

Symmetrie

- ein natürliches Phänomen,
das den homo sapiens zum homo mathematicus macht

Gunter Weiss

(TU Dresden & TU Wien)

42. Fortbildungstagung Geometrie

Strobl (Österreich) 9.-11. November 2023

Worauf will ich hinaus?

Hinweise auf zentrale Aufgaben und Ziele des Geometrie-Unterrichts:

- a) Förderung der Raumvorstellung
- b) Förderung des problem-adäquaten Umgangs mit „Tools“
- c) Förderung des Abstraktionsvermögens und der Fähigkeit, Analogien zu erkennen (und Strategien für logische Schlussketten finden können)
- d) Förderung der Persönlichkeitsbildung unter einem ganzheitlichen Aspekt

„Schöne Geometrie-Bilder“ produzieren wird weder als Kunst noch als Wissenschaft anerkannt und rechtfertigt den Gegenstand Geometrie alleine noch nicht!

“Symmetrie” : Was bedeutet dieser Begriff?

math./geom. Übersetzung

versus

allgemein-sprachliche Interpretation

Standard Übersetzung: “gleiches Maß”
 (“Distanz bezogen”)



Aber: Welche Art Maß und wofür?
 (Begriff mit vielen Bedeutungen!)

Standard Interpretation: “Kongruenzrelation”

erfordert eine “Geometrie”:
euklidisch, nichteuklidisch, affin, projektiv,
Möbius, Laguerre, affine Räume mit Norm,...

$\Sigma\Upsilon\text{M}$ - \approx zusammen, gemeinsam, ähnlich

Symphonie, Sympathie, Symbiose, ...
Syndicat, Synthese, synchron, ...

“Symmetriegruppe” \subseteq Automorphismen

braucht ein “Object”:
Ebene, n -Raum, Kurve, (k - oder Hyper)-Fläche, ...
Muster (Fries, Rosette, Pflasterung, Mosaik, ...)

METPON \approx wohl proportioniert,
harmonisch, ähnlich, analog, innerer
Zusammenhang, (gleicher) Rhythmus,
Takt, (Vers-) Maß, ...

“Maßnahmen ergreifen”, “Metronom”,
“Maß aller Dinge”, ...

Zwischenbemerkung “Geometrie”

math./geom. Übersetzung

versus

allgemein-sprachliche Interpretation

Standard Interpretation: “Erd-Vermessung”



Gaia (= “Welt”) + Metron (= innerer Zusammenhang, Harmonie)

Begründung: Jährliche Nil-Überschwemmung

Unsinn, denn: der fruchtbare Bereich im Niltal ist nahezu horizontal-eben,
Nil-Fluten liefern $< 3mm$ Schlamm.
Man sieht hinterher “jeden” Grashalm!

Steuersystem im alten Ägypten kannte keine “Grundsteuer”, sondern eine Ertrags-Besteuerung!

d.h. „Geometrie“ meint „Weltsicht“, „Weltbild“, = religiös-philosophischer Begriff

Jetzt bekommt das Türschild bei Platons Athener Akademie Sinn:

“Wer der Geometrie nicht mächtig ist, trete hier nicht ein!”

“Symmetrie” : Was bedeutet dieser Begriff?

Mathematik / Geometrie

Symmetrie = Kongruenz-Abbildung mit Spiegelung als speziellem (involutorischen) Fall.

(siehe z.B. F. Bachmann: “Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff” (1973/2012))

Essenz: Symmetrie agiert global

(Frieze & Pflasterungen werden als unendlich imaginiert, die Symmetrie Gruppe von z.B. Platonischen Körpern operiert im ganzen Raum)

Projektiv-geometrischer Standpunkt:

Involutorische Abbildungen sind “harmonische axiale Kollineationen” (also harmonische Homologien mit einem “Achsenpaar”, z.B. Punkt-(Hyper-)Ebene, Geradenpaar im 3-Raum)

versus

Kunst & Wissenschaft & Technik

Vorkommen in jeglicher Art von Kunst, z.B. bei Tanz, Musik, Literatur, Architektur..., Chemie, Biologie, Physik, Technik,

Essenz: Symmetrie wird via Abstraktion “erkannt” in natürlichen und künstlichen Strukturen, agiert lokal auf unterschiedlichem Niveau.

In der Natur: Tierfährten im Schnee, Tiere, eineiige Zwillinge, Tänzer, Zöpfe, Jonglieren
→ Fries-Strukturen als Abstraktion

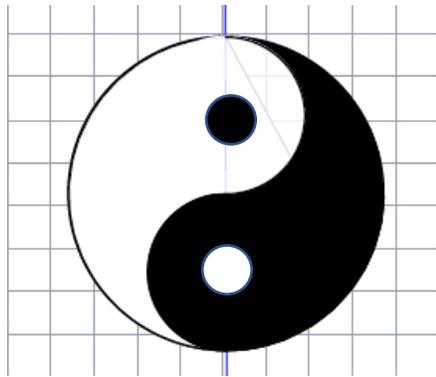
In der Literatur: Versmaß (Jambus, Trochaeus, Dactilus, Anapest) →
→ Rhythmus als abstractes Fries

Palindrome, wie das Datum 22.02.2022

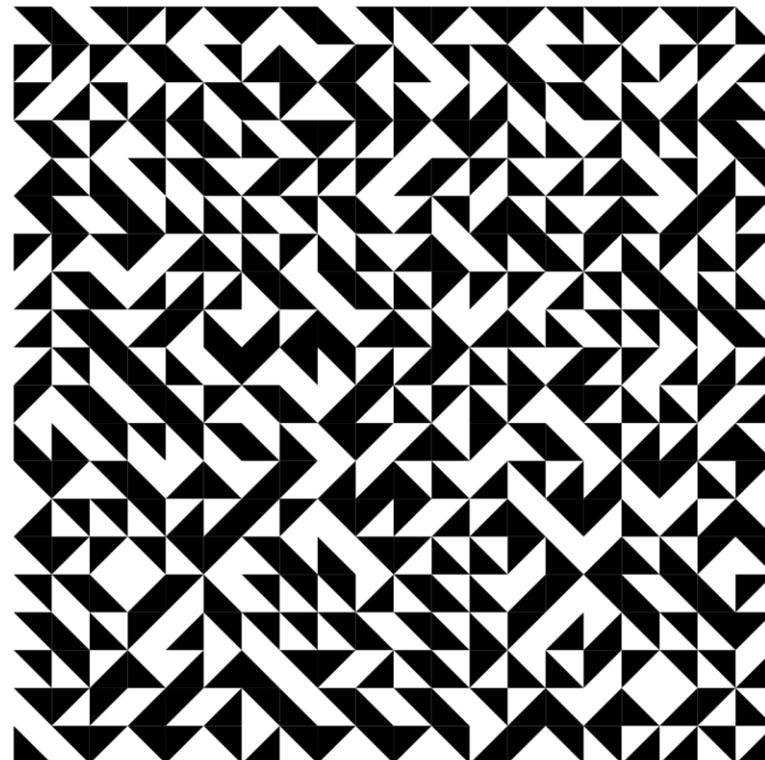
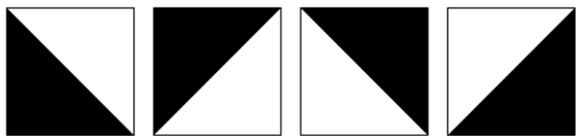
“Symmetrie” : Was bedeutet dieser Begriff?

“Symmetrie des Gegenteils ” → “**Antisymmetrie**”

Z.B. Yin-Yang Symbol



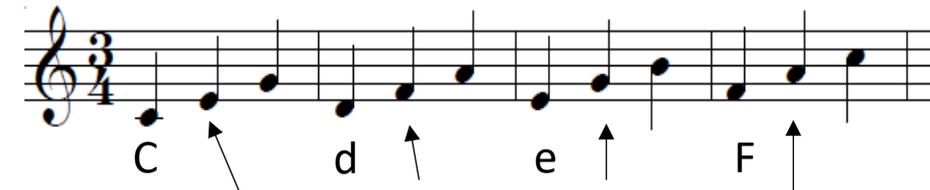
Z.B. S. Truchet Fliesen



Siehe Fassadendekorationen in Portugal, (viele Wandmuster sind möglich!)

“Symmetrie in der Musik”

Visuell??, akkustisch ??



Visuell in der Mitte, aber nicht akkustisch

Symmetrie-Vorkommen: Rondo, Fuge,
Kanon, Sonate / Liedsatz (A-B-A – Struktur)

Wenige Elemente reichen aus
um von einem Fries etc. zu
sprechen, sobald man das
Erzeugungsgesetz errät/erkennt.

↶ (Siehe auch “**Fractal**”- Bilder)

“Symmetrie” : Was bedeutet dieser Begriff?

Äquivalenz zweier Objekte oder **ausgewählter Details** davon

z.B. “Grobsymmetrie” von Gesicht, Hände, Körper, ...

“Symmetrie” von Tieren trotz ihres Bewegungszustands, ...

“Grobsymmetrie” von Geweihen/Gehörn, Gebiss, ...

“Symmetrie” von Fahrzeugen (trotz der Lenkrad-Position), ...

↔

Äquivalenz zweier Strukturen oder **ausgewählter Details** davon

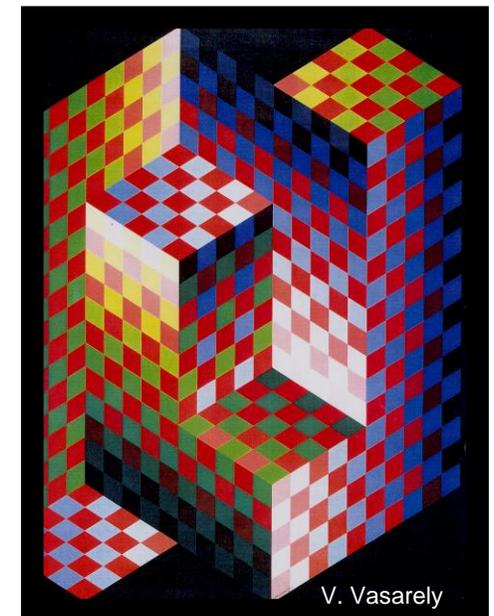
z.B. projektiv-geom. Dualität, Polarität, ...

Cayley-Klein- Äquivalenz von Abstand und Winkel
“merkwürdige” Inzidenzen,

Topologische Äquivalenz + grob-metrische Symmetrie

Symmetrie innerhalb eines Axiomensystems

Siehe auch:
“**Goldener Schnitt**” in Natur
und (bildender) Kunst
nur “näherungsweise”, als
“Idee” erkennbar!



“Symmetrie” : Was bedeutet dieser Begriff?

Zwei extreme Beispiele aus der Geometrie

Man bestimme alle Schraublinien mit einem gemeinsamen Krümmungselement. →

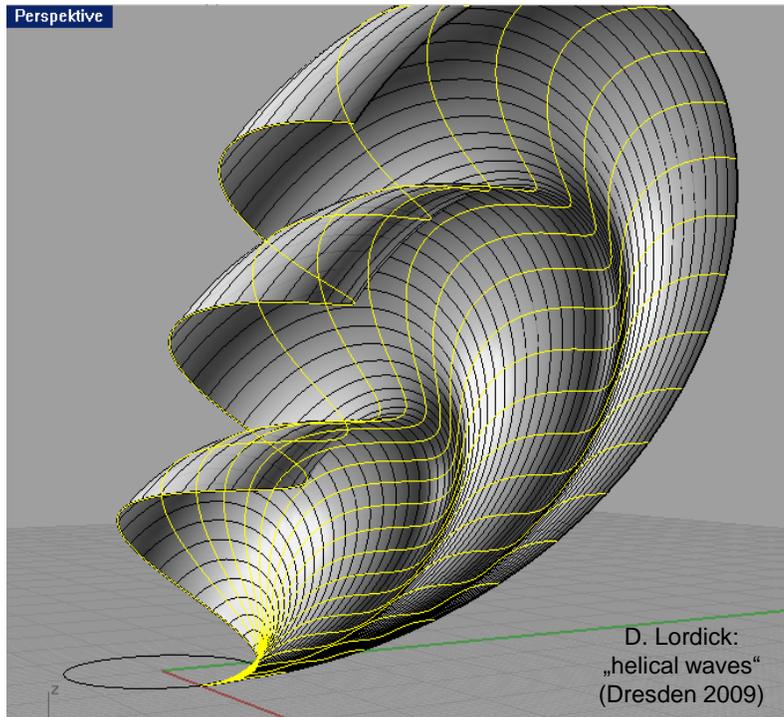
→ **Symmetrie als Analogie**

Gegeben ein Kreisfünfeck (hellblau, Umkreis grün), Tangentenfünfeck (grün), Kreise durch Ecken und Diagonalschnittpunkte (blau),

Kreissehnen kopunktal (rot),
Restschnittpunkte konzyklisch (rot)

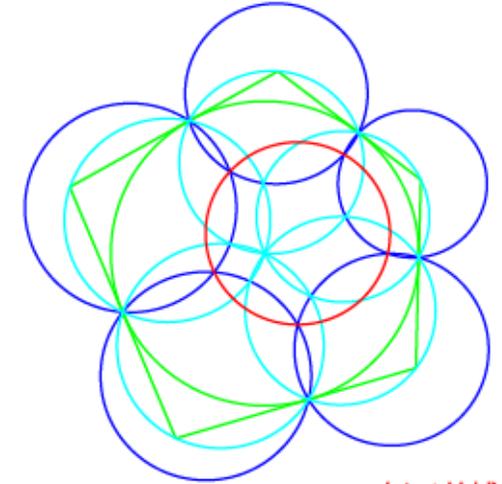
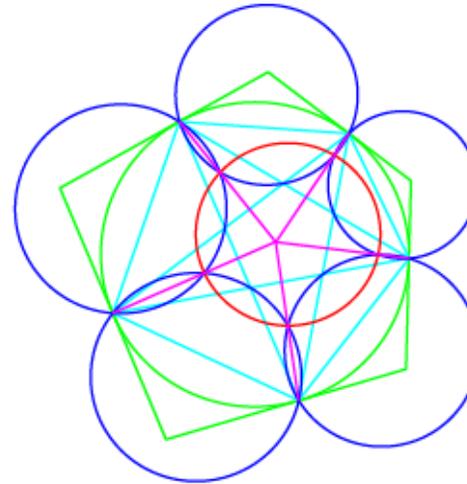
Kreise durch Ecken und Umfünfecks-
ecken (lichtblau) durch einen Punkt

→ **Symmetrie als Dualität**



円に内接する五角形に関する共円定理(高田円定理)の2つの作図法

HI-378
2円奇数円の定理 2008-11-23



H.Ebisui: „Double five ambiguity“ (2008)

蛭子井博孝

Beispiele für "Grobsymmetrie" und "lokale Symmetrie"



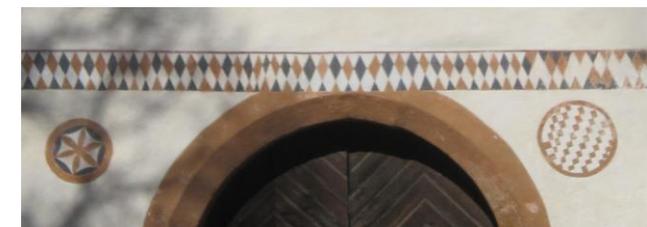
Seminar-Zentrum in Horn, Abtei Altenburg (Niederösterreich)



Rathaus, St.Veit, Kärnten

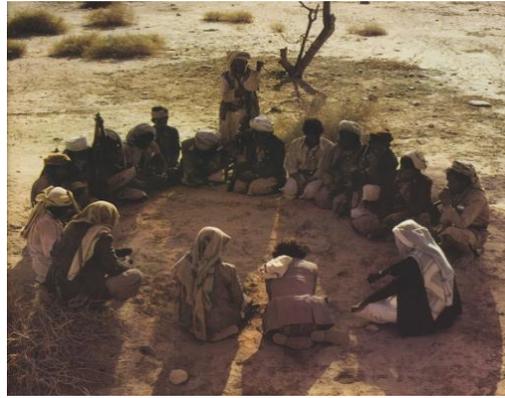


Ländliche Architektur (Österr.)

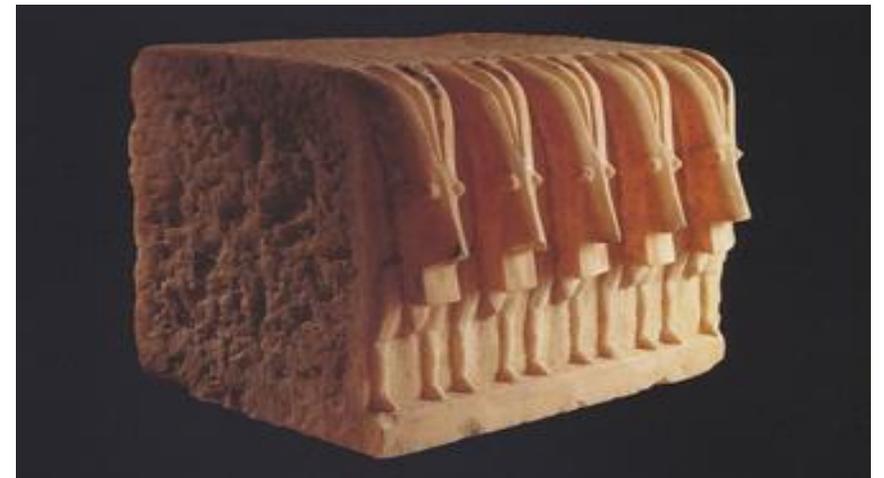


“Grobsymmetrie” and “lokale Symmetrie” als Abstraktions-Anstoß

Alle Arten von Blättern und Blüten, “Round Table Meetings”, Spiegelung am Wasser, Korbflechten, Weben, Töpfern



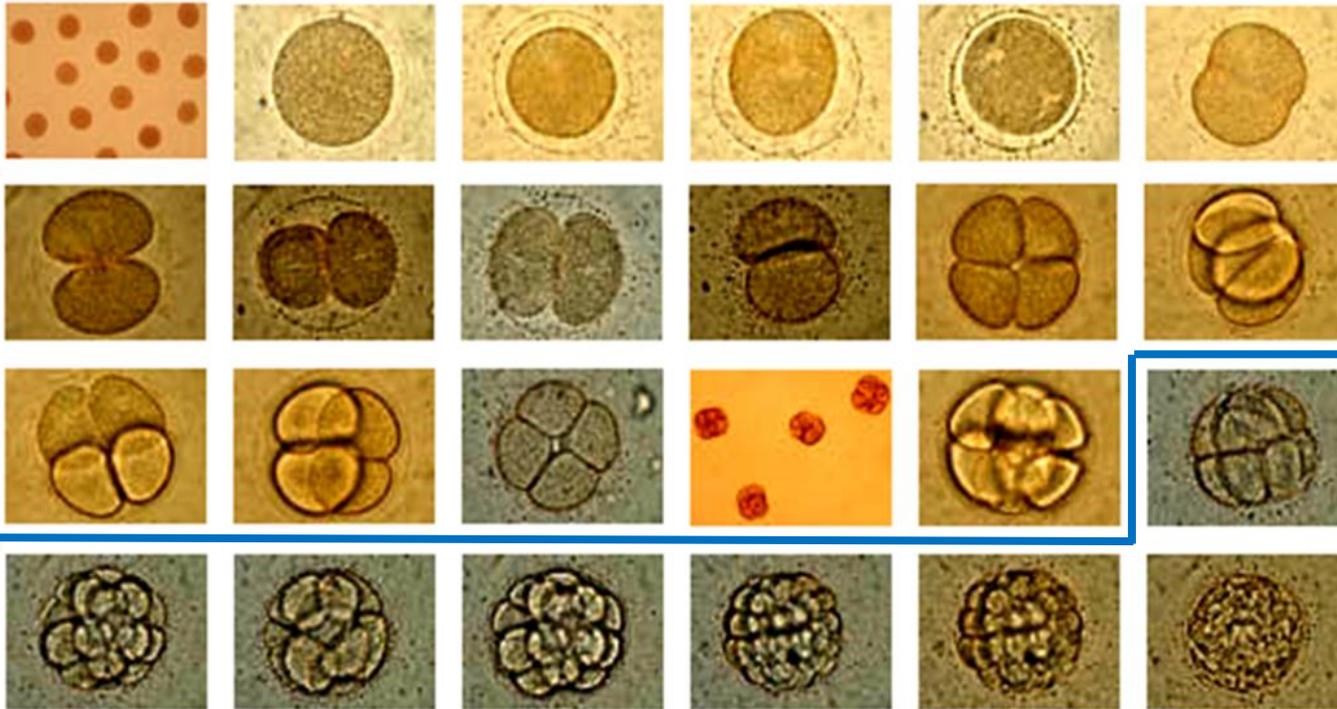
Rhythmus beim Gehen, Tanzen, Atmen,... induzieren Fries-Ornamente (e.g Steinbock-Fries, Jemen)



Eine Zwischenbemerkung: “Grobsymmetrie” und “Leben”

am Beispiel **Gentechnologie** und ihre **Geometrie**

Zellteilungsprozess von Eizellen (<http://www.uco-bn.fr/Galerie-Biologie/Photos/Embryologie>)



Gemäß wissenschaftlicher Erkenntnisse in Biology / Medicine / Gene technology:

(<http://www1.medizin.uni-halle.de/iaz/deutsch/>)

Totipotent : befruchtete Eizellen

+ Blastomere vom 2- bis 8-Zell-Stadium

Pluripotent: Blastomere nach 8-Zell-Stadium

+ Embryoblast + Primordial-Gewebezellen

+ Mesenchymal-Zellen

Unipotent : Mesenchymal-Zellen nach

Spezialisierung + Organgewebe-Zellen

8-Zell-Stadium: Jede Zelle befindet sich in einem Oktant eines kartesischen xyz-Systems.

Wegen der Oktaeder-Symmetrie sind alle Zellen noch gleichartig und daher totipotent. Im nächsten Stadium sind weniger Symmetrien vorhanden, die Zellen also nicht mehr gleichartig, und daher höchstens pluripotent.

Der "Regularisierungszwang": ein Faktum menschlicher Psychologie



From J.R. Wilson:
Wonders of Science,
Life Inc. 1966, p. 50-51



Aussichtsturm (2013) am Pyramidenkogel (Kärnten)



Architektur mit einer
Schraubfläche, (elliptischer
Querschnitt, Mittelpunkte
auf der Schraubachse),
12 Meridiane realisiert.

Die elliptischen Plattformen erscheinen als nicht
horizontale Kreisescheiben.

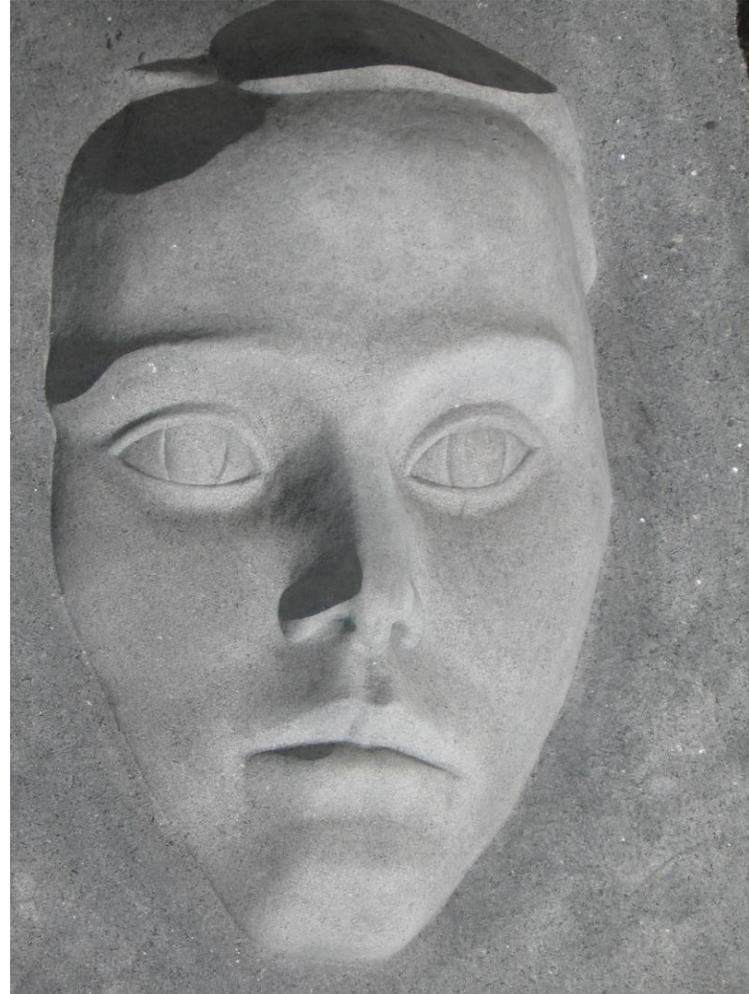
Der “Regularisierungszwang”: ein Faktum menschlicher Psychologie



Granit-Skulptur (Oslo, Norwegen)

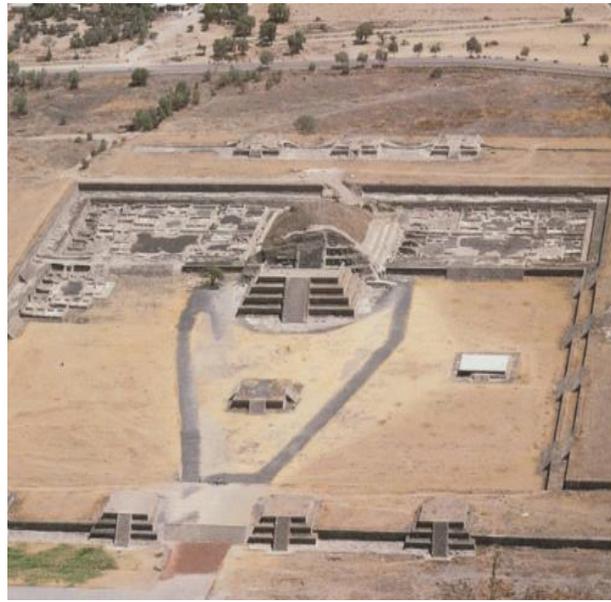
Optische Täuschung

“Konvexität” auch wenn beidäugig aus schrägem Winkel betrachtet!



Symmetrie & Regularität gelten als (sehr) schön und sogar heilig

Tempel & Kirchen jeder Kultur haben spezielle Proportionen, zeigen Symmetrien und Regelmäßigkeiten; das griechische Weltbild sieht Materie als Gemisch Platonischer Körper.



Hier braucht man
Geometrie und
exaktes Messen
wirklich!



Z.B. in europäischen Klöstern sind Gebäude mit religiösem Zweck symmetrisch, während Wirtschaftstrakte, also Weltliches, bewusst gestörte Symmetrie zeigen.

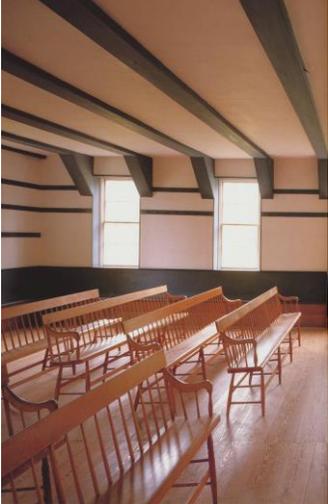
Wissens-Prinzipien zu Zeiten von “no-Monge” und “no-CAAD”:

- wesentliches Wissen bleibt geheim! (unter Priesterschaft und “Architekten”)
- “Learning by doing” in Zünften organisiert, z.B. bei „Bauhütten“ und Freimaurer-Organisationen. **Wissen ist nicht allgemein zugängliches Kapital !**

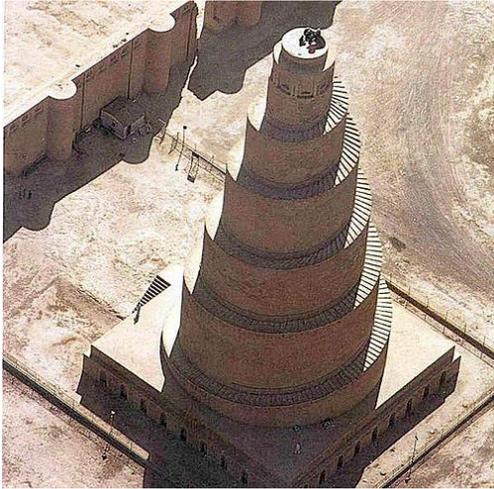
Symmetrie & Regularität gelten als (sehr) schön und sogar heilig

Beispiele aus verschiedenen Kulturen

Ästhetik der Shaker (USA)



die "Malwya" (Iraqe)



Islamische Ästhetik (Isphahan, Iran)



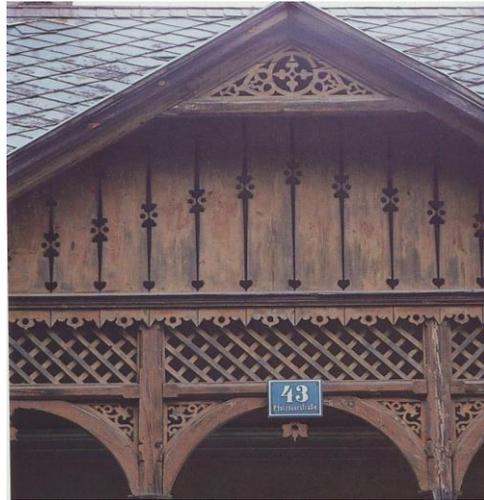
Griechische Ästhetik (Paphos, Zypern)



Die Stadt Shibam (Jemen)



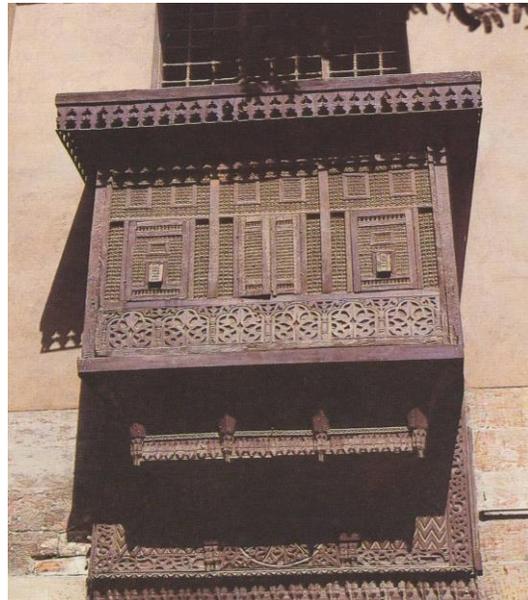
Multilevel-Dekor versus beschränkte Sicht-Distanz



Stadtbefestigung, Khiva, Usbekistan

Dekorlose Fassaden wirken kalt, abweisend, uninteressant.

Für eine Festung oder einen Flakturm mag das sogar intendiert sein.



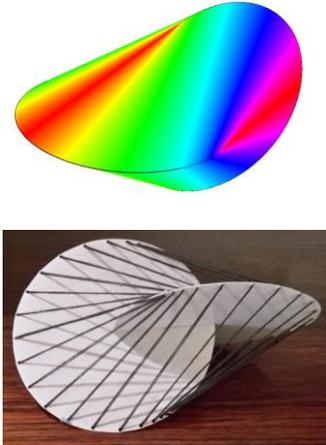
Flakturm, Wien

Manche moderne Architektur beeindruckt von Abstand als Riesenskulptur, ist aus der Nähe aber langweilig.



Gehry: "Ginger & Fred" (Prag)

Modernes Design basierend auf Symmetrie plus Geometrie/Mathematik



Parfümflaschen, inspiriert vom „Oloid“ and Quadrik-Durchdringung



H. Tesar (1995): evangelische Kirche (Klosterneuburg), Zylinderschnitte u. Vieles mehr

Schraubfläche mit ellipt. Querschnitt



Olafur Eliasson: „Luminary“

Villarceau-Kreise am Ringtorus

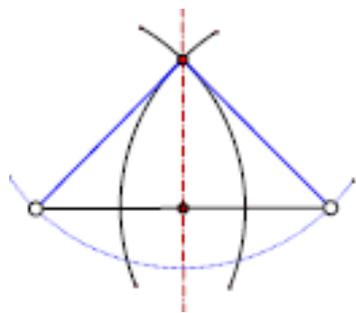


„Luminary“ (24-Deltoeder)

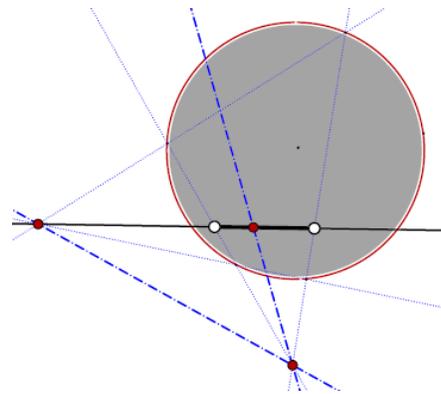
“Symmetrie” als abstraktes elementar-mathematisches Konzept?

In Vorschule, Grund- und Hauptschule (NMS) wird “Symmetrie” nur als Spiegelung behandelt. Ausgehend von Beobachtungen in der Schüler-Umwelt werden Eigenschaften von Kongruenzen abstrahiert. **Ziel sollte die Förderung der Abstraktionsfähigkeit sein!**

Erste Anwendung ist der (in Deutschland übliche) Begriff “Mittelsenkrechte” – ein fehlerhafter name für “Streckensymmetrale” bzw. “äquidistante Punktmenge eines Punktpaares” (zu einer Strecke).



In der Anschauungsebene (mit euklidischer Struktur) ist diese Punktmenge genau eine Gerade, die Achse einer Spiegelung, die einen gegebenen Punkt in den anderen und die Strecke in sich spiegelt.



In einer hyperbolischen oder elliptischen Ebene besteht die Punktmenge aus einem Paar von Geraden, jede ist Achse einer Spiegelung, die einen gegebenen Punkt in den anderen spiegelt.

AHA! In der projektiv abgeschloss. euklidischen Ebene erfüllt auch die Ferngerade die Äquidistanz-Eigenschaft.

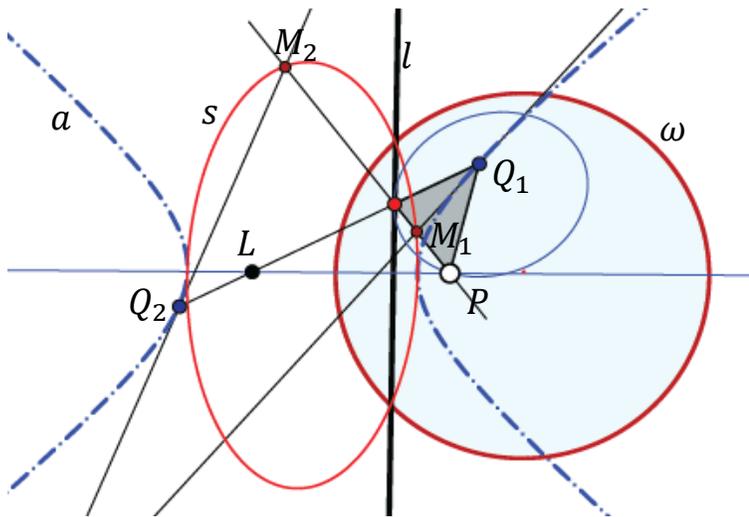
??? Immer zwei Geraden als Lösung, also ein quadratisches Problem ???

“Symmetrie” als abstraktes elementar-mathematisches Konzept?

Die Äquidistanz-Menge linearer Unterräume ist ein Objekt 2. Grades

In der euklidischen Ebene:

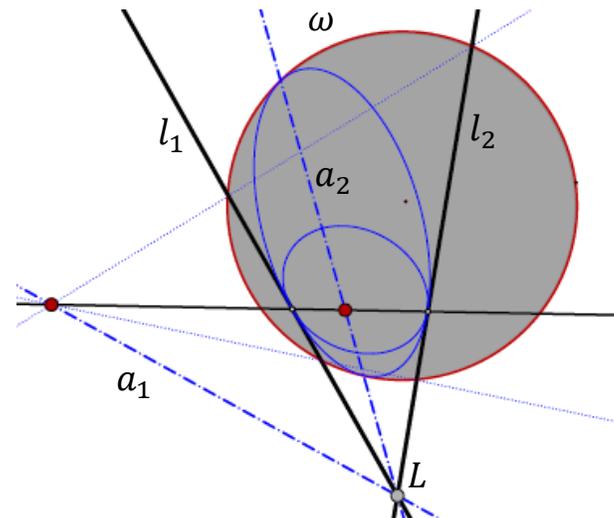
- 1) Äquidistanz-Menge von Punkt P und Gerade l ist eine Parabel.
- 2) Äquidistanz-Menge von zwei Geraden ist ein Geradenpaar (“Winkelsymmetralen”, beide sind Spiegelachsen)



h-Ebene: a ... analog wie euklidische Parabel konstruiert, s ... “Scheiteltangente”

In der hyperbolischen Ebene:

- 1) Äquidistanz-Menge von P und l ist ein Kegelschnitt (wie eine Parabel konstruiert).
- 2) Äquidistanz-Menge zweier Geraden ist ein Geradenpaar (h-Winkelsymmetralen).



a_i ... die selben für ein Punktepaar und ein Geradenpaar

Im euklidischen 3-Raum:

- 1) Äquidistanz-Menge von Punkt P und Ebene π ist ein ellipt. Drehparaboloid.
- 2) Äquidistanz-Menge zweier schneidender Geraden ist ein Ebenenpaar (beide sind Spiegelachsen).
- 3) Äquidistanz-Menge zweier windschiefer Geraden ist eine gleichseitige HP-Fläche.
- 4) Äquidistanz-Menge einer Gerade und einer Ebene ist ein quadratischer Kegel.

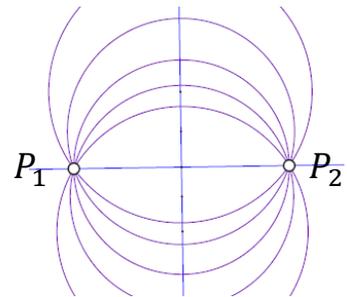
“Symmetrie” als abstraktes elementar-mathematisches Konzept?

Was wäre **dual zur Äquidistanz-Menge**? Logisch wäre es, dies **Äquiangular-Menge** zu nennen.

Leider, der Begriff wird schon für Polygone verwendet, wo benachbarte Seiten festen Winkel einschließen.

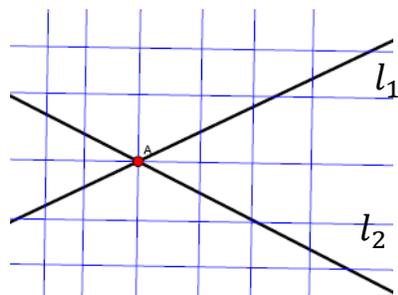
Der Begriff **“isoptische Punktmenge”** deckt nicht alles, was mit “dual zu äquidistant” gemeint ist.

Beispiel: Isoptische Menge eines Punkterpaares



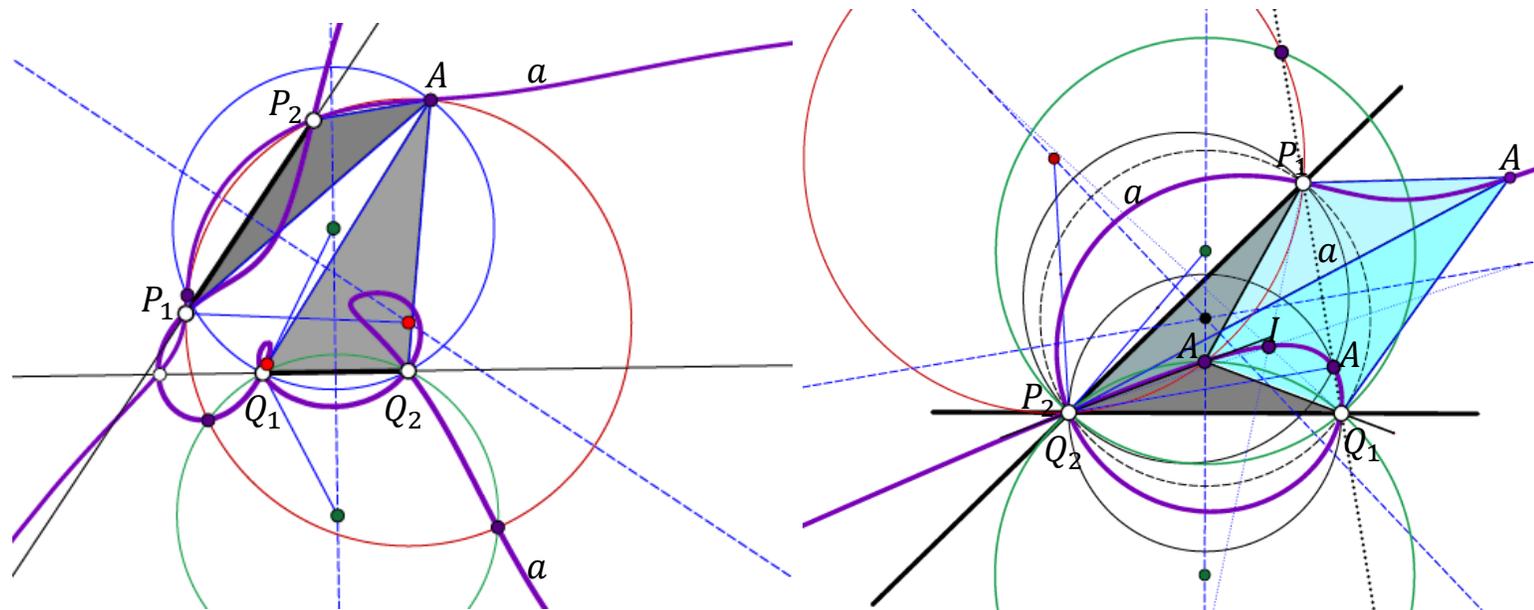
Kreis-
büschel

Beispiel: Isoptische Menge eines Geradenpaares



2 Parallel-
Büschel

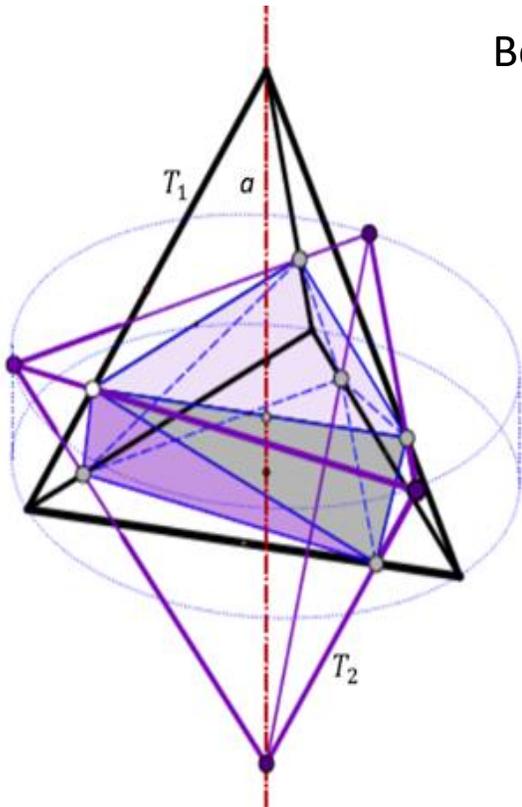
Beispiele: Isoptische Menge zweier Punkterpaare



“Symmetrie” als Beweishilfsmittel

Ein aktuelles Beispiel :

Satz (H. Stachel & G.W.): zwei symmetrische (also gegensinnig kongruente) Tetraeder T_1, T_2 erlauben einen 2-parametrischen Zwangslauf derart, dass die Kanten von T_1 entlang der korrespondierenden Kanten von T_2 gleiten.



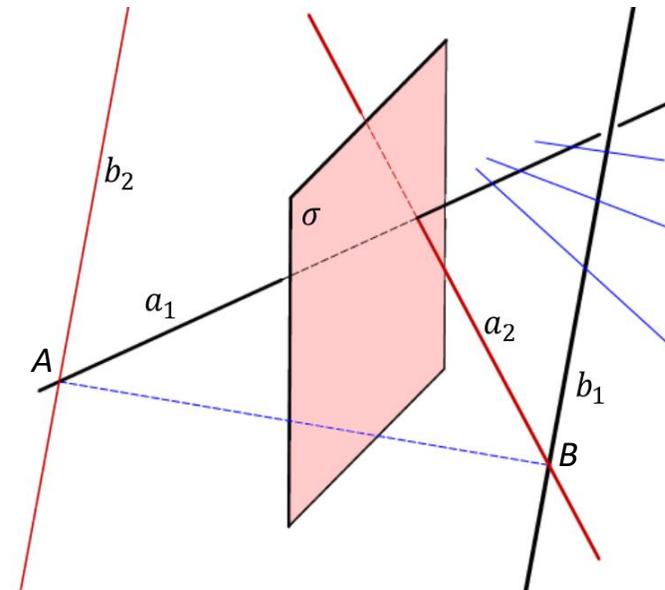
Beweis mittels Spiegelung:

Gehe von 6 Geraden aus und spiegle sie an einer Ebene σ . Man bekommt ein gegensinnig kongruentes Sextupel von Geraden.

Eine Ebene kann höchstens 4 Kantenstrecken eines Tetraeders schneiden, also müssten zusätzliche Schnittpunkte vorkommen.

Z. B. a_2 soll b_1 schneiden. Dann ist a_2 Erzeugende einer hyperbolischen Geradenkongruenz mit Netzachsen a_1, b_1 .

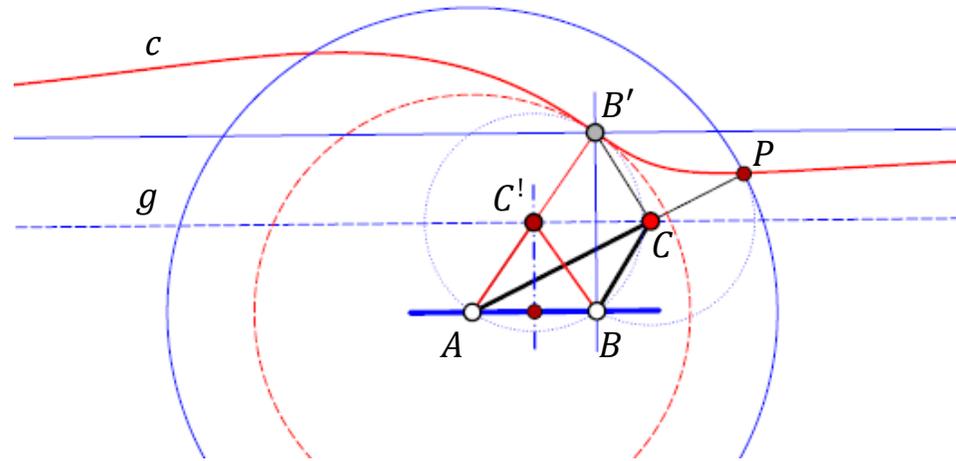
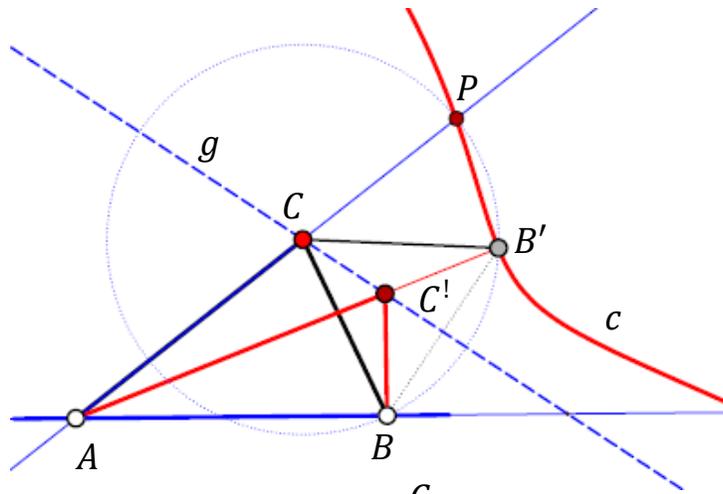
Zusätzlich schneidet dann b_2 auch a_1 ganz automatisch.



Wähle eine passende Netzgerade AB , spiegle a_1 an der Symmetrieebene der Netzpunkte A, B . a_2 wird Netzgerade und ebenso b_2 .

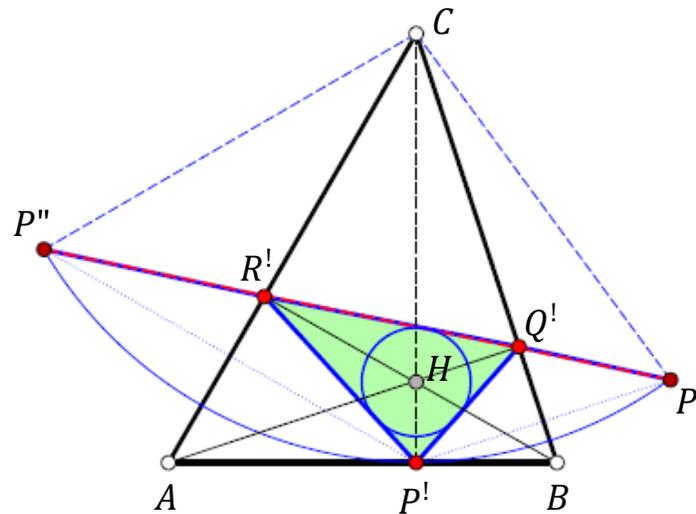
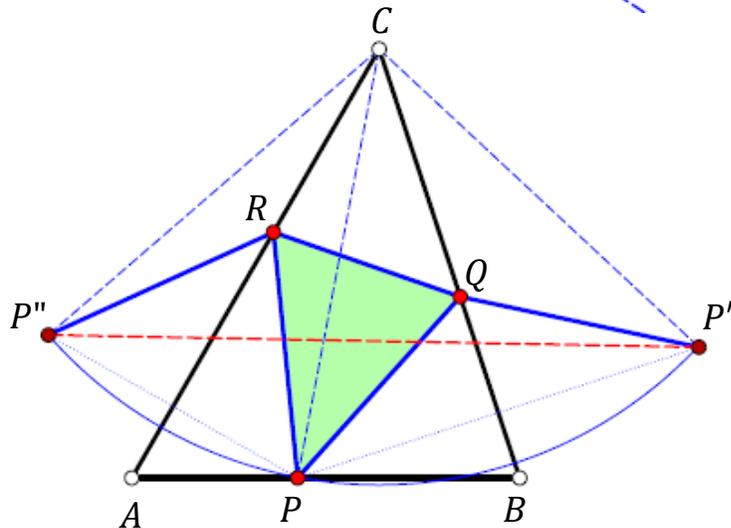
“Symmetrie” als Beweishilfsmittel

Extremwertaufgaben ohne Differenzieren lösen:



$$\min(\overline{AC} + \overline{BC}) = ?$$

$$(C \in g)$$



Das einem Dreieck ABC eingeschriebene Dreieck PQR mit kleinstem Umfang ist das Höhenfußpunktdreieck von ABC

“Symmetrie” als Beweishilfsmittel und in Anwendungen

Der „drei-Spiegelungen-Satz“
für Beweis, dass die Seitensymmetralen eines Dreiecks durch einen Punkt (die Umkreismitte) gehen.

Geometrische Optik

Z.B. „Reflexionseigenschaften der Würfecke“

(geschlossene) Billard-Polygone

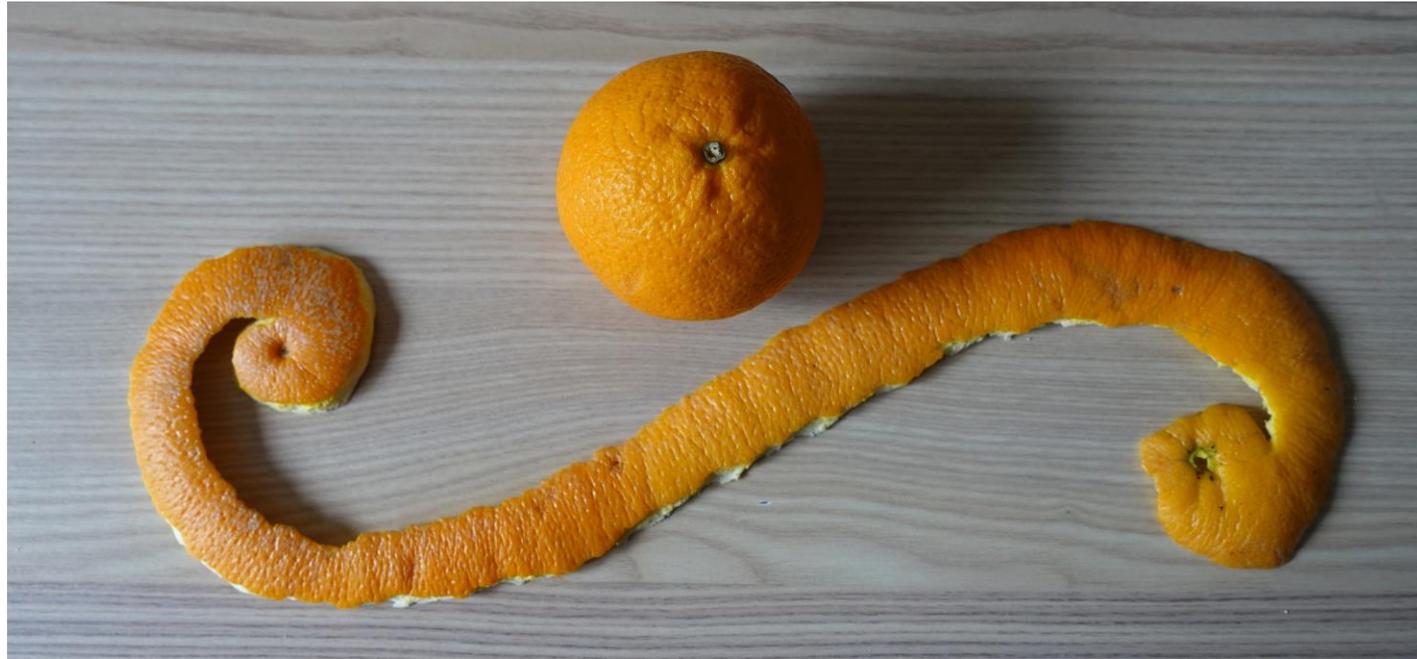
„Steiner-Symmetrisierung“ zur Lösung isoperimetrischer Probleme

Z.B. Unter allen geschlossenen (ebenen) Kurven gleicher Länge umschließt der Kreis die größte Fläche (= „Problem der Dido“)

Modifikation wegen Einbeziehung der Küstenlinie von Karthago: Unter allen ebenen Kurven, die eine Strecke enthalten, hat der Halbkreis größten Inhalt.

... und vieles mehr !

Konklusion zum Vortrags-Ende



**Symmetrie \equiv Geometrie.
Was sonst?!**