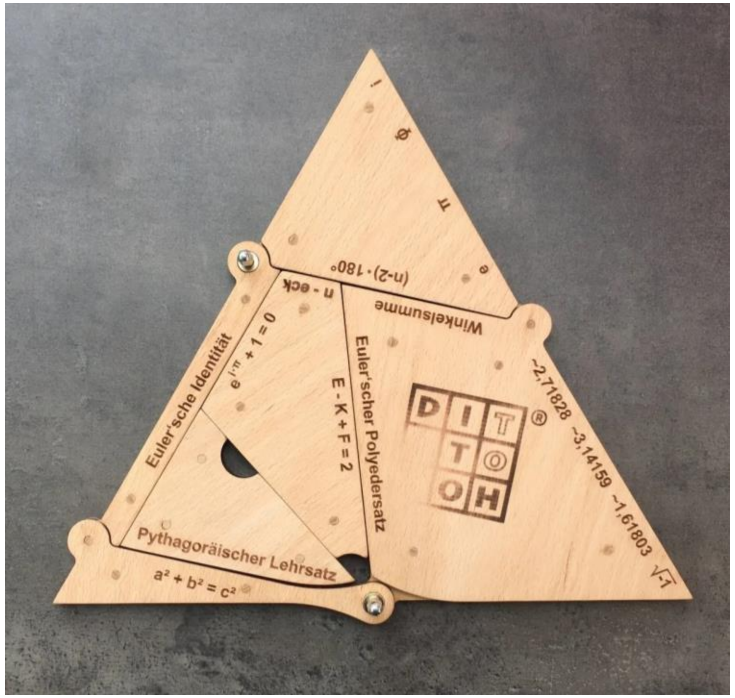
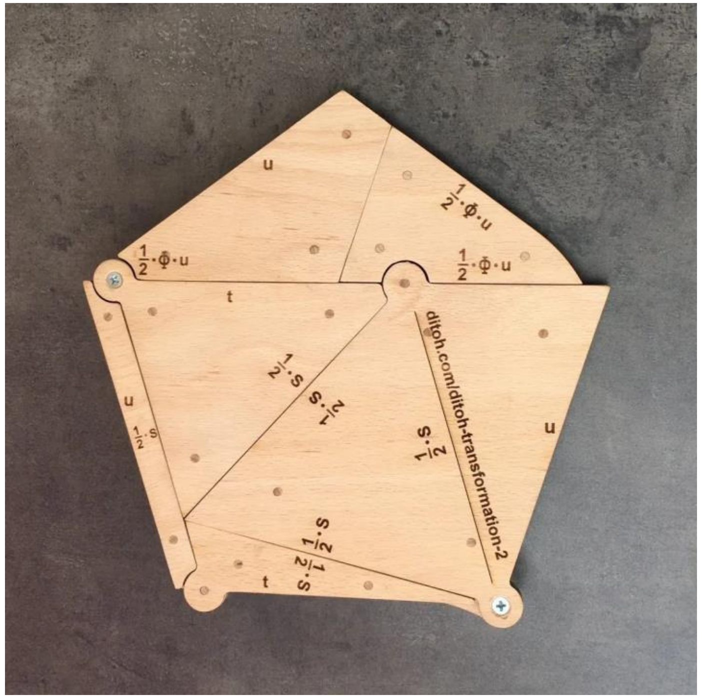


Abb. 9: Faltmodell mit mathematischen Formeln beschriftet

Rückseite - Faltmodell Mister Goldberg

Zusätzlicher Lerneffekt! Motivation!

– Geometrie der Fläche



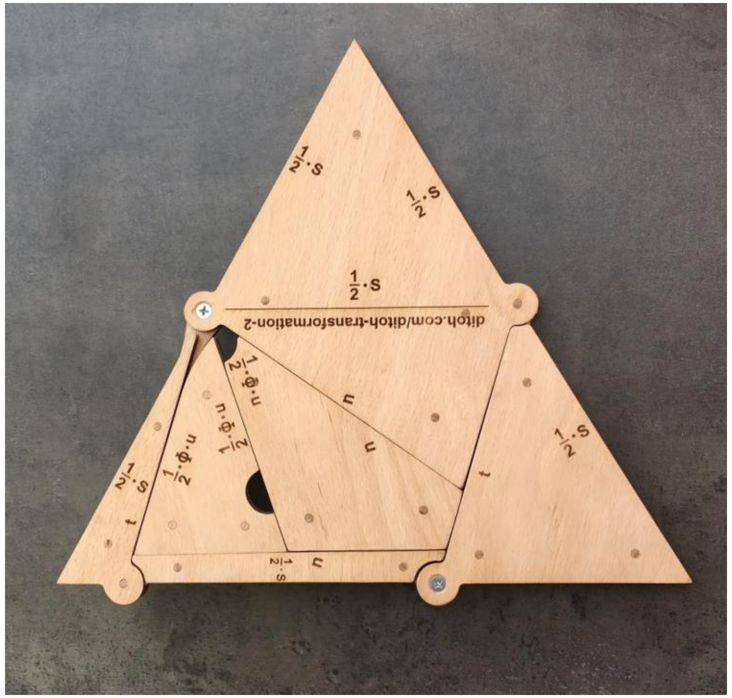


Abb. 10: Geometrie der Fläche

Darstellung der Platonischen Körper auf Basis unserer Faltmodelle

Zum Aufbau der Platonischen Körper benötigen wir nun:

- 2 normale Dreiecke
- 6 Faltmodelle der Version "Sir Dudeney"
- 12 Faltmodelle der Version "Mister Goldberg"

Dies ergibt in Summe genau 20 Faltmodelle bzw. Flächen.
Für die einzelnen Körper sieht dies dann so aus:

Tetraeder

4 Faltmodelle der Version "Sir Dudeney" (andere Kombinationen möglich - Abb.10)

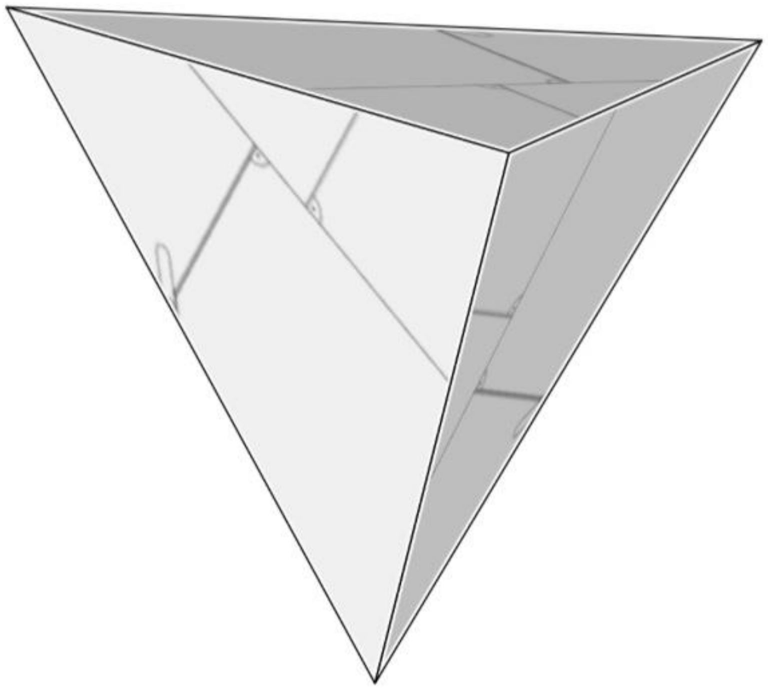


Abb. 11: Tetraeder

Hexaeder

6 Faltmodelle der Version "Sir Dudeney" (Abb. 11)

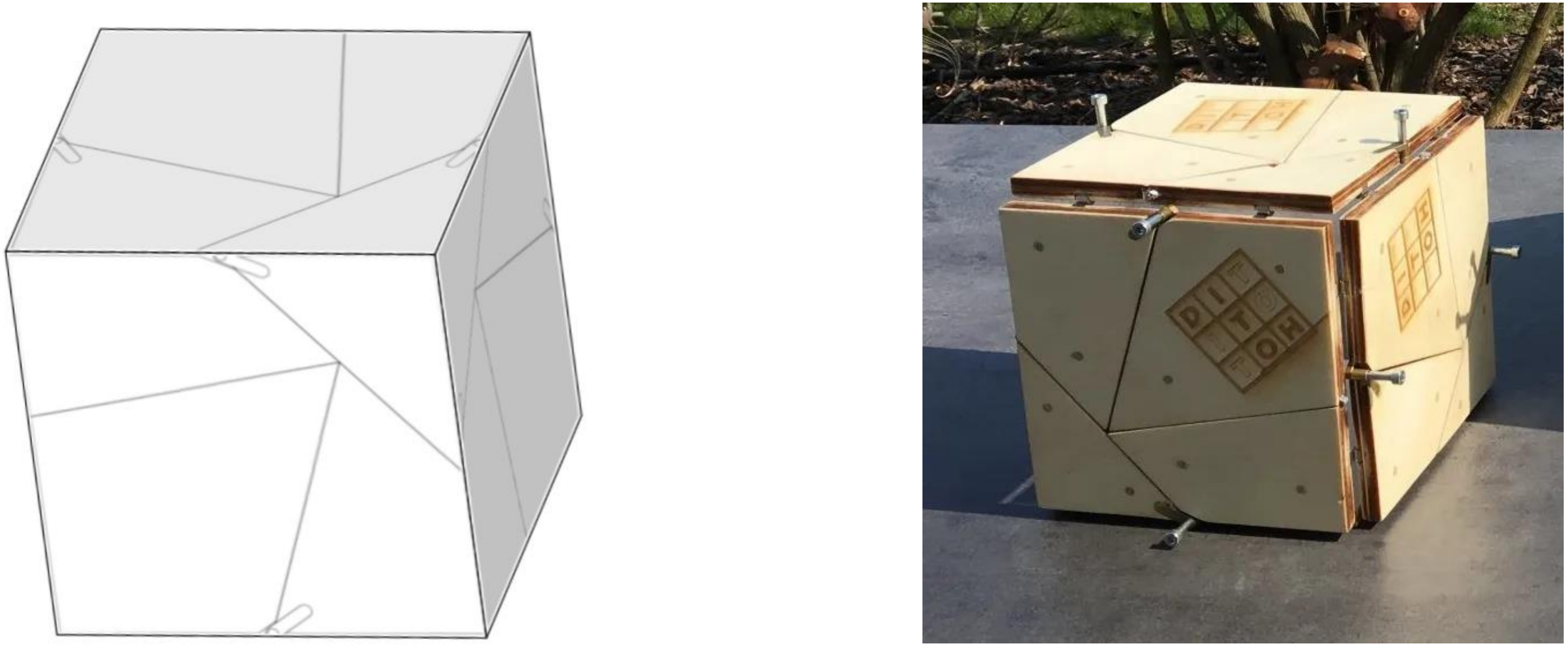


Abb. 12: Hexaeder

Oktaeder

6 Faltmodelle der Version "Sir Dudeney" + 2 normale Dreiecke (andere Kombinationen möglich - Abb. 12)

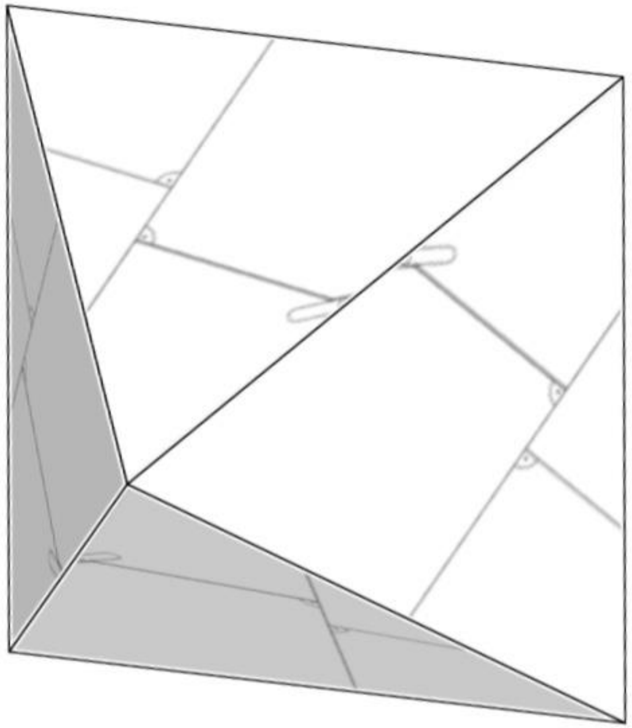


Abb. 13: Oktaeder

Dodekaeder

12 Faltmodelle der Version "Mister Goldberg" (Abb. 13)

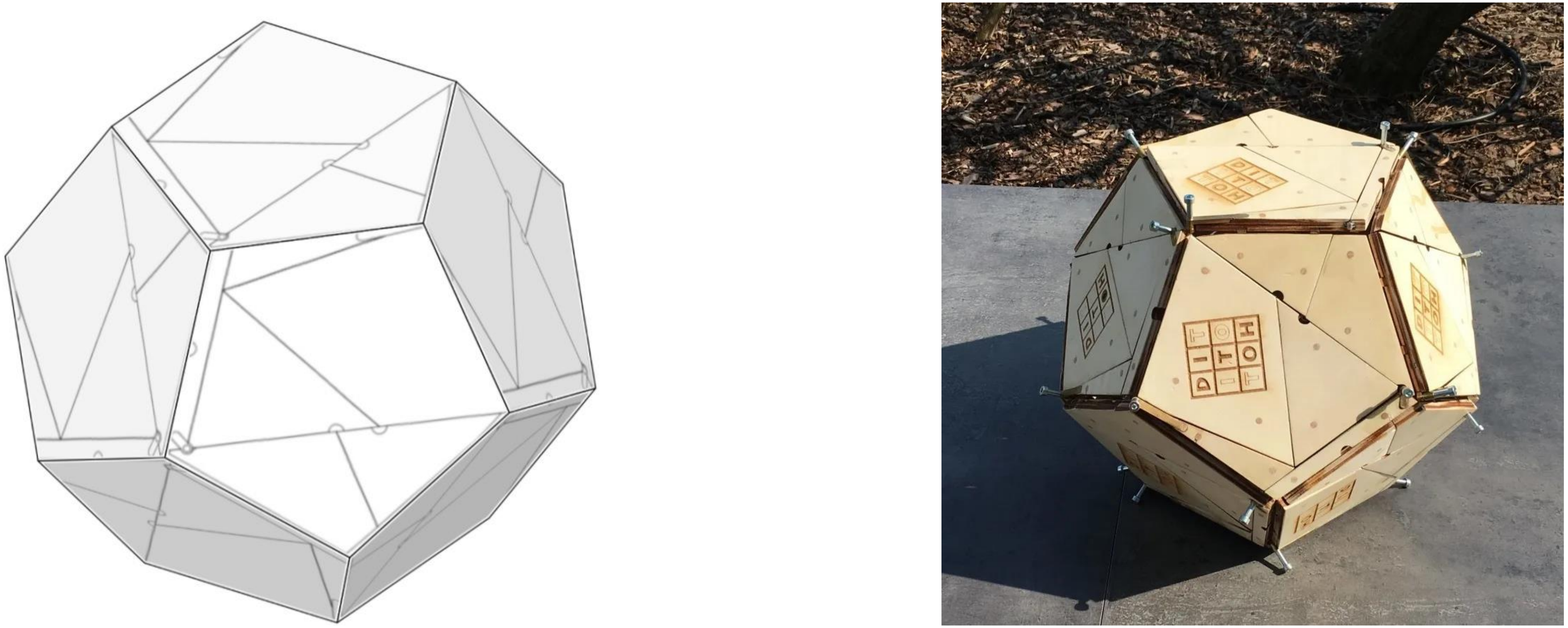
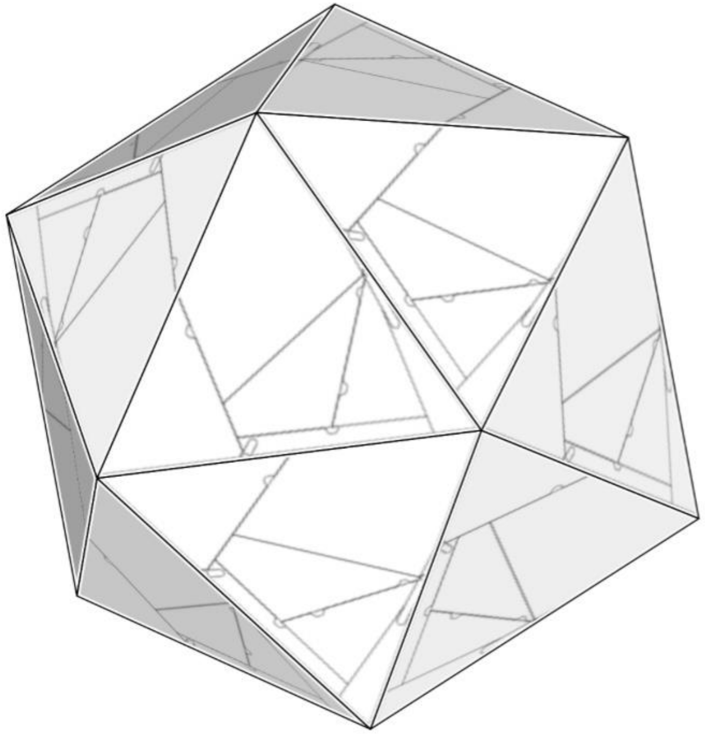


Abb. 14: Dodekaeder

Ikosaeder

2 normale Dreiecke + 6 Faltmodelle der Version "Sir Dudeney" + 12 Faltmodelle der Version "Mister Goldberg" (Abb. 14)



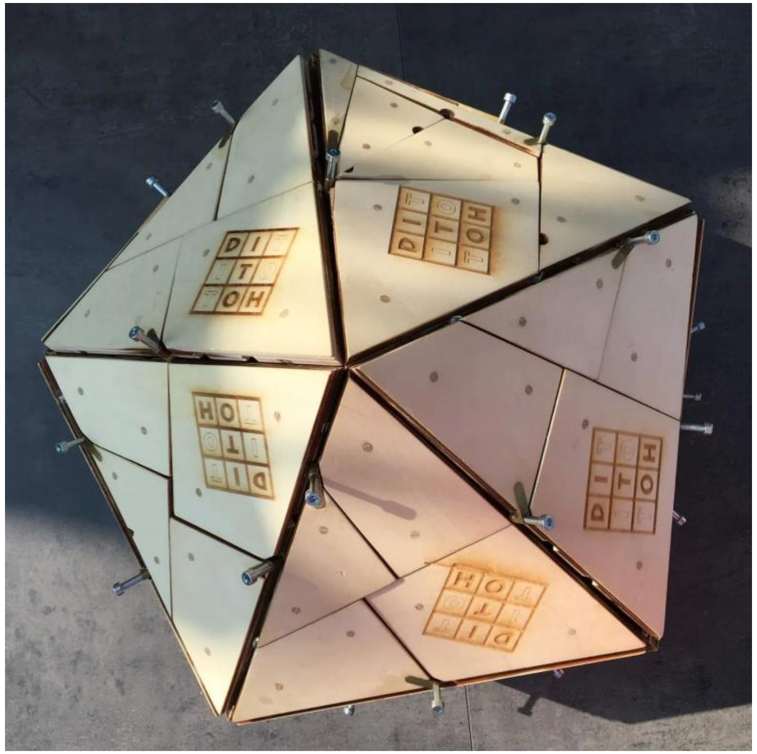


Abb. 15: Ikosaeder

Somit haben wir gezeigt, dass auf Basis unserer Faltmodelle sämtliche Platonischen Körper mit 20 Flächen konstruierbar sind.

Video:

III) Ausblick auf den Workshop

Im Workshop, morgen um 09:00, können Sie u.a. alle Faltmodelle selber ausprobieren. Und wenn die Zeit reicht, wollen wir noch unser neuestes Produkt, das Solimeter (Sonnensystem), vorstellen.

Bedanken darf ich mich noch bei Frau Thron, Herr Fuchs und Herr Walser für ihre Unterstützung im Zusammenhang mit diesem Vortrag.

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT !