Regularisierung ebener *n*-Ecke

Otto Röschel, Institut für Geometrie
Nawi Graz, TU Graz

42. Fortbildungstagung für Geometrie
Strobl, 9. November 2023

Überblick

1. Ein kleiner Vorgeschmack - der Satz von Napoleon und Varianten

2. Reguläre n-Ecke

3. Regularisierende Prozeduren

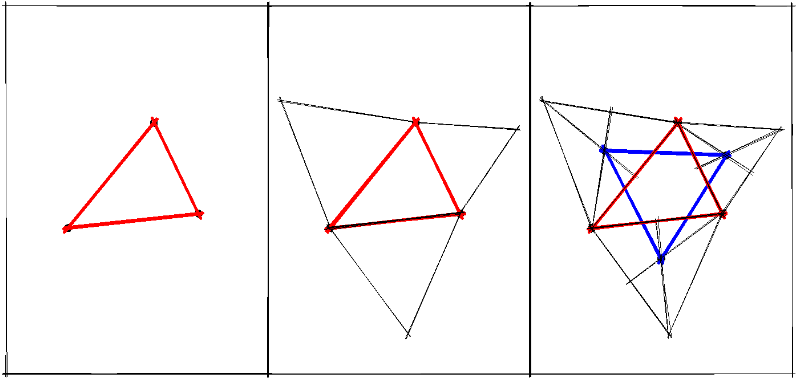
4. Die Darstellung der Prozeduren in $\mathbb{C}^n$

5. Regularisierungen - Schritt für Schritt

6. Eine affine Verkürzung

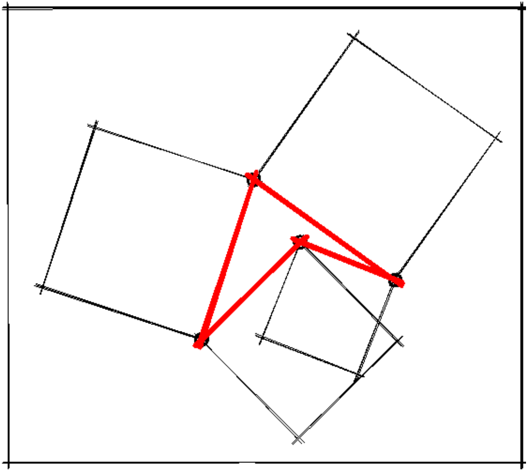
Wir skizzieren

Start mit Dreieck und gleichseitige Aufsatzdreiecke

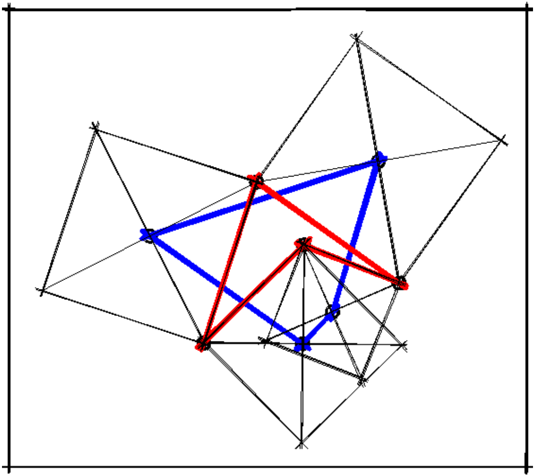


Das resultierende Dreieck scheint gleichseitig zu sein (?)

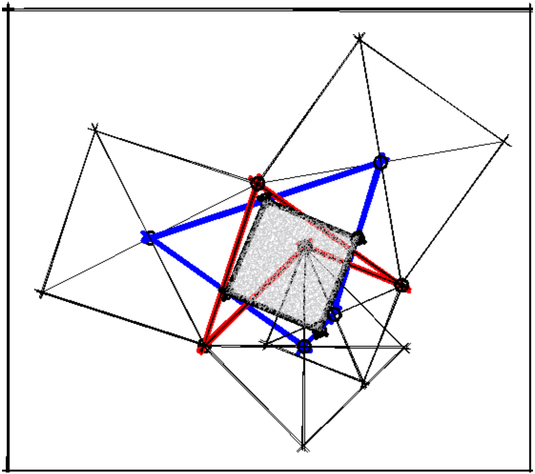
Start mit Viereck und Aufsatzquadraten



Start mit Viereck und Aufsatzquadraten

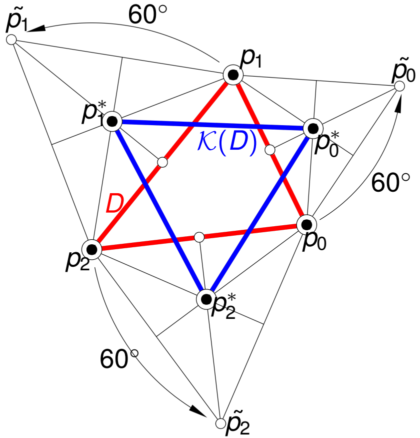


Start mit Viereck und Aufsatzquadraten

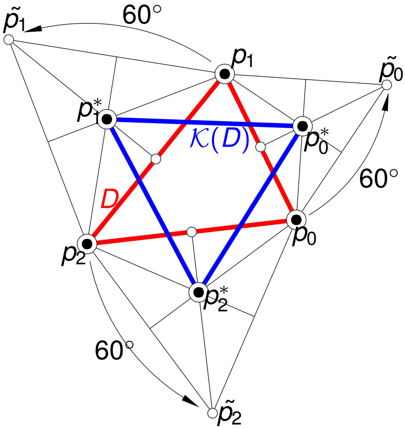


Das resultierende Viereck scheint ein Quadrat zu sein (?)

1. Ein kleiner Vorgeschmack
(Satz von Napoleon und Varianten)



- **Geg.:** Dreieck $D := (p_0,\, p_1,\, p_2)$
- *Konstruktion* $\mathcal{K}$*:* Drehe p_0 um p_1 (im mathematisch positiven Sinn) um 60 Grad $\longrightarrow \tilde{p}_0$.
- $p_0^* \ldots$ Mitte des 'Aufsatzdreiecks' $p_0,\, p_1,\, \tilde{p}_0$
- Analog für p_1 und $p_2 \longrightarrow$ Mitten p_1^* bzw. $p_2^* \longrightarrow$ *das nach Konstruktion* $\mathcal{K}$ *aus D konstruierte Dreieck* $\mathcal{K}(D) := (p_0^*, p_1^*, p_2^*)$

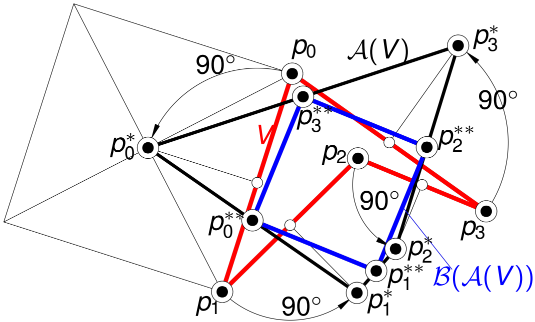


- *Konstruktion* $\mathcal{K}'$ *:* Wie $\mathcal{K}$, aber Drehungen um $-60°$ $\longrightarrow \mathcal{K}'(D)$
- Experimente $\longrightarrow \mathcal{K}(D)$ und $\mathcal{K}'(D)$ sehen 'sehr nach gleichseitigen Dreiecken' aus.
- *Satz von Napoleon*, aber Urheberschaft unklar - siehe Fritz SCHMIDT: 200 Jahre französische Revolution - Problem und Satz von Napoleon mit Variationen. *Didaktik der Mathematik* 18 (1990), 15 -29.

Satz von Napoleon

Unabhängig vom gewählten Ausgangsdreieck D sind sowohl $\mathcal{K}(D)$ als auch $\mathcal{K}'(D)$ stets gleichseitige Dreiecke. Einzige Ausnahme: D gleichseitig - dann degeneriert $\mathcal{K}(D)$ oder $\mathcal{K}'(D)$ in den Mittelpunkt von D.

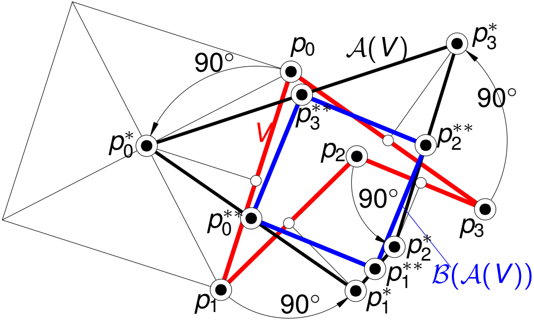
Ein weiterer Vorgeschmack - Vierecke



- **Geg.:** Viereck $V :=$ (p_0, p_1, p_2, p_3)
- Wie vorhin Konstruktionen anwenden - diesmals allerdings in zwei Schritten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$:

- *Konstruktion $\mathcal{A}$:* Auf Seiten von V Quadrate aufsetzen und deren Mittelpunkte als Neupunkte p_j^* verwenden. (gleichwertig: drehe p_j um den Mittelpunkt der Seite $p_j p_{j+1}$ um $90°$ $\longrightarrow p_j^*$)
- $\longrightarrow \mathcal{A}(V) := (p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ ... I.A. kein Quadrat!
- Variante *Konstruktion $\mathcal{A}'$:* Wie $\mathcal{A}$, bloss Drehungen um $-90°$

Otto Röschel, Institut für Geometrie, TU Graz



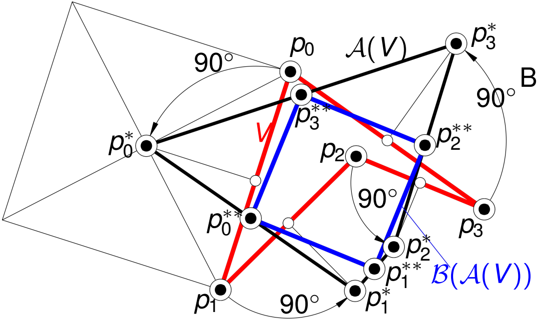
- *Konstruktion $\mathcal{B}$:* Das Viereck $V = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ geht in das Viereck seiner Seitenmitten $\mathcal{B}(V) := (p_0^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*)$ über (p_j^* ist Mitte der Seite $p_j p_{j+1}$)

- Nun Zusammensetzung: $\mathcal{B}$ auf $\mathcal{A}(V)$ anwenden $\longrightarrow$ $\mathcal{B}(\mathcal{A}(V)) = (p_0^{**}, p_1^{**}, p_2^{**}, p_3^{**})$. Wieder: Sieht nach Quadrat aus?

Fritz SCHMIDT: 200 Jahre französische Revolution - Problem und Satz von Napoleon mit Variationen. *Didaktik der Mathematik* 18 (1990), 15 -29.

Regularisierung von Vierecken

Das Viereck $\mathcal{B}(\mathcal{A}(V)) = (p_0^{**}, p_1^{**}, p_2^{**}, p_3^{**})$ ist bei allgemeinem Startviereck V ein Quadrat.



Bemerkungen:

- $\mathcal{A}$ durch $\mathcal{A}'$ ersetzen $\longrightarrow$ $\mathcal{B}(\mathcal{A}'(V))$ ist i.A. ebenfalls Quadrat
- Regularisierung sogar dann, wenn zwei aufeinander-folgende Ecken von V zusammenfallen.

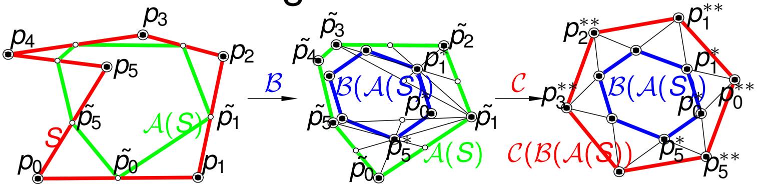
- Vertauschen der Konstruktionen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ führt ebenfalls zu den Ecken p_j^{**} von oben $\Longrightarrow$ es gilt sogar

$$\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$$

und

$$\mathcal{A}' \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A}'.$$

Ein weiterer Vorgeschmack - Sechsecke



- Konstruktionsschritt $\mathcal{A}$: Sechseck $S = (p_0, \ldots, p_5) \longrightarrow$ Sechseck $\mathcal{A}(S) = (\tilde{p}_0, \ldots, \tilde{p}_5)$ seiner Kantenmittelunkte
- Konstruktionsschritt $\mathcal{B}$: Die Schwerpunkte je dreier aufeinanderfolgender Ecken bilden die Ecken des Bildsechsecks $\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}(S)) = (p_0^*, \ldots, p_5^*)$
- Konstruktionsschritt $\mathcal{C}$ (bzw. $\mathcal{C}'$): Auf die Seiten des Sechsecks werden konsequent 'nach aussen' (bzw. bei $\mathcal{C}'$ nach innen) gleichseitige Dreiecke aufgesetzt. Die neuen Spitzen bilden die Ecken des Bildsechsecks
- Insgesamt: $\mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathcal{A}(S))) = (p_0^{**}, \ldots, p_5^{**})$ ist i. A. **regulär** (Beweis?).

Otto Röschel, Institut für Geometrie, TU Graz
42. Fortbildungstagung für Geometrie , Strobl, 9. November 2023

Bemerkungen:

- Beweise einzeln durch Nachrechnen leicht möglich - siehe zB Mathe-Brief Nr. 103 der OeMG
  `https://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/`

Österreichische Mathematische Gesellschaft

Fragen

- *Ist Analoges für ebene n-Ecke möglich?*
- *Gibt es eine 'guten' mathematischen Zugang?*

- Isaac Jacob SCHOENBERG: The finite Fourier series and elementary geometry. *Amer. Math. Monthly* 57 (1950), 390 - 404.

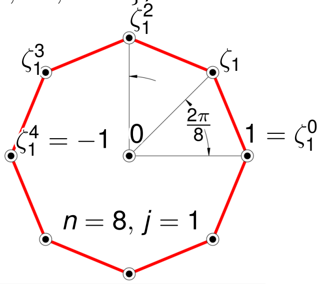
  Pavel PECH: The Harmonic Analysis of Polygons and Napoleon's Theorem. *Journal for Geometry and Graphics* 5/1 (2001), 13-22.
- Varianten: Diplomarbeit S. KROTTMAIER (in Arbeit) sowie O.R.
  $\longrightarrow$ Das ist auch für ebene n-Ecke möglich!

2. Reguläre n-Ecke

- Euklidische Ebene als GAUSSsche Zahlenebene deuten: $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$
- n-Eck mit Ecken $p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}$ ist dann ein Vektor $P := (p_0, p_1, \cdots, p_{n-1})^t \in \mathbb{C}^n$
- Reguläre ebene n-Ecke: Idee: Verwende die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ mit $z \in \mathbb{C} \longrightarrow$ Lösungen sind die n-ten Einheitswurzeln

$$\zeta_j := exp(i\tfrac{2j\pi}{n}) = \cos\tfrac{2j\pi}{n} + i\sin\tfrac{2j\pi}{n} \quad (j \in \{0, \ldots, n-1\})$$

- ζ_j ist komplexe Zahl mit Betrag 1 und Argument $\frac{2j\pi}{n} \longrightarrow$ beschreibt Punkt am Einheitskreis
- Potenzen von ζ_j: Der Punkt ζ_j wird um den Punkt 0 um Vielfache des Winkels $\frac{2j\pi}{n}$ nachgedreht $\longrightarrow$



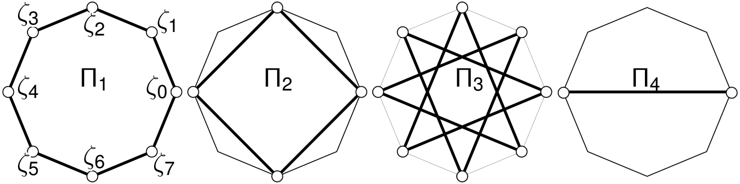
Otto Röschel, Institut für Geometrie, TU Graz

- Das n-Eck

$$\Pi_j := (\zeta_j^0, \dots, \zeta_j^{n-1})^t \ \in \mathbb{C}^n, \ j \in \{0, \dots, n-1\}. \qquad (1)$$

kann als regulăres n-Eck gesehen werden. Allerdings: Typ von gewähltem j abhängig!

- Daher Definition: Π_j sei der 'Prototyp des regulären n-Ecks j-ter Art' bzw. 'des Typs' j. Einige Prototypen für $n = 8$:



$$\begin{array}{llllllllll}
\Pi_0 = & (1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1 &)^t \\
\Pi_1 = & (1, & \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}, & i, & \frac{(-1+i)\sqrt{2}}{2}, & -1, & -\frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}, & -i, & \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2} &)^t \\
\Pi_2 = & (1, & i, & -1, & -i, & 1, & i, & -1, & -i &)^t \\
\Pi_3 = & (1, & \frac{(-1+i)\sqrt{2}}{2}, & -i, & \frac{(1+i)\sqrt{2}}{2}, & -1, & \frac{(1-i)\sqrt{2}}{2}, & i, & -\frac{(1+i)\sqrt{2}}{2} &)^t \\
\Pi_4 = & (1, & -1, & 1, & -1, & 1, & -1, & 1, & -1 &)^t
\end{array}$$

Otto Röschel, Institut für Geometrie, TU Graz

Bemerkungen:

- Prototyp Π_{n-j} des Typs $n-j$ ist Spiegelung von Π_j an der reellen Achse $y=0 \longrightarrow$ nur anderer Durchlaufsinn durch das n-Eck $\longrightarrow$
- **Definition:** Die zum Prototyp Π_j ($j = 0, \cdots, n-1$) ähnlichen ebenen n-Ecke heissen reguläre n-Ecke j-ter Art.
- Bezüglich der gleichsinnigen Ähnlichkeiten (Schiebungen und Drehstreckungen) der euklidischen Ebene gibt es genau n verschiedene Typen regulärer n-Ecke.
- Prototypen (gleichsinnig):

$$\Pi_0, \ldots, \Pi_{n-1}$$

- $\longrightarrow$ Alle regulären n-Ecke vom Typ j werden beschrieben durch

$$P = a\Pi_0 + b\Pi_j \ \text{ mit } \ a,\, b \in \mathbb{C},\, b \neq 0.$$

- Zusätzlich gilt: Die Vektoren $\{\Pi_0, \cdots, \Pi_{n-1}\}$ bilden eine **Basis** des $\mathbb{C}^n$!
- Bezüglich der ungleichsinnigen Ähnlichkeiten sind Π_j und Π_{n-j} äquivalent $\longrightarrow$ Prototypen (ungleichsinnig):

$$\Pi_0, \ldots, \Pi_{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Definition 'Regularisierung'

Eine Serie von Konstruktionsvorschriften, die allgemeine n-Ecke in reguläre n-Ecke (gewissen Typs j) transformiert, heißt **regularisierende Konstruktionsvorschrift** *(zum Typ j).*

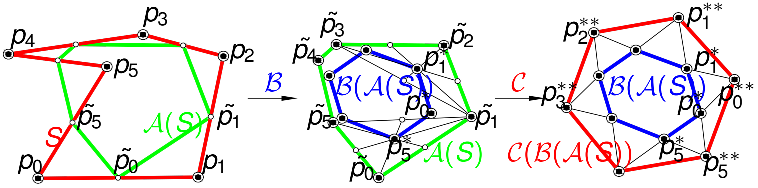
- Ziel n-Eck regulär vom Typ j beschrieben durch

$$P = a\Pi_0 + b\Pi_j \ \text{ mit } \ a, b \in \mathbb{C},\ b \neq 0.$$

- **Euklidische Regularisierung:** Konstruktionen innerhalb der Euklidischen Ähnlichkeiten
- **Affine Regularisierung:** Affine Konstruktionen

3. Regularisierende Prozeduren

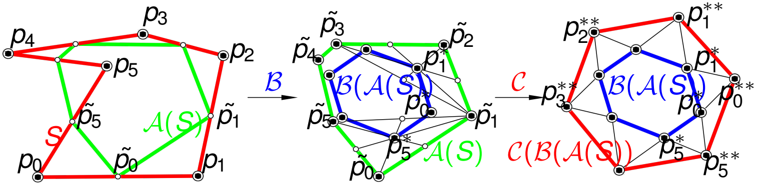
- Die vorgestellte Regularisierung der Sechsecke nun in der GAUSSschen Zahlenebene $\mathbb{C}$:



- Konstruktionsschritt $\mathcal{A}$: Sechseck $S = (p_0, \ldots, p_5) \longrightarrow$ Sechseck seiner Kantenmittelunkte

$$p_j \longrightarrow \tilde{p}_j := \frac{p_j + p_{j+1}}{2}$$

$$\longrightarrow \mathcal{A}(S) = (\tilde{p}_0, \ldots, \tilde{p}_5)$$



- Konstruktionsschritt $\mathcal{B}$: Die Schwerpunkte je dreier aufeinanderfolgender Ecken bilden die Ecken des Bildsechsecks

$$\tilde{p}_j \longrightarrow p_j^* := \frac{\tilde{p}_j + \tilde{p_{j+1}} + \tilde{p_{j+2}}}{3}$$

$$\longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{A}(S)) = (p_0^*, \ldots, p_5^*)$$

- Konstruktionsschritt $\mathcal{C}$ (bzw. $\mathcal{C}'$): Auf die Seiten des Sechsecks werden konsequent 'nach aussen' (bzw. bei $\mathcal{C}'$ nach innen) gleichseitige Dreiecke aufgesetzt. Die neuen Spitzen bilden die Ecken des Bildsechsecks

$$p_j^* \longrightarrow p_j^{**} := p_{j+1}^* + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(p_j^* - p_{j+1}^*) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} p_j^* + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} p_{j+1}^*$$

Insgesamt haben wir daher:

- Konstruktionsschritt $\mathcal{A}$:

$$p_j \longrightarrow \tilde{p}_j := \frac{p_j + p_{j+1}}{2}$$

- Konstruktionsschritt $\mathcal{B}$:

$$\tilde{p}_j \longrightarrow p_j^* := \frac{\tilde{p}_j + \tilde{p_{j+1}} + \tilde{p_{j+2}}}{3}$$

- Konstruktionsschritt $\mathcal{C}$:

$$p_j^* \longrightarrow p_j^{**} := p_{j+1}^* + \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(p_j^* - p_{j+1}^*) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} p_j^* + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} p_{j+1}^*$$

- Auch die Konstruktionen bei Dreieck und Viereck haben ähnliche Darstellungen $\longrightarrow$

Die vorgestellten Regularisierungsschritte haben in $\mathbb{C}$ alle die Gestalt

$$p_j \longrightarrow p_j^* := u\, p_j \; + \; v\, p_{j+1} \; + \; w\, p_{j+2}$$

mit $u, v, w \in \mathbb{C}$ und $u + v + w = 1$!

- **Affine Konstruktionsschritte:**

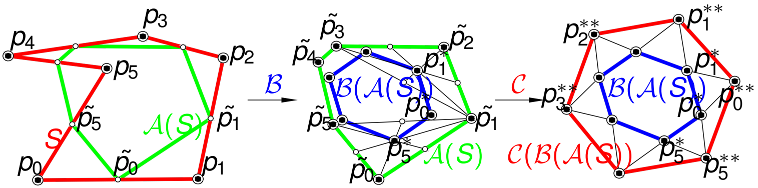
$$u, v, w \in \mathbb{R}, \quad u + v + w = 1$$

(Konstruktionsschritte $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ - siehe Bild für $n = 6$)

- **Euklidische Konstruktionsschritte (Ähnlichkeiten):**

$$u, v \in \mathbb{C}, \ w = 0, \quad u + v = 1$$

(Konstruktionsschritte $\mathcal{A}$ und $\mathcal{C}$ - siehe Bild für $n = 6$)



4. Die Darstellung der Prozeduren in $\mathbb{C}^n$

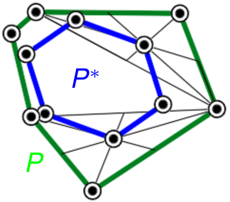
- Gegeben: n-Eck $P = (p_0, \ldots, p_{n-1})^t$
- Prozedur $\mathcal{A}(u, v, w)$ durch $u, v, w \in \mathbb{C}$ mit $u + v + w = 1$
- $\mathcal{A}(u, v, w)$: $P = (p_0, \ldots, p_{n-1})^t \longrightarrow P^* = (p_0^*, \ldots, p_{n-1}^*)^t$ mit

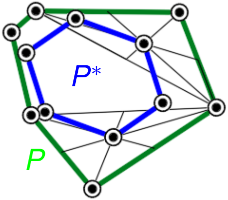
$$p_j^* := u\, p_j \,+\, v\, p_{j+1} \,+\, w\, p_{j+2}$$

- Beispiel für $n = 6$: Schwerpunkte als Neupunkte $\longrightarrow$ $u = v = w = 1/3 \longrightarrow$

$$p_j^* := (p_j + p_{j+1} + p_{j+2}) \,/\, 3$$

$P^* = \mathcal{A}(1/3, 1/3, 1/3)(P)$





- Allgemein: $\mathcal{A}(u, v, w)$ ergibt
  $P = (p_0, \ldots, p_{n-1})^t \longrightarrow \mathcal{A}(u, v, w)(P) = P^* = (p_0^*, \ldots, p_{n-1}^*)^t$ mit

$$p_j^* := u\, p_j \; + \; v\, p_{j+1} \; + \; w\, p_{j+2}$$

- $\longrightarrow$ Das Neupolygon $P^* = (p_0^*, \ldots, p_{n-1}^*)^t$ ist gegeben durch

$$P^* = M\,.\,P$$

mit $n \times n$-Matrix $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Die in $\mathbb{C}^n$ induzierte lineare Abbildung f

$$p_j^* := u\,p_j + v\,p_{j+1} + w\,p_{j+2} \quad \longrightarrow \quad P^* = M\,.\,P \ \text{ mit}$$

$$M = \begin{pmatrix} u & v & w & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u & v & w & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & u & v & w & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & u & v & w \\ w & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & u & v \\ v & w & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & u \end{pmatrix} \tag{2}$$

$\longrightarrow$ Die Konstruktion $\mathcal{A}(u, v, w)$: $P \longrightarrow P^* = M.P$ **induziert im Raum $\mathbb{C}^n$ der ebenen n-Ecke eine lineare Abbildung $f(u, v, w)$!**

Eigenschaften von M: siehe zB

- Pavel PECH: The Harmonic Analysis of Polygons and Napoleon's Theorem. *Journal for Geometry and Graphics* **5**/**1** (2001), 13-22.
- Gregoire NICOLLIER: Convolution filters for polygons and the Petr-Douglas-Neumann theorem. *Contributions to Algebra and Geometry* **54** (2013), 701 – 708.
- M ist eine sogenannte 'zirkulante' Matrix $\longrightarrow$
- Die n Vektoren Π_j ($j = 0, \ldots, n-1$) sind Eigenvektoren von f:

$$M \,.\, \Pi_j = \lambda_j \, \Pi_j$$

mit zugehörigen Eigenwerten

$$\lambda_j := u\,\zeta_j^0 + v\,\zeta_j^1 + w\,\zeta_j^2 = u + v\,\zeta_j^1 + w\,\zeta_j^2$$

- Geometrisch klar: $\mathcal{A}(u, v, w)$ transformiert reguläre n-Ecke in reguläre n-Ecke desselben Typs.

5. Regularisierungen - Schritt für Schritt

- Die Vektoren $\{\Pi_0, \cdots, \Pi_{n-1}\}$ bilden eine Basis des $\mathbb{C}^n \longrightarrow$
- **Idee:** Stelle die n-Ecke P und P^* des $\mathbb{C}^n$ in dieser Basis dar:

$$P := \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu \, \Pi_\nu \quad \text{mit Koeffizienten} \quad z_\nu \in \mathbb{C}$$

- Von vorher: $M \,.\, \Pi_j = \lambda_j \, \Pi_j \longrightarrow$
- Unsere Prozedur $\mathcal{A}(u, v, w)$ transformiert P in $\mathcal{A}(u, v, w)(P) = P^*$ mit

$$P^* = M \,.\, P = M \,.\, (\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu \, \Pi_\nu) = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu \, M \,.\, \Pi_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu \, \lambda_\nu \, \Pi_\nu$$

$(u, v, w \in \mathbb{C}$ und $u + v + w = 1)$ mit

$$\lambda_\nu = u \, \zeta_\nu^0 + v \, \zeta_\nu^1 + w \, \zeta_\nu^2$$

Otto Röschel, Institut für Geometrie, TU Graz

- Damit haben wir in der Basis $\{\Pi_0, \cdots, \Pi_{n-1}\}$: $\mathcal{A}(u, v, w) : P \longrightarrow P^*$ mit

$$P = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})^t \longrightarrow P^* = (z_0\lambda_0, z_1\lambda_1, \ldots, z_{n-1}\lambda_{n-1})^t$$

und

$$\lambda_\nu = u + v\,\zeta_\nu^1 + w\,\zeta_\nu^2$$

($\zeta_\nu^0 = 1$ und $\lambda_0 = 1$)

- Reguläre n-Ecke des Typs $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ (bzgl der gleichsinnigen Ähnlichkeiten) sind in dieser Basis durch Darstellungen der Art

$$Q = a\,\Pi_0 + b\,\Pi_k$$

mit $a, b \in \mathbb{C}, \; b \neq 0$ erfasst $\longrightarrow$

- Koordinaten der regulären n-Ecke des Typs k in dieser Basis:

$$Q = (\underset{0}{a}, \; 0, \ldots, \; 0, \underset{k}{b}, 0, \; \ldots, \; 0)$$

- Wir hatten $\mathcal{A}(u, v, w) : P \longrightarrow P^*$ mit

$$P = (z_0, z_1, \ldots, z_{n-1})^t \longrightarrow P^* = (z_0\lambda_0, z_1\lambda_1, \ldots, z_{n-1}\lambda_{n-1})^t \qquad (3)$$

und

$$\lambda_\nu = u + v\,\zeta_\nu^1 + w\,\zeta_\nu^2$$

- Reguläre n-Ecke des Typs k in dieser Basis:

$$Q = (\underset{0}{a}, 0, \ldots, 0, \underset{k}{b}, 0, \ldots, 0)$$

- **Regularisierungsidee:** Bestimme $u, v, w \in \mathbb{R}$ (bzw. $u, v \in \mathbb{C}$) mit $u + v + w = 1$ (bzw. $u + v = 1$) so, dass in der Koordinatendarstellung von P^* in (3) einer oder mehrere der Eigenwerte λ_ν gleich 0 werden!
- Dieses Verfahren ist zu iterieren, bis alle Koordinaten in P^* bis auf die k-te Koordinate (und die nullte, die wegen $\lambda_0 = 1$ fix bleibt) verschwinden! $\longrightarrow$ als Beispiel:
- Der **Euklidische Regularisierungsalgorithmus von I.J. Schoenberg (1950)**

- $P^* = (z_0\lambda_0, z_1\lambda_1, \ldots, z_{n-1}\lambda_{n-1})^t$ mit $\lambda_\nu = u + v\,\zeta_\nu^1 + w\,\zeta_\nu^2$
- Ermittle $u_j, v_j \in \mathbb{C}$ mit $w = 0$ so, dass für ein $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ der Wert $\lambda_j = 0$ wird, also $\lambda_j = u_j + v_j\,\zeta_j = 0$ und $u_j + v_j = 1 \longrightarrow$ $u_j, v_j \in \mathbb{C}$ wohlbestimmt $\longrightarrow$ j-te Koordinate in P^* verschwindet!

Euklidischer Regularisierungsalgorithmus zum Typ k für allgemeine n-Ecke (I. J. Schoenberg 1950)

Input: Zieltyp $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und allgemeines n-Eck Q_0.

For $j = 1, \ldots, n-1$, aber $j \neq k$ **Do**

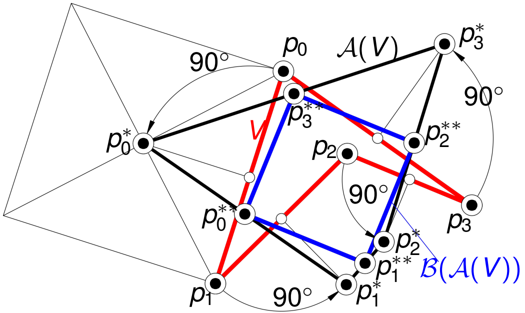
- Bestimme u_j, v_j als Lösungen der beiden linearen Gleichungen $u_j + v_j\,\zeta_j = 0$ und $u_j + v_j = 1 \longrightarrow$ $u_j = \frac{\sin\beta_j - i\,\cos\beta_j}{2\,\sin\beta_j}$ und $v_j = \frac{\sin\beta_j + i\,\cos\beta_j}{2\,\sin\beta_j}$ mit $\beta_j := j\,\pi/n$.
- Anwendung von $\mathcal{A}(u_j, v_j, 0)$ auf das n-Eck $Q_{j-1} \longrightarrow Q_j$

Output: Dann ist das n-Eck Q_{n-2} **regulär vom Typ** k.

Bemerkung: Multiplikation der Eigenwerte ist kommutativ $\Rightarrow$ Reihenfolge der Anwendung der Prozeduren kann beliebig vertauscht werden!

Bemerkungen:

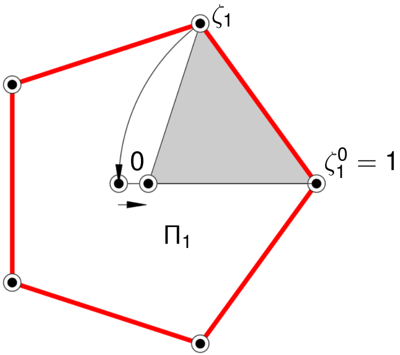
- Regularisierung des Dreiecks: $n = 3 \Rightarrow$ in einem Schritt möglich: $\longrightarrow$ die vorgestellte Regularisierung nach Napoleon
- Regularisierung von Vierecken: $n = 4 \Rightarrow$ in zwei Schritten möglich: Regularisierung zum Typ $k = 1$:



- $j = 3$: $\lambda_3 = u_3 - iv_3 = 0 \longrightarrow u_3 = \frac{1+i}{2}, v_3 = \frac{1-i}{2}$: Drehung der Ecke p_j um Kantenmitte von $p_j p_{j+1}$ um 90°
- $j = 2$: $\lambda_2 = u_2 - v_2 = 0$ und $u_2 + v_2 = 1 \longrightarrow u_2 = v_2 = 1/2$: daher Ermittlung der Kantenmitten des Ausgangsquadrates

Weitere Bemerkungen:

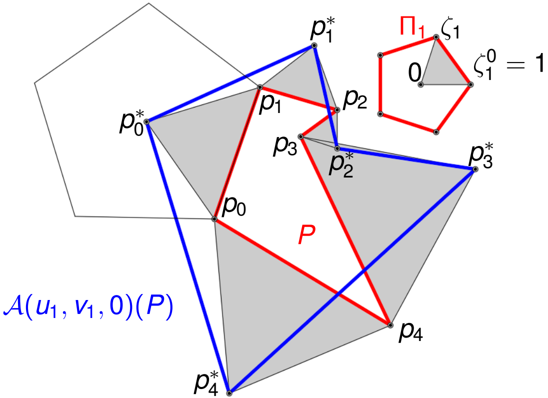
- Im Algorithmus bei Schritt $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, aber $j \neq k$: Die Werte von $u_j, v_j \in \mathbb{C}$ sind Lösungen der zwei linearen Gleichungen $u_j + v_j \zeta_j = u_j \zeta_j^0 + v_j \zeta_j = 0$ und $u_j + v_j = 1 \longrightarrow$



- Beispiel für $n = 5$ mit $j = 1$:
- Die Drehstreckung mit Zentrum $\zeta_1^0 = 1$, die ζ_1 nach 0 bringt, liefert unsere Prozedur $\mathcal{A}(u_1, v_1, 0)$
- $\longrightarrow \mathcal{A}(u_1, v_1, 0)$ liefert neue Spitze 0 des gleichschenkeligen Dreiecks mit Ecken $\zeta_1^0 = 1$, ζ_1 und 0 (nebenstehend grau schattiert).
- In diesem Sinn gilt $\mathcal{A}(u_1, v_1, 0)(\Pi_1) = (0, \ldots, 0)^t$ (alle Ecken des Bildfünfecks fallen in 0 zusammen)

Beispiel: $\mathcal{A}(u_1, v_1, 0)$ zu $n = 5$, $j = 1$: $P \longrightarrow P^*$ mit Ecken p^*_ν

- p^*_ν läßt sich durch Auftragen ähnlicher Fünfecke vom Typ $j = 1$ auf die Seiten $p_\nu p_{\nu+1}$ und nachfolgende Ermittlung ihrer Zentren als Neupunkte p^*_ν gewinnen!
- Alternativ: Dreiecke ähnlich zum Dreieck mit Ecken $\zeta_1^0 = 1$, ζ_1, 0 im regulären Fünfeck des Typs j auf die Seite $p_\nu p_{\nu+1}$ aufsetzen (grau schattiert)!



- Achtung auf die Orientierung!
- In der Basis $\{\Pi_0, \ldots \Pi_4\}$ hat $\mathcal{A}(u_1, v_1, 0)(P)$ die Koordinaten $(z_0, 0, z_2^*, z_3^*, z_4^*)^t$!

Allgemeines j: Aufsetzen von ähnlichen regulären n-Ecken des Typs j auf die Seiten $p_\nu p_{\nu+1}$ und Ermittlung der Zentren $\longrightarrow$ Neupunkte p_ν^* $\longrightarrow$ **Regularisierung in** $n-2$ **Schritten (I. J. Schoenberg 1950):**

Euklidischer Regularisierungsalgorithmus zum Typ k für allgemeine n-Ecke - Konstruktion

Input: Zieltyp $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und allgemeines n-Eck Q_0.

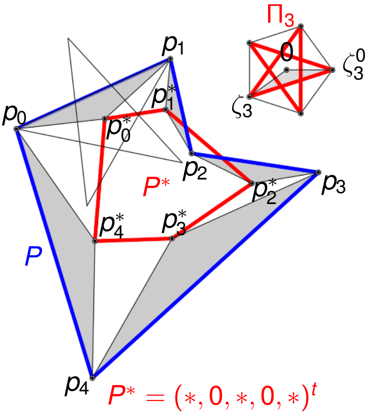
For $j = 1, \ldots, n-1$, aber $j \neq k$ **Do**

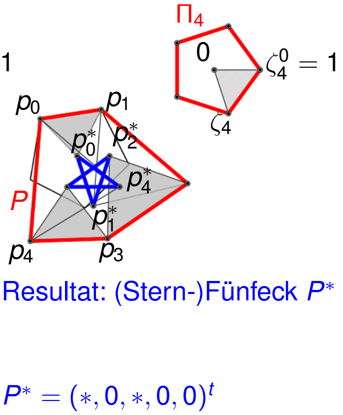
- Setze reguläre n-Ecke des Typs j auf alle Seiten $p_\nu p_{\nu+1}$ von Q_{j-1} auf
- $\longrightarrow$ Die Zentren dieser 'Aufsatz$n$-Ecke' sind die Ecken p_ν^* des Neupolygons Q_j
- (Alternative: Verwendung von entsprechenden Aufsatzdreiecken und ihren neuen Ecken)

Output: Dann ist das n-Eck Q_{n-2} **regulär vom Typ** k.

'Unser' Beispiel $n = 5$, Regularisierung zum Typ $k = 2$:

- In $n - 2 = 3$ Schritten möglich (Schritt $j = 1$ oben bereits erledigt) $\longrightarrow P = (*, 0, *, *, *)^t$
- Schritt $j = 3$
- Schritt $j = 4$

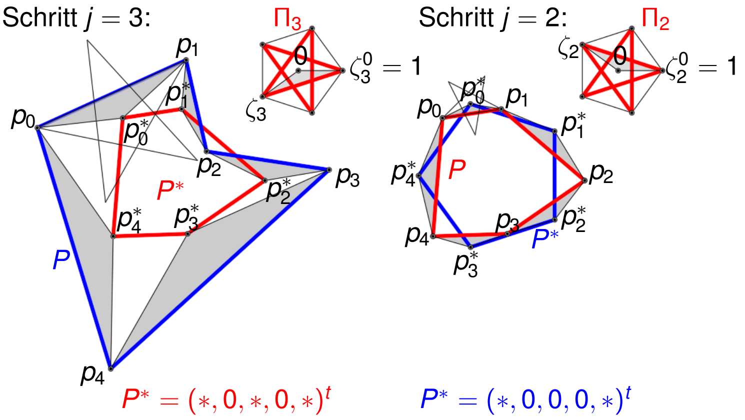




- Das Resultat ist ein reguläres (Stern-)Fünfeck vom Typ $k = 2$!

Variante, Regularisierung zum Typ $k = 4$:

- Schritte $j = 1$ und $j = 3$ wie oben, aber nun mit Schritt $j = 2$:



- Das Resultat ist ein reguläres Fünfeck vom Typ $k = 4$!

Zusammenfassung

6. Eine affine Verkürzung

- **Ziel:** Versuch, zwei Schritte des obigen Algorithmus in eine affine Konstruktion $\mathcal{B}(u, v, w)$ zu packen.
- Dazu $\mathcal{B}(u, v, w)$: $P \longrightarrow P^*$ mit $u, v, w \in \mathbb{C}$ und $u + v + w = 1 \longrightarrow$
- In Basis $\{\Pi_0, \ldots, \Pi_{n-1}\}$:

$$\begin{aligned} P &= \quad (z_0, \ldots, z_{n-1})^t \;\; \text{und} \\ P^* &= \quad (\lambda_0 z_0, \ldots, \lambda_\nu z_\nu, \ldots, \lambda_{n-1} z_{n-1})^t \;\; \text{mit} \\ \lambda_\nu &= \quad u\zeta_\nu^0 + v\zeta_\nu^1 + w\zeta_\nu^2 \end{aligned}$$

- Idee: Ermittle u, v, w und damit $\mathcal{B}(u, v, w)$ so, dass **zwei Eigenwerte** λ_j und λ_j^* verschwinden. Falls die zugehörigen linearen Gleichungen für u, v, w reelle Lösungen besitzen, wäre die zugehörige Prozedur $\mathcal{A}(u, v, w)$ eine **affine Konstruktion!**
- Es ist $\bar{\zeta}_j = \zeta_{n-j} \Rightarrow$ Möglichkeit: Die Eigenwerte λ_j und λ_{n-j} könnten in so einer Prozedur gemeinsam zu 0 werden. Da die Bestimmungsgleichungen (neben $u + v + w = 1$) konjugiert komplex sind, müssen die Lösungen reell sein!

- $\longrightarrow$ Zu einem $j \in \{1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$ sollen λ_j and λ_{n-j} zu 0 werden $\longrightarrow$ Bedingungen für u_j, v_j, w_j:

$$\begin{array}{rcccccl} \lambda_j = & u_j & + & v_j\zeta_j & + & w_j\zeta_j^2 & = 0 \\ \lambda_{n-j} = \bar{\lambda}_j = & u_j & + & v_j\bar{\zeta}_j & + & w_j\bar{\zeta}_j^2 & = 0 \\ & u_j & + & v_j & + & w_j & = 1 \end{array} \tag{4}$$

- Die Lösungen dieser 3 linearen Gleichungen liefern für $j \neq n/2$ eindeutige **reelle Lösungen** u_j, v_j, w_j, die somit eine **affine Prozedur** $\mathcal{B}(u_j, v_j, w_j)$ definieren; für die Eigenwerte gilt: $\lambda_j = \lambda_{n-j} = 0$
- Falls n gerade ist, kann $j = n/2$ sein. Dann liefern die 3 linearen Gleichungen (4) eine einparametrige Menge reeller Lösungen $(u_{n/2}, v_{n/2}, w_{n/2}) = (t, 1/2, 1/2 - t)$ mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$.
- In allen anderen Fällen ($j \neq n/2$) sind die reellen Lösungen von (4) eindeutig:

$$u_j = \frac{1}{2 - \zeta_j - \bar{\zeta}_j}, \quad v_j = -\frac{\zeta_j + \bar{\zeta}_j}{2 - \zeta_j - \bar{\zeta}_j}, \quad w_j = \frac{1}{2 - \zeta_j - \bar{\zeta}_j}$$

- Mit so einer Lösung u_j, v_j, w_j liefert die affine Prozedur $\mathcal{B}(u_j, v_j, w_j)$: $P \longrightarrow P^*$ in der Basis $\{\Pi_0, \ldots, \Pi_{n-1}\}$: $P = (z_0, \ldots, z_n)^t \longrightarrow$

$$\begin{aligned} P^* = \ & (\lambda_0 z_0, \ldots, \lambda_{j-1} z_{j-1}, \ {\color{red}0}, \ \lambda_{j+1} z_{j+1}, \ldots \\ & \ldots, \lambda_{n-j-1} z_{n-j-1}, \ {\color{red}0}, \ \lambda_{n-j+1} z_{n-j+1}, \ldots, \lambda_{n-1} z_{n-1}) \end{aligned}$$

- $\longrightarrow$ Damit kann in jedem dieser affinen Schritte (bei $j \neq n/2$) ein Koordinatenpaar in der obigen Darstellung zu 0 gemacht werden $\longrightarrow$
- Mit einer Serie von affinen Prozeduren $\mathcal{B}(u_j, v_j, w_j)$ können wir in $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ Schritten zu einem Polygon P^{**} gelangen, das nur an den Stellen $0, k, n-k$ ($k \in \{1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$) Koordinaten $\neq 0$ besitzt!

$$P^{**} = (a, 0, \ldots, \underset{k}{0, b, 0}, \ldots, \underset{n-k}{0, c, 0}, \ldots, 0)$$

- Und daran schließen wir noch einen der euklidischen Regularisierungsschritte des letzten Abschnittes an $\longrightarrow$ Regularisierung zum Typ k oder $n-k$ (bei $k \in \{1, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor\}$) ist i.A. in $\lfloor n/2 \rfloor$ Schritten möglich!

$\longrightarrow$ Das liefert den **Regularisierungsalgorithmus mit affinen Konstruktionsschritten (O.R. 2020)**:

Regularisierungsalgorithmus mit affinen Konstruktionsschritten

Input: Zieltyp $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und allgemeines n-Eck Q_0; $jj := 0$

For $j = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$, aber $j \neq k$ und $j \neq n-k$ **Do**

- Ermittle u_j, v_j, w_j als Lösung des linearen Systems (4)
- Prozedur $\mathcal{B}(u_j, v_j, w_j)$ liefert: $Q_{jj-1} \longrightarrow Q_{jj} := \mathcal{B}(u_j, v_j, w_j)(Q_{j-1})$; setze $jj := jj + 1$.

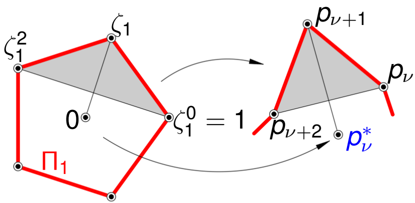
$\longrightarrow Q_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$.
Verwende die euklidische Regularisierung $A(u_{n-k}, v_{n-k}, 0)$ aus dem euklidischen Algorithmus $\longrightarrow Q_{\lfloor n/2 \rfloor}$
Das n-Eck $Q_{\lfloor n/2 \rfloor}$ ist **reguläres n-Eck vom Typ k**.

- **Bemerkung:** Und wieder ändert Permutation der verschiedenen Schritte nichts am Resultat!

Weitere Bemerkungen:

- Verkürzung der Schrittanzahl gegenüber I.J. Schoenberg und P. Pech.
- Geometrische Deutung von $\mathcal{B}(u_j, v_j, w_)$; Bedingungen für die reellen u_j, v_j, w_j:

$$\begin{array}{rccccccl} \lambda_j = & u_j & + & v_j\zeta_j & + & w_j\zeta_j^2 & = 0 \\ & u_j & + & v_j & + & w_j & = 1 \end{array}$$

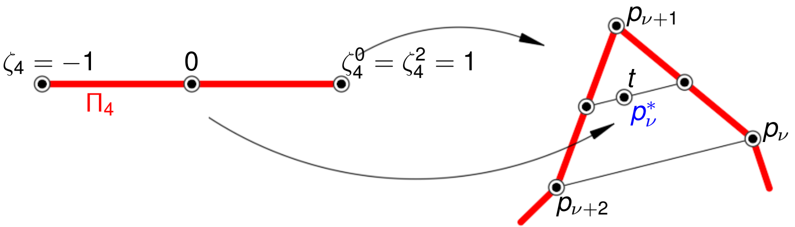


Beispiel $n = 5$, $j = 1$

- Die reellen u_j, v_j, w_j stellen genau die Affinkombinationen des Punktes 0 bezüglich der Ecken $\zeta_j^0 = 1$, ζ_j und ζ_j^2 des regulären n-Ecks vom Typ j dar.
- $\mathcal{B}(u_j, v_j, w_j)$ weist den drei Punkten $p_\nu, p_{\nu+1}, p_{\nu+2}$ das Bild p_ν^* von 0 bei jener Affinität zu, die die drei Punkte $\zeta_j^0 = 1$, ζ_j und ζ_j^2 von Π_j in p_ν, $p_{\nu+1}$ und $p_{\nu+2}$ abbildet

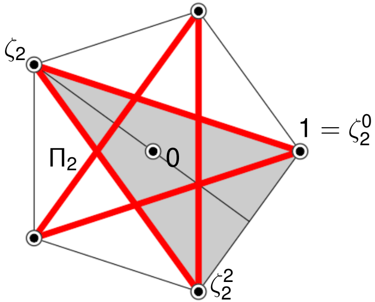
- Ausnahme: $j = n/2$ bei geradem n: Dann gibt es einen freien Parameter $t \in \mathbb{R}$ für $u_{n/2} = t, v_{n/2} = 1/2, w_{n/2} = 1/2 - t$. Aber auch hier gilt: Beschreibt Affinkombination des Zentrums 0 von $\Pi_{n/2}$ bezüglich der drei Punkte $1, -1$ and 1 (von denen zwei zusammenfallen).
- Daher oft Verwendung von $t = 1/2$ und damit $u_{n/2} = 1/2, v_{n/2} = 1/2, w_{n/2} = 0 \longrightarrow$ Neupunkte als Kantenmitten.

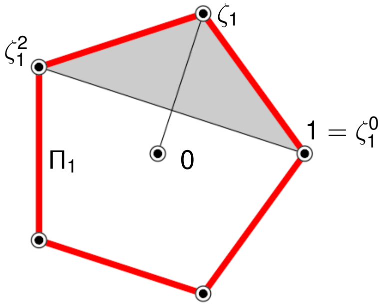
Beispiel $n = 8$, $j = 4$: $\zeta_4 = -1$



- Beispiel $n = 5$: Wir haben $\lfloor n/2 \rfloor - 1 = 1$ $\Rightarrow$ Eine affine Prozedur gefolgt von einer euklidischen reichen zur Regularisierung!
- Die affinen Teile $\mathcal{B}(u, v, w)$ für $j = 1, 2$:

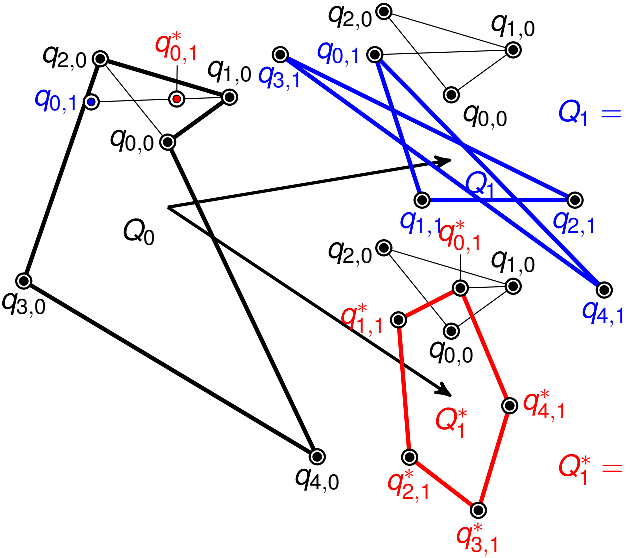
$j = 2$ $j = 1$





$u_2 = w_2 \approx 0.276393, v_2 \approx 0.447214$
$\longrightarrow \mathcal{B}(u_2, v_2, w_2)$

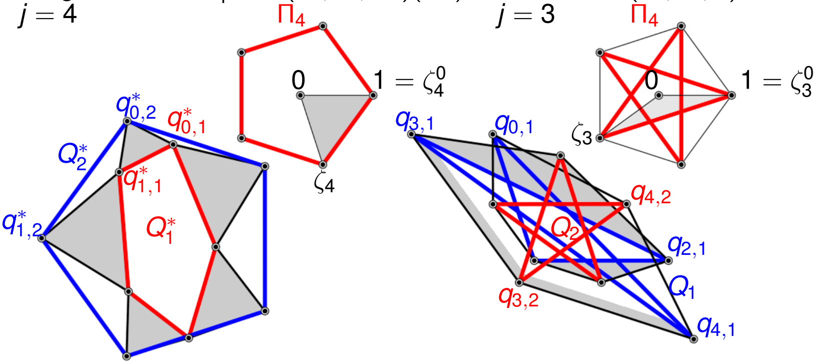
$u_1 = w_1 \approx 0.723607, v_1 \approx -0.447214$
$\longrightarrow \mathcal{B}(u_1, v_1, w_1)$



$$Q_1 = \mathcal{B}(u_1, v_1, w_1)(Q_0)$$

$$Q^*_1 = \mathcal{B}(u_2, v_2, w_2)(Q_0)$$

- Und nun muss noch der euklidische Regularisierungsschritt durchgeführt werden!
- Zu $Q_1 = \mathcal{B}(u_1, v_1, w_1)(Q_0)$ werden wir den Schritt $\mathcal{A}(u_3, v_3, 0)$ ergänzen, zu $Q_1^* = \mathcal{B}(u_2, v_2, w_2)(Q_0)$ den Schritt $\mathcal{A}(u_4, v_4, 0)$:



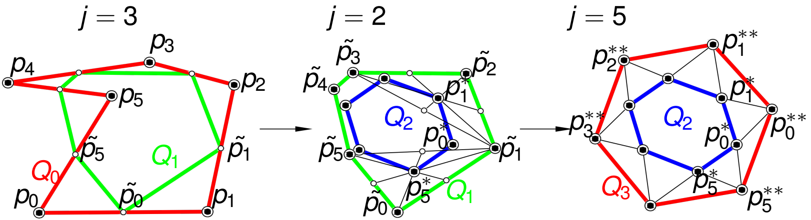
$Q_2^* = \mathcal{A}(u_4, v_4, 0)(Q_1^*)$

$Q_2 = \mathcal{A}(u_3, v_3, 0)(Q_1)$

- Die Fünfecke Q_2^* und Q_2 sind regulär vom Typ 1 bzw. 2.

7. Zusammenfassung

- Regularisierung von n-Ecken mittels verschiedener Konstruktionsvorschriften
- Geometrische Konstruktionen $\longleftrightarrow$ lineare Algebra
- Algorithmen und Beispiele (unten $n = 8$)



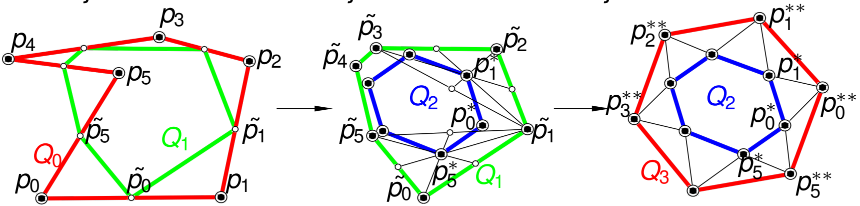
$Q_1 = \mathcal{B}(1/2, 1/2, 0)(Q_0)$ $\quad Q_2 = \mathcal{B}(1/3, 1/3, 1/3)(Q_1)$ $\quad Q_3 = \mathcal{A}(u_5, v_5, 0)(Q_2)$

$$u_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad v_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

7. Zusammenfassung

- Regularisierung von *n*-Ecken mittels verschiedener Konstruktionsvorschriften
- Geometrische Konstruktionen $\longleftrightarrow$ lineare Algebra
- Algorithmen und Beispiele (unten $n = 6$)

$j = 3$ $\qquad$ $j = 2$ $\qquad$ $j = 5$



$Q_1 = \mathcal{B}(1/2, 1/2, 0)(Q_0)$ $\qquad$ $Q_2 = \mathcal{B}(1/3, 1/3, 1/3)(Q_1)$ $\qquad$ $Q_3 = \mathcal{A}(u_5, v_5, 0)(Q_2)$

$$u_5 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}, \quad v_5 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!